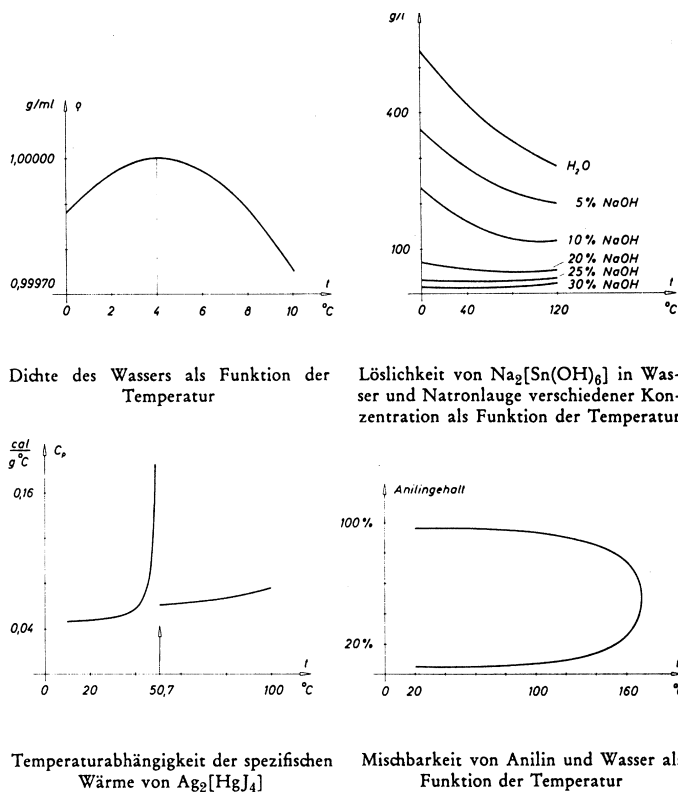


Abbildung 9:



50. Man studiere die Diagramme in der Abbildung 9. Was kann man aus ihnen herauslesen?
51. Die Leistung des elektrischen Stromes ist proportional dem Quadrat der Stromstärke. Die Reichweite von  $\alpha$ -Strahlen in Luft ist proportional der 3. Potenz der Anfangsgeschwindigkeit. Die Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers ist proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur.  
Man veranschauliche die angegebenen Proportionalitäten graphisch.
52. Der Druck  $p$  und das Volumen  $V$  eines idealen Gases sind einander umgekehrt proportional. Nimmt man 100 Liter Stickstoff und untersucht das Volumen bei verschiedenen Druckwerten, so findet man die in den ersten zwei Spalten der folgenden Tabelle wiedergegebenen Werte. Was können wir aus diesen Werten schließen?

Tabelle zu Aufgabe 52

$p$ (in atm)	$V$ (in Liter)	$pV$	$\frac{1}{V}$
1,0	100,0	100,0	0,010
27,3	3,622	98,9	0,276
44,4	2,225	98,8	0,449
62,0	1,590	98,6	0,628
73,0	1,352	98,7	0,739
80,6	1,226	98,8	0,816
91,0	1,088	98,9	0,920
109,2	0,909	99,4	1,101
123,4	0,810	100,0	1,235
168,8	0,608	102,6	1,645
208,6	0,505	105,2	1,980
251,1	0,432	108,2	2,316
290,9	0,386	112,2	2,590

53. Schüttelt man Jod mit Benzol und Blutkohle oder mit Tetrachlorkohlenstoff und Wasser oder mit Stärke und Wasser, so verteilt sich das Jod auf beide Medien in einem bestimmten Konzentrationsverhältnis. Die Verteilungskonzentrationen sind in den folgenden Tabellen angegeben. Welche Gesetzmäßigkeiten werden auf Grund dieser Tabellen nahegelegt?

