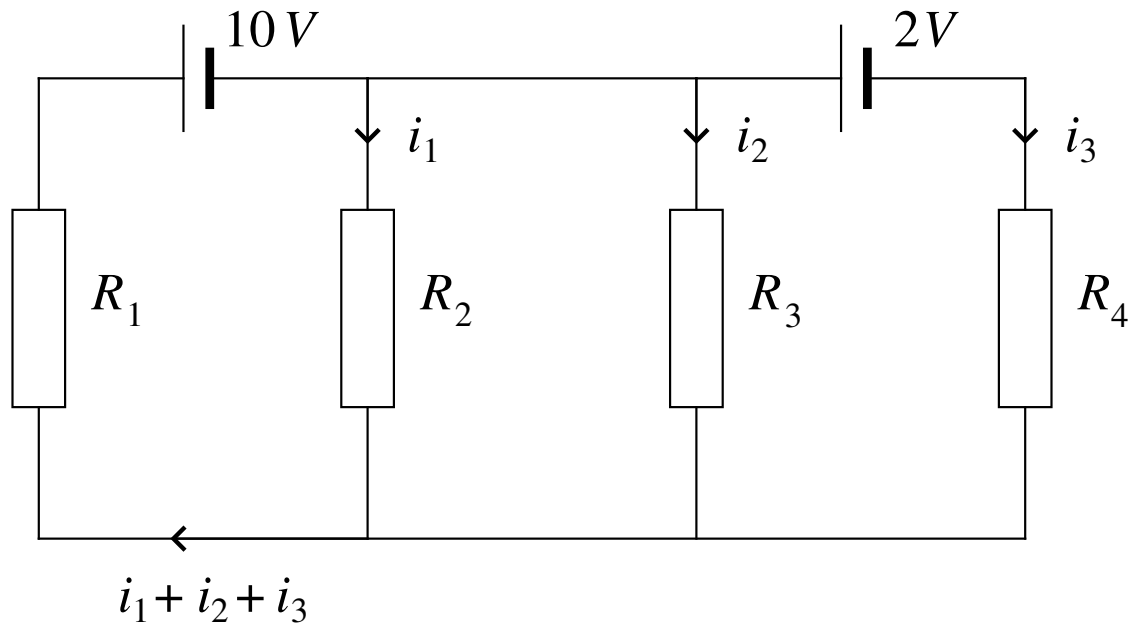
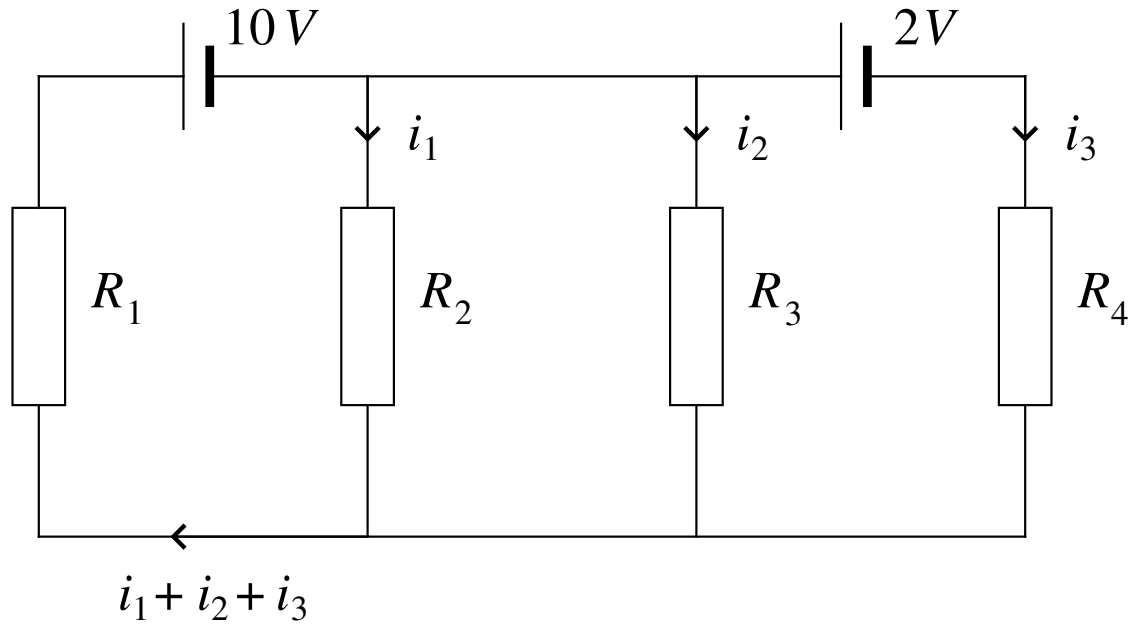


