Mathematik für TCH Übung II

1. Man berechne die Dichte des Wassers bei 37 °C, wenn folgende Wertepaare für Temperatur t (in °C) und Dichte ρ (in g/cm^3) bekannt sind:

t (°C)	ρ (g/cm^3)
20	0,99823
30	0,99567
40	0,99224
50	0,98807
60	0,98324
70	0,97781

   Hinweis: Man ermittle den gesuchten Funktionswert von ρ bei 37 °C näherungsweise mit Hilfe der Newton'schen Interpolationsformel.

2. Der Dampfdruck p des Wassers ist eine Funktion der Temperatur t. Es wurden folgende Wertepaare für p (in technischen Atmosphären) und t (in Grad Celsius) gemessen:

t (°C)	p (at)
50	0,126
100	1,03
150	4,85
200	15,86
250	40,56
300	87,6

   Ist die Funktion $p(t)$ eine quadratische Polynomfunktion?

   Anleitung: Man überprüfe die Annahme, dass $p(t)$ eine quadratische Polynomfunktion ist, indem man $p(t)$ mit Hilfe der gegebenen Funktionswerte für $t = 100, 150, 200$ durch eine quadratische Polynomfunktion interpoliert und sodann die gemessenen Dampfdruckwerte für $t = 50, 250, 300$ mit den interpolierten Werten an diesen Stellen vergleicht.

3. Bei Eichung eines Platin/Platinrhodium-Thermoelements wurden zu drei Temperaturen t (in ° C) die elektromotorischen Kräfte e (in mV) ermittelt (siehe Tabelle). Man interpoliere die Funktion $t = t(e)$ durch ein quadratisches Polynom, wobei man die Interpolation auf zwei Arten, nämlich sowohl mit der Newtonschen als auch die Lagrangeschen Interpolationsformel durchführe. Weiters bestimme man mit Hilfe des interpolierenden Polynoms die Temperatur, die einem Ablesewert von 9,00 mV entspricht.

t	e
630,5	5,535
960,5	9,117
1063,0	10,301

4. Aus den Werten $\phi(1{,}40) = 0{,}9192$, $\phi(1{,}50) = 0{,}9332$ und $\phi(1{,}60) = 0{,}9452$ berechne man mit Hilfe einer Interpolation durch eine quadratische Polynomfunktion näherungsweise $\phi(1{,}57)$.

5. Man löse die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, 4$, durch eine Polynomfunktion $y = p(x)$ für die Werte

x_i	-1	0	1	2
y_i	14	3	0	5

(a) mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel,

(b) mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel.

6. Man löse die Interpolationsaufgabe $p(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2$, durch eine Polynomfunktion $y = p(x)$ für die Werte

x_i	-1	0	1
y_i	10	5	4

   (a) mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel,

   (b) mit Hilfe der Newtonschen Interpolationsformel.

7. Man interpoliere die Funktion $f(x) = \sin x$ an den Stellen $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π und $\frac{3\pi}{2}$ durch eine Polynomfunktion $p(x)$ minimalen Grades und rechne nach, dass auch $f(2\pi) = p(2\pi)$ gilt.

8. Man berechne mit Hilfe der Keplerschen Fassregel einen Näherungswert für das Integral $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$ und prüfe nach, dass man den gleichen Näherungswert erhält, wenn man die zu integrierende Funktion e^{-x^2} an den drei Stellen -1, 0 und 1 durch ein Polynom $p(x)$ interpoliert und anschließend $\int\limits_{-1}^{1} p(x)\, dx$ (exakt) berechnet.

9. Man berechne das Integral $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\, \mathrm{d}x$ näherungsweise, indem man

   (a) die Funktion $f(x) = \sqrt{\cos x}$ an den drei Stellen $x = -\pi/2$, 0 und $\pi/2$ durch eine Polynomfunktion $p(x)$ interpoliere und $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} p(x)\, \mathrm{d}x$ berechne,

   (b) die Keplersche Fassregel anwende.