Benzol und Blutkohle:

g Jod / 100 cm <sup>3</sup> C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	0,27	0,39	0,42	0,65	0,93	1,27	3,63	4,32
g Jod / g Kohle	1,04	1,15	1,18	1,31	1,45	1,54	2,03	2,11

Tetrachlorkohlenstoff und Wasser:

g Jod / 100 cm <sup>3</sup> CCl <sub>4</sub>	0,441	0,697	1,088	1,654	2,561
g Jod / 100 l H <sub>2</sub> O	5,16	8,18	12,76	19,34	29,13

Stärke und Wasser:

g Jod / g Stärke	0,245	0,248	0,250	0,255	0,276	0,308	0,326	0,361
g Jod / l H <sub>2</sub> O	1,267	1,763	2,509	3,482	5,235	15,42	29,28	62,33

*Hinweis:* Man bestimme zuerst graphisch die Zusammenhänge zwischen den Logarithmen der einzelnen Größen.

54. Die Gleichung  $\omega = A \cos(2\pi\nu(t - \frac{x}{c}))$  beschreibt ebene, in  $x$ -Richtung fortschreitende harmonische Wellen. Dabei ist  $t$  die Zeitvariable (in s),  $x$  die Längenvariable (in cm);  $\nu$  und  $c$  sind feste positive Größen (mit den Einheiten s<sup>-1</sup> bzw. cm·s<sup>-1</sup>), und  $A$  ist die Schwingungsamplitude.
- Man skizziere in einem  $(x, \omega)$ -Koordinatensystem die Wellenbewegung für  $t = 0, 1, 2$ .
  - Mit Hilfe dieses Schaubildes zeige man:  $c$  ist die Geschwindigkeit, mit der die Schwingungsmaxima sich in positiver  $x$ -Richtung fortbewegen (Phasengeschwindigkeit).
55. Die Gleichung  $\omega = A \cos(2\pi\nu(t - \frac{x}{c}))$  beschreibt ebene, in  $x$ -Richtung fortschreitende harmonische Wellen. Dabei ist  $t$  die Zeitvariable (in s),  $x$  die Längenvariable (in cm);  $\nu$  und  $c$  sind feste positive Größen (mit den Einheiten s<sup>-1</sup> bzw. cm·s<sup>-1</sup>), und  $A$  ist die Schwingungsamplitude.
- Man skizziere in einem  $(t, \omega)$ -Koordinatensystem den zeitlichen Verlauf an der Stelle  $x = 0$ .

- (b) Mit Hilfe dieses Schaubildes zeige man:  $\nu$  ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an einer festen Stelle  $x$  (Frequenz).

56. Man bestimme (ohne elektronische Rechenhilfe) alle Zahlen  $x$ , für die gilt:

$$\arcsin x = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{4}{5}.$$

Vorweg kläre man: Welche Zahlen kommen dafür überhaupt in Frage (Definitionsmenge)?

57. Man entwickle die Funktion  $2 \sin x \cos^2 x$  in eine Reihe (bis  $x^7$ )

- (a) mit Hilfe der Euler'schen Formeln,  
(b) durch Bildung des Cauchy-Produktes.

58. Man beweise mit Hilfe der Euler'schen Formeln die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

59. Man bestimme die ersten Glieder (bis  $x^5$ ) der Taylor'schen Reihe für  $x^2 \cot x$ .

60. Bei Absorptionen, Destillationen und Extraktionen spielt die Funktion

$$y = \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1}$$

eine Rolle. Wenn wir z. B. eine Absorptionskolonne mit  $n$  theoretischen Böden betrachten, dann bedeutet  $y$  die relative Abnahme der Konzentration und  $x$  eine dem Verhältnis des reinen Lösungsmittels zur Gasmenge proportionale Größe.

Die Funktion ist für  $n = 0, 1, 2$  graphisch darzustellen.

61. Bringt man einen Körper der Temperatur  $t_0$  in einen Raum der Temperatur  $t_1$ , so beträgt die Temperatur  $t$  des Körpers nach  $\tau$  Sekunden  $t = t_1 + (t_0 - t_1)e^{-k\tau}$  ( $k$  ist eine positive Konstante). Was kann man aus der angegebenen Gleichung entnehmen?

*Anleitung:* Man skizziere die Funktion  $t(\tau)$  für  $t_0 < t_1$  und für  $t_0 > t_1$ .

