Mathematik für TCH Konversatorium II

Frage: *„Ich bitte Sie die empirische Ordnung k aus der vo3 (Seite 43) genauer zu erklären — besonders was diese aussagt und wie diese berechnet wird.“*

Antwort: Grob gesprochen liefert die empirische Ordnung eine Maßzahl dafür, wie schnell die bei einer konkreten Durchführung eines Näherungsverfahrens erhaltenen Zahlenwerte gegen den exakten Lösungswert konvergieren. Dabei handelt es sich um eine a posteriori Analyse, wo man voraussetzt, dass man den exakten Lösungswert bereits kennt. In die empirische Ordnung fließen sowohl der Verfahrensfehler (z.B. bei der Simpson-Regel der Fehler, der entsteht, wenn man statt der gegebenen Funktion interpolierende Parabelbögen integriert) als auch der Rechenfehler (das sind Rundungsfehler, die bei der konkreten Durchführung der Berechnungen auf einer Rechenmaschine zwangsläufig entstehen) ein.

Zur Berechnung der empirischen Ordnung: Es werden hier jetzt die gleichen Bezeichnungen wie in den Vorlesungsunterlagen verwendet (siehe vo03.pdf, Seite 43). Hat man s Verfeinerungen durchgeführt, d.h. den Aufwand um den Faktor 2^s erhöht, kann man den absoluten Fehler ε_s (das ist der Absolutbetrag der Differenz aus exaktem Lösungswert und s-tem Näherungswert) bestimmen und daraus Fehlerquotient $q_s = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_s}$ und empirische Ordnung $k_s = \frac{\log_2 q_s}{s}$ berechnen. Einfache Umformung ergibt:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 \cdot 2^{-sk_s} = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{(2^s)^{k_s}}$$

Das kann man so interpretieren: Hat man beim Näherungsverfahren den Aufwand um den Faktor 2^s vergrößert, wird der Fehler ε_s um den Faktor $\frac{1}{(2^s)^{k_s}}$ kleiner. Vergleicht man das mit der Definition der Fehlerordnung k des Näherungsverfahrens (siehe vo03.pdf, Seite 36, für Sehnentrapezformel und Simpson-Formel), sieht man, dass k_s die (konstante, nicht von s abhängige!) Fehlerordnung k modelliert, zumindest so lange der Rechenfehler relativ zum Verfahrensfehler klein ist. Die Fehlerordnung k wird auch Ordnung des Verfahrensfehlers genannt, sie bezieht sich ausschließlich auf den Verfahrensfehler und lässt den Rechenfehler unberücksichtigt.

Im Beispiel auf Seite 42 sind die Werte für k_s in der letzten Spalte für $s = 6, \dots, 29$ nahezu konstant bei 1,50 was wohl in diesem Fall dem tatsächlichen Wert der Ordnung k des Verfahrensfehlers entspricht (warum Ordnung 4 der Simpson-Regel nicht erreicht wird, ist im Skriptum auf Seite 45 ausgeführt). Für kleine Werte von s kann k_s stärker von k abweichen, da hier die Größe der Konstante C, für die $\varepsilon_s \leq C \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{(2^s)^k}$ für alle $s \geq 0$ gilt, eine Rolle spielt. Ab $s = 30$ wird k_s dann zunehmend kleiner, da beginnen sich Rundungsfehler auszuwirken.

Noch deutlicher ist dieser Effekt der Rundungsfehler beim Beispiel auf Seite 49 zu beobachten, wo k_s zunächst bis $s = 14$ (mit zugehörigem $n = 2^{14} = 16384$) über dem (erwarteten) Wert 4 liegt und danach aufgrund des zunehmenden Rechenfehlers rapide abfällt.

Auswirkung der Fehlerordnung auf die Anzahl exakter Dezimalstellen: Formt man die Beziehung $\varepsilon_s = \varepsilon_0 \cdot 2^{-sk_s}$ auf die Basis 10 um, erhält man

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 \cdot 10^{-(\log_{10} 2)\cdot sk_s} \approx \varepsilon_0 \cdot 10^{-0{,}30 sk_s}$$

Gehen wir jetzt der Einfachheit halber davon aus, dass s sich einem Bereich bewegt, wo k_s (nahezu) konstant gleich k ist: Ordnung $k = 1$ bedeutet, dass ca. bei jedem 3. Schritt (d.h. bei Erhöhung von s um 3) eine exakte Dezimalstelle dazukommt (weil $0,30 \cdot 3 \cdot k_s \approx 1$; genauer könnte man sagen, dass bei jedem 10. Schritt drei exakte Dezimalstellen dazukommen, weil 2^{10} in sehr guter Näherung gleich 10^3 ist, also $(\log_{10} 2) \cdot 10 \cdot k_s \approx 3$). Bei Ordnung $k = 2$ kommen bei ca. jedem 3. Schritt zwei exakte Dezimalstellen dazu, bei $k = 3$ kommt bei fast bei jedem Schritt eine exakte Dezimalstelle dazu usw. (siehe dazu auch Skriptum Seite 44).

Bemerkung: Stellt man alle Werte binär dar (anstatt dezimal), so entspricht die Fehlerordnung k genau der Anzahl der zusätzlichen exakten Binärstellen pro Schritt.