   Warum ist das Ergebnis bei (a) und (b) gleich?

10. Man bestimme näherungsweise das Integral $\int_2^5 \frac{1}{\ln x}\, dx$.

11. Man berechne das Integral $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

    (a) näherungsweise mit Hilfe der Sehnentrapezformel, wobei man das Integrationsintervall $[0, 1]$ in vier gleich große Teilintervalle teile,

    (b) näherungsweise mit Hilfe der Simpsonformel, wobei man die gleichen Teilungspunkte wie bei (a) verwende,

    (c) exakt mit Hilfe einer Stammfunktion (Grundintegral, siehe Formelsammlung),

    und vergleiche die erhaltenen Werte.

12. Man berechne das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$$

    durch ein numerisches Näherungsverfahren auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma genau.

    Hinweis: Man beachte $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (Begründung angeben!) und verwende beim Näherungsverfahren mindestens 4 Teilintervalle.

13. Zur Überprüfung eines elektrochemischen Präparates wurde in regelmäßigen Zeitabständen die Stromstärke i der übergehenden Ladungen gemessen. Dabei ergaben sich die folgenden Werte:

t (in min)	i (in A)
0	4,00
15	3,60
30	3,28
45	2,96
60	2,68
75	2,44
90	2,20
105	2,00
120	1,80
135	1,64
150	1,48

Wie groß ist die während der gesamten Versuchsdauer von 2,5 Stunden übergegangene Ladungsmenge?

Hinweis: Bezeichnen $i(t)$ die Stromstärke zur Zeit t und T die Versuchsdauer, so ist die gesamte übergegangene Ladungsmenge gleich $\int_0^T i(t)\,dt$.

14. In der Debye'schen Theorie zur Berechnung der spezifischen Wärme fester Körper treten im Rahmen der sogenannten Debye'schen Formel Integrale der Form

$$I(u) = \int_0^u \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx$$

mit $u \in (0, \infty)$ auf. Man berechne $I(1{,}5)$ näherungsweise mittels zweier verschiedener Verfahren der numerischen Integration, wobei man jeweils 0,25 und 0,125 als Schrittweiten wähle, und vergleiche die so erhaltenen Näherungswerte miteinander sowie mit dem tatsächlichen Wert $I(1{,}5) = 0{,}615495$.

15. Nach Born und Mayer lässt sich die potentielle Energie E zweier einwertiger Ionen, die im gebundenen Zustand als Molekül eine stabilere Konfiguration bilden als im isolierten Zustand, ausdrücken durch die Formel

$$E = -\frac{q^2}{r} + b\,e^{-r/R},$$

wobei r der Ionenabstand, q die Elementarladung und b sowie R zwei für die betreffenden Ionen charakteristische positive Konstanten sind.

Man berechne den „stabilen Abstand" der Ionen im Molekül für die numerischen Werte $q = 2$, $b = 6$ und $R = 2$. Der stabile Abstand $r^\star$ ist jener Wert von r, bei dem die Potentialfunktion $E(r)$ ihr (einziges) relatives Minimum annimmt.

16. Bei der Herleitung des Wien'schen Verschiebungsgesetzes spielt die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

eine wichtige Rolle. Man zeige, dass es genau ein $x^* > 0$ gibt mit $f(x^*) = 5$ und bestimme x^* mit Hilfe des Newton'schen Näherungsverfahrens auf vier Dezimalstellen hinter dem Komma genau.

Hinweis: Für die eindeutige Existenz von x^* bestimme man z.B. $f(1)$, $f(10)$ und zeige, dass $f(x)$ streng monoton wachsend für $x > 0$. Dann argumentiere man unter Verwendung der Stetigkeit von $f(x)$.

17. Gesucht ist eine in der Nähe von $x_0 = 0{,}9$ gelegene Nullstelle der Polynomfunktion $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$.