62. Eine Lösung ist  $p$  kg schwer und enthält  $c_0$  kg gelöstes Salz pro kg Lösung. Die Lösung wird  $n$ -mal hintereinander mit  $\frac{w}{n}$  kg Wasser verdünnt, und zwar so, dass jeweils  $\frac{w}{n}$  kg Wasser zur Lösung dazugegeben und sodann die Lösung wieder auf  $p$  kg abgegossen wird.

Wie groß ist (näherungsweise) die Konzentration der Lösung nach dem  $n$ -ten Mal Verdünnen, falls  $n$  sehr groß ist?

*Hinweis:* Bezeichne  $c_k$  die Salzkonzentration in der Lösung nach dem  $k$ -ten Abgießen,  $k = 1, \dots, n$ . Man stelle einen Zusammenhang zwischen  $c_k$  und  $c_{k+1}$  her. Für den Grenzprozess  $n \rightarrow \infty$  verwende man  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

63. Man berechne *ohne* Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$$

*Hinweis:* Reihenentwicklung.

64. Man berechne *ohne* Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x - \sin x} = ?$$

*Hinweis:* Reihenentwicklung.

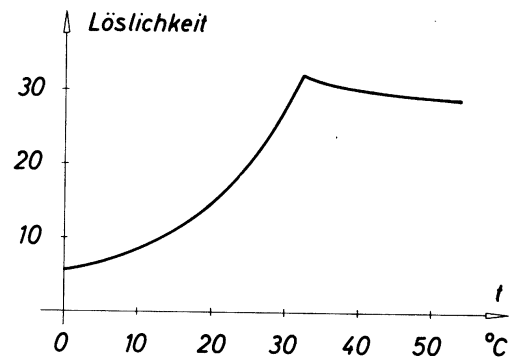
65. In einem Standzylinder mit der Basisfläche  $q \text{ cm}^2$  befindet sich Kupfersulfat. Dieses wird mit Wasser überschichtet. Durch Diffusion wird sich das Kupfersulfat in das Wasser ausbreiten, und zwar so, dass die Verteilung in jeder horizontalen Ebene konstant ist.

Man berechne die Konzentration des Kupfersulfats in einer horizontalen Ebene, welche sich  $x_0 \text{ cm}$  über der Basisfläche befindet, unter der Voraussetzung, dass jene Funktion  $f(x)$  bekannt ist, die die Menge des Kupfersulfats zwischen der Basisfläche und einer horizontalen Ebene, welche sich  $x \text{ cm}$  über der Basisfläche befindet, angibt.

66. Die Löslichkeit von Natriumsulfat in Wasser (in g wasserfreier Substanz pro 100 g Lösung) ist eine stetige Funktion der Temperatur (in  $^\circ\text{C}$ ). Diese ist in Abbildung 10 im Intervall  $[0, 50]$  dargestellt. Man ermittle graphisch den Temperaturkoeffizienten der Löslichkeit im Intervall  $[0, 50]$ . Was passiert bei  $32,4 \text{ }^\circ\text{C}$  (jener Stelle, bei der die Löslichkeitskurve eine „Ecke“ hat)?

*Hinweis:* Der Temperaturkoeffizient der Löslichkeit ist die Ableitung der Funktion nach der Temperatur.

Abbildung 10:



67. Bei einem monomolekularen Zerfall mit autokatalytischer Beschleunigung bezeichne  $x$  die in der Zeit  $t$  zerfallende Menge,  $a$  die Anfangsmenge der zerfallenden Substanz und  $k_u$  bzw.  $k$  die Geschwindigkeitskonstanten des unkatalysierten bzw. des katalysierten Reaktionsanteils. Dann gilt

$$x = \frac{ak_u(e^{(ak+k_u)t} - 1)}{ak + k_u e^{(ak+k_u)t}}.$$

Man berechne die Reaktionsgeschwindigkeit des Zerfalls.

68. Die Zustandsgleichung für  $\text{CO}_2$  bei  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  lautet:

$$\left(p + \frac{3,609}{V^2}\right)(V - 0,04257) = 22,4.$$

Man berechne  $\frac{dV}{dp}$

- mit Hilfe der Ableitung der inversen Funktion,
- durch „implizites“ Differenzieren.