VEKTOREN UND VEKTORRÄUME

Beispiel: Elektrische Netzwerke



Beispiel: Elektrische Netzwerke

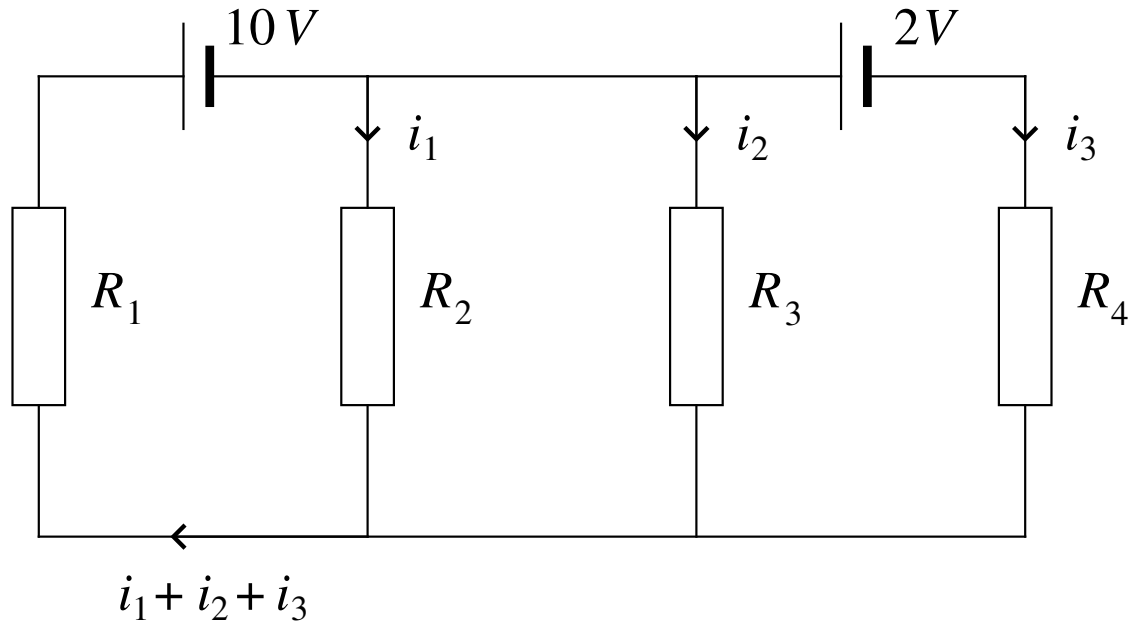


$$R_2 i_1 + R_1 (i_1 + i_2 + i_3) = 10 \text{ V},$$

$$R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0 \text{ V},$$

$$R_4 i_3 - R_3 i_2 = 2 \text{ V}.$$

Beispiel: Elektrische Netzwerke



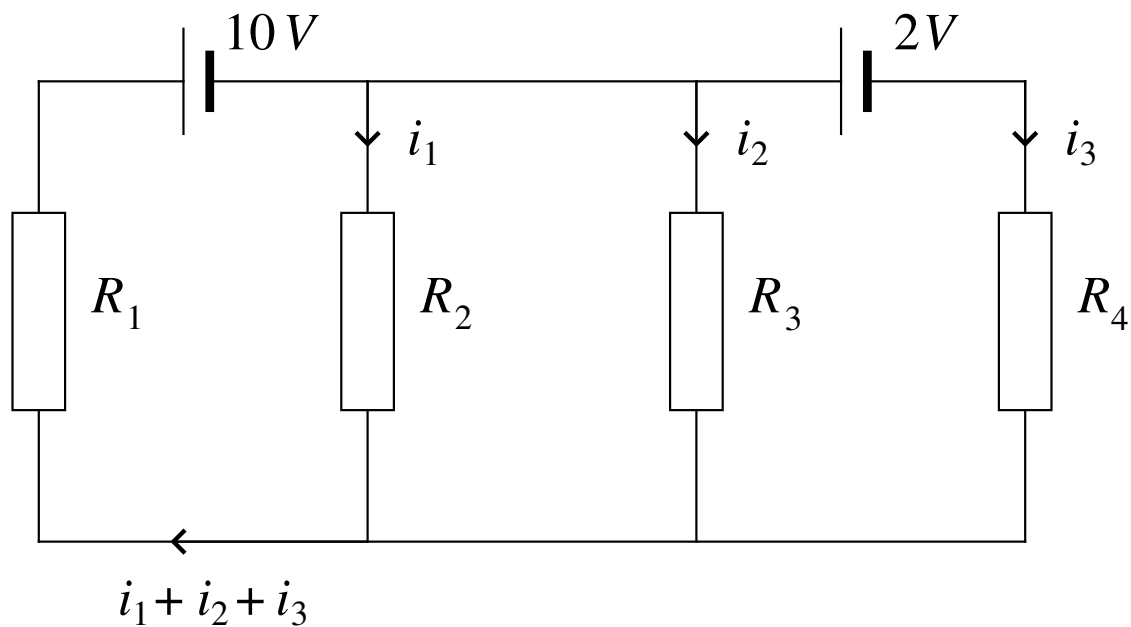
$$R_2 i_1 + R_1 (i_1 + i_2 + i_3) = 10 \text{ V},$$