18. Gesucht ist die zwischen 0 und 1 liegende Nullstelle der Funktion $f(x) = e^x - 3x^2$.

19. Die Lösungen der Gleichung $\tan x = x$ spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Der Vergleich der beiden Funktionsgraphen $y = x$ und $y = \tan x$ zeigt, dass unendlich viele Lösungen existieren, in jedem Intervall $((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, genau eine. Man ermittle die kleinste positive Lösung x^* dieser Gleichung auf vier Dezimalstellen genau mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens.

    Hinweis: Für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt $x < \tan x$. Daher liegt x^* im Intervall $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; um einen geeigneten Startwert für das Newtonverfahren zu finden, untersuche man die Funktion $\tan x - x$ in diesem Intervall genauer.

20. Man löse die Differentialgleichung $y'(x) = 2y(x) + x^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ näherungsweise mit Hilfe sukzessiver Approximation (Verfahren von Picard), wobei man drei Iterationsschritte durchführe.

    Die so erhaltenen Näherungslösungen $y^{[0]}(x)$, $y^{[1]}(x)$, $y^{[2]}(x)$ und $y^{[3]}(x)$ vergleiche man mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{5}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, indem man diese Funktion als Potenzreihe mit Entwicklungsstelle 0 darstelle.

21. Mit dem Verfahren der sukzessiven Approximation (auch Verfahren von Picard bzw. wiederholte Quadratur genannt) berechne man Näherungslösungen der Differentialgleichung

    $$y'(x) = y^2(x) - y(x) + 2x$$

    zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$. Die ersten vier Näherungsfunktionen $y^{[0]}(x), \ldots, y^{[3]}(x)$ sind anzugeben.

22. Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = 1 + y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

    Man bestimme dazu die ersten 5 Näherungslösungen $y^{[0]}(x), \ldots, y^{[4]}(x)$ nach der Methode der sukzessiven Approximation (Verfahren von Picard).

23. Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = x^2 + y^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$. Mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens (mindestens 2 Schritte) berechne man den Wert der Lösung $y(x)$ an der Stelle $x = 0{,}2$.

24. In der Kinetik chemischer Reaktionen erster Ordnung treten Differentialgleichungen der Form

    $$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - y$$

    auf. Man löse die angegebene Differentialgleichung näherungsweise an der Stelle $x = 0{,}2$ für die Anfangsbedingung $y(0) = -1$ mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens (a) mit Schrittweite $h = 0{,}2$ bzw. (b) mit Schrittweite $h = 0{,}1$. Man vergleiche die erhaltenen Näherungswerte mit der exakten Lösung $y(x) = e^{-x}(x-1)$.

25. Man ermittle einen Näherungswert für die Lösung $y(x)$ an der Stelle $x = 1{,}2$ der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ zur Anfangsbedingung $y(1) = 2$ (a) mit Hilfe des Euler'schen Polygonzugverfahrens, (b) mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens, wobei man jeweils die Schrittweite $h = 0{,}1$ verwende.

    Man vergleiche den erhaltenen Näherungswert mit der exakten Lösung $y(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ an der Stelle $x = 1{,}2$.

26. Für die Differentialgleichung $y'(x) = 2x \cdot y(x)^2$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 1$ bestimme man mit Hilfe des Runge-Kutta Verfahrens Näherungswerte für die Lösung $y(x)$ an den Stellen $x = 1{,}1$ und $x = 1{,}2$ und vergleiche die erhaltenen Werte mit der exakten Lösung $y(x) = \frac{1}{2-x^2}$.

    Wie würde der Vergleich aussehen, wenn man für $x = 1{,}3$, $x = 1{,}4$, ... weitere Näherungswerte mit dem Runge-Kutta Verfahren berechnet? (Hinweis: Man skizziere den Funktionsgraphen der exakten Lösung $y(x)$ für x im Intervall $[1, 2]$ und betrachte insbesondere $x = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$.)