$$R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0 \text{ V},$$

$$R_4 i_3 - R_3 i_2 = 2 \text{ V}.$$

Konkret $R_1 = 1.5 \Omega$, $R_2 = R_3 = 4 \Omega$ und $R_4 = 3 \Omega$

Beispiel: Elektrische Netzwerke

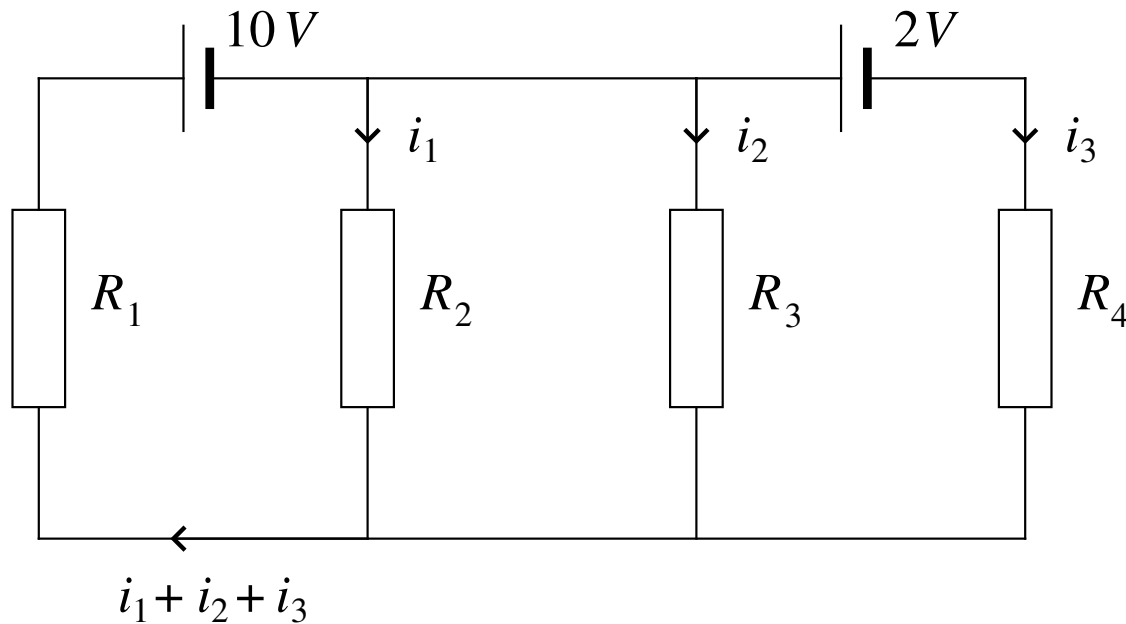


$$5.5 i_1 + 1.5 i_2 + 1.5 i_3 = 10,$$

$$-4 i_1 + 4 i_2 = 0,$$

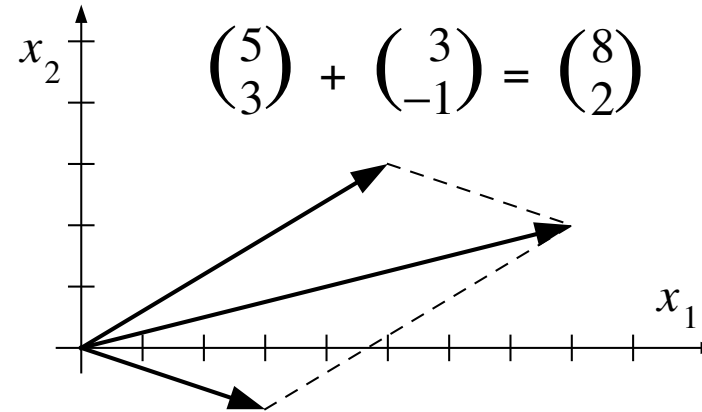
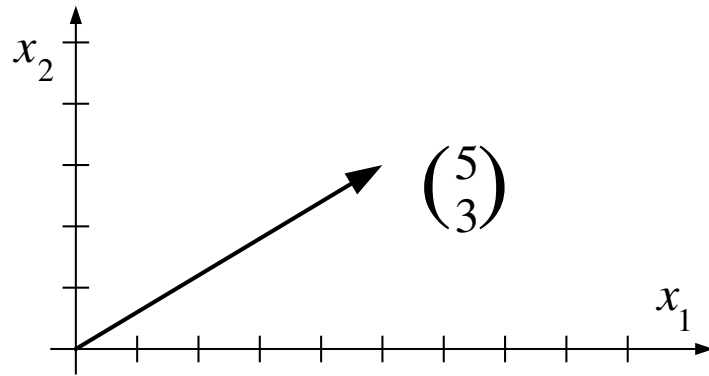
$$-4 i_2 + 3 i_3 = 2.$$

Beispiel: Elektrische Netzwerke

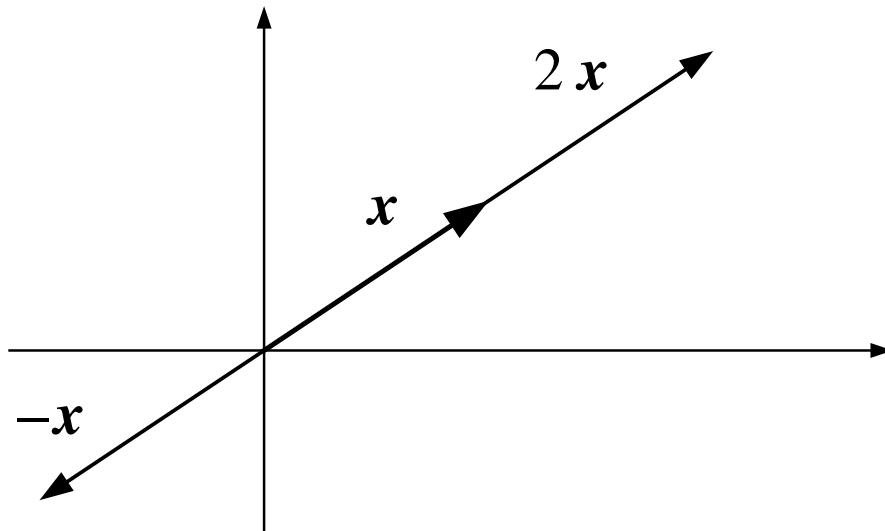
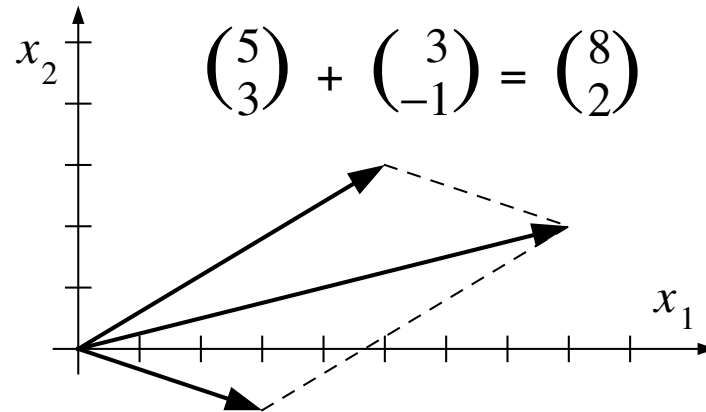
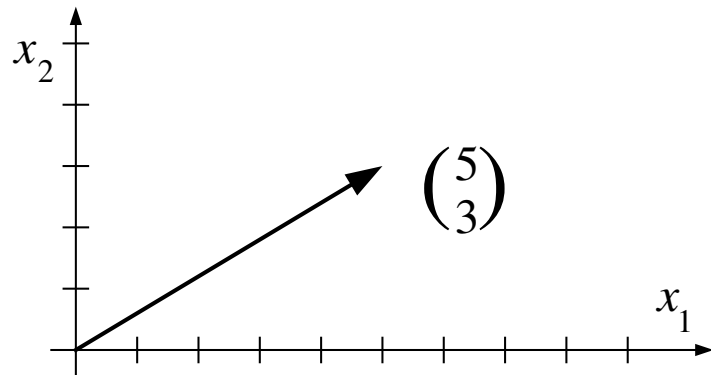


$$\begin{aligned} 5.5 i_1 + 1.5 i_2 + 1.5 i_3 &= 10, \\ -4 i_1 + 4 i_2 &= 0, \\ -4 i_2 + 3 i_3 &= 2. \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 5.5 & 1.5 & 1.5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vektoren

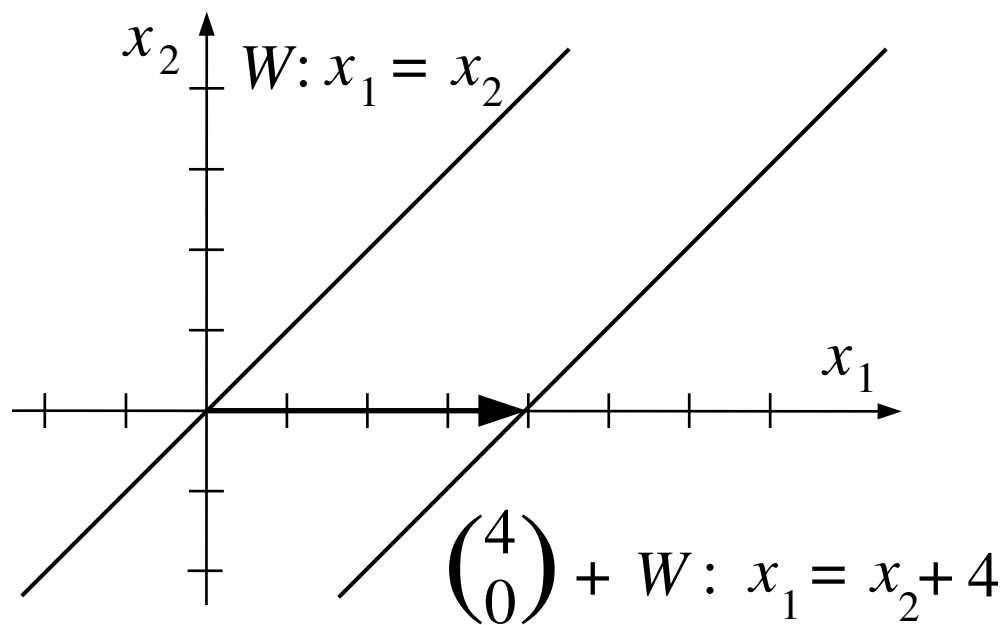


Vektoren



Vektoren

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\}$$



Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 = 0,$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0,$$

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 = 0,$$

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0,$$

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

Es gibt eine nichttriviale Lösung: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$
 $\implies$ die Vektoren sind linear abhängig.

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \implies \lambda_1 = 0 \\ \implies \lambda_2 = 0 \\ \implies \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$

MATRIZEN

Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}^T = (1 \ 5 \ 0) \quad (1 \ 5 \ 0)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Summe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Vielfache

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 15 & 21 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

				1	2
				5	7
				0	2
1	5	2			
3	2	1			
0	1	2			

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

			1		2
			5		7
			0		2
1	5	2	$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0$		
3	2	1			
0	1	2			

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

			1	2
			5	7
			0	2
1	5	2	$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2$
3	2	1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2$
0	1	2	$0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

			1	2
			5	7
			0	2
1	5	2	$1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2$
3	2	1	$3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0$	$3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2$
0	1	2	$0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0$	$0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2$

Rechnen mit Matrizen

A, B, C : Matrizen, λ : Skalar

I : Einheitsmatrix mit passender Anzahl von Zeilen und Spalten

$$1. \quad A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$2. \quad (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$3. \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$4. \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$5. \quad (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$$

$$6. \quad (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$7. \quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$8. \quad (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4	
1	2	3	4	
2	5	-1	2	$\longrightarrow$
-2	-3	-12	-13	$s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1$
2	-1	2	-1	$s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1$
				$s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4		s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4		1	0	0	0
2	5	-1	2	$\longrightarrow$	2	1	-7	-6
-2	-3	-12	-13	$s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1$	-2	1	-6	-5
2	-1	2	-1	$s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1$	2	-5	-4	-9
				$s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1$				

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \\ s_2 &\rightarrow s_2 - 2s_1 \\ s_3 &\rightarrow s_3 - 3s_1 \\ s_4 &\rightarrow s_4 - 4s_1 \end{aligned}$$

s_1	s_2	s_3	s_4
1	0	0	0
2	1	-7	-6
-2	1	-6	-5
2	-5	-4	-9

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \\ s_3 &\rightarrow s_3 + 7s_2 \\ s_4 &\rightarrow s_4 + 6s_2 \end{aligned}$$

1	0	0	0
2	1	0	0
-2	1	1	1
2	-5	-39	-39

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \\ s_2 &\rightarrow s_2 - 2s_1 \\ s_3 &\rightarrow s_3 - 3s_1 \\ s_4 &\rightarrow s_4 - 4s_1 \end{aligned}$$

1	0	0	0
2	1	0	0
-2	1	1	1
2	-5	-39	-39

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \\ s_4 &\rightarrow s_4 - s_3 \end{aligned}$$

s_1	s_2	s_3	s_4
1	0	0	0
2	1	-7	-6
-2	1	-6	-5
2	-5	-4	-9

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \\ s_3 &\rightarrow s_3 + 7s_2 \\ s_4 &\rightarrow s_4 + 6s_2 \end{aligned}$$

1	0	0	0
2	1	0	0
-2	1	1	0
2	-5	-39	0

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc}
 s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & 4 \\
 2 & 5 & -1 & 2 \\
 -2 & -3 & -12 & -13 \\
 2 & -1 & 2 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\
 s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\
 s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & -7 & -6 \\
 -2 & 1 & -6 & -5 \\
 2 & -5 & -4 & -9
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_3 \rightarrow s_3 + 7s_2 \\
 s_4 \rightarrow s_4 + 6s_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 -2 & 1 & 1 & 1 \\
 2 & -5 & -39 & -39
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_4 \rightarrow s_4 - s_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 -2 & 1 & 1 & 0 \\
 2 & -5 & -39 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \longrightarrow \\
 s_1 \rightarrow s_1 - 2s_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 \\
 -4 & 1 & 1 & 0 \\
 12 & -5 & -39 & 0
 \end{array}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$ \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\ s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\ s_4 \rightarrow s_4 - 4s_1 \end{array} $	$ \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_3 \rightarrow s_3 + 7s_2 \\ s_4 \rightarrow s_4 + 6s_2 \end{array} $
$ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_4 \rightarrow s_4 - s_3 \end{array} $	$ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -39 & 0 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_1 \rightarrow s_1 - 2s_2 \end{array} $
$ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & -5 & -39 & 0 \end{array} $	$ \begin{array}{l} \longrightarrow \\ s_1 \rightarrow s_1 + 4s_3 \\ s_2 \rightarrow s_2 - s_3 \end{array} $	$ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -144 & 34 & -39 & 0 \end{array} $	

Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$z_2 \rightarrow z_2 - 2z_1, \quad z_3 \rightarrow 3z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 9 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1, \quad s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Invertieren einer Matrix

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 2 & 3 & 4 \\
 3 & 4 & 4 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_2 \rightarrow s_2 - 2s_1 \\
 s_3 \rightarrow s_3 - 3s_1 \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & -2 \\
 3 & -2 & -5 \\
 \hline
 1 & -2 & -3 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_3 \rightarrow s_3 - 2s_2 \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & 0 \\
 3 & -2 & -1 \\
 \hline
 1 & -2 & 1 \\
 0 & 1 & -2 \\
 0 & 0 & 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & 0 \\
 3 & -2 & 1 \\
 \hline
 1 & -2 & -1 \\
 0 & 1 & 2 \\
 0 & 0 & -1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_3 \rightarrow -s_3 \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 s_2 \rightarrow s_2 + 2s_3 \\
 s_1 \rightarrow s_1 - 3s_3 \\
 s_2 \rightarrow -s_2 \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 4 & 4 & -1 \\
 -6 & -5 & 2 \\
 3 & 2 & -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 -4 & 4 & -1 \\
 4 & -5 & 2 \\
 -1 & 2 & -1
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 s_1 \rightarrow s_1 - 2s_2 \\
 \longrightarrow
 \end{array}$$