69. Man berechne die folgenden Grenzwerte unter Zuhilfenahme der Regel von de l'Hospital:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
70. (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot 2x}{\cot x}$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$
71. Das durch das magnetische Feld  $H$  induzierte magnetische Moment  $M$  ist gegeben durch

$$M = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{x},$$

wobei  $x = k \frac{H}{T}$  mit einer positiven Konstanten  $k$  und der absoluten Temperatur  $T$ .

Man bestimme die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow 0} M$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} M$ .

72. Nach dem Ostwald'schen Verdünnungsgesetz gilt für die Dissoziationskonstante  $K$  die Gleichung

$$K = \frac{\Lambda^2 \cdot c}{\Lambda_\infty (\Lambda_\infty - \Lambda)}.$$

Hierbei ist  $c$  die Konzentration des Elektrolyten,  $\Lambda_\infty$  eine positive Konstante und wir setzen weiters die Beziehung  $\Lambda = \Lambda_\infty \cdot e^{-c}$  voraus. Wie groß ist die Dissoziationskonstante  $K$

- (a) in einem unendlich verdünnten System (d. h. wenn die Konzentration  $c$  gegen 0 konvergiert),  
 (b) wenn die Konzentration sehr hoch ist (hier ist der Grenzwert für  $c$  gegen  $\infty$  zu berechnen)?
73. Man gebe die *vollständige* Taylor-Reihenentwicklung der Funktion  $\ln(1 + x)$  im Punkt  $x_0 = 0$  an. Mit Hilfe des Lagrange'schen Restgliedes schätze man für die Werte  $x = -0,5$  und  $x = 0,5$  den jeweiligen Fehler ab, falls man die Reihe nach der 3. Potenz abbricht.
74. Man bestimme das Taylorpolynom  $T_4(x)$  und das zugehörige Restglied  $R_4(x)$  der Funktion  $f(x) = \ln x$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 1$ . Wie hängen  $f(x)$ ,  $T_4(x)$  und  $R_4(x)$  zusammen? Weiters werte man  $T_4(x)$  an der Stelle  $x = 1,3$  aus und gebe durch Abschätzung von  $R_4(1,3)$  ein Intervall an, in dem  $\ln 1,3$  liegt.
75. Man bestimme die Taylorentwicklung  $T_3(x)$  der Funktion  $f(x) = e^x \cdot \sin x$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$  bis inklusive Grad drei in  $x$  und gebe das zugehörige Restglied  $R_3(x)$  in Lagrange'scher Form an. Weiters erläutere man den Zusammenhang zwischen  $f(x)$ ,  $T_3(x)$  und  $R_3(x)$  und schätze mit Hilfe von  $R_3(x)$  den Approximationsfehler bei Ersetzung von  $f(x)$  durch  $T_3(x)$  an der Stelle  $x = 0,5$  ab.  
 Wie lautet die vollständige Taylorentwicklung von  $f(x)$  bei  $x_0 = 0$ , für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert sie?
76. Man bestimme die Taylorentwicklung  $T_3(x)$  der Funktion  $f(x) = \sin x + \cos x$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$  bis inklusive der dritten Potenz von  $x - x_0$  und gebe das Restglied  $R_3(x)$  an. Durch Abschätzung des Restglieds  $R_3(x)$  zeige man weiters, dass für alle  $x$  mit  $|x| \leq 1$  gilt:

$$|f(x) - T_3(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{24}$$

(Hinweis: Bei der Abschätzung beachte man  $|\sin \alpha + \cos \alpha| \leq \sqrt{2}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ . — Warum gilt das?)

77. Man bestimme die Taylorentwicklung 2. Ordnung  $T_2(x)$  der Funktion  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 1$ . Weiters gebe man das zugehörige Restglied  $R_2(x)$  an, schätze mit Hilfe des Restglieds den Fehler bei der Approximation von  $f(x)$  durch  $T_2(x)$  an der Stelle  $x = 1,1$  ab und vergleiche die Abschätzung mit dem tatsächlichen Approximationsfehler  $|f(1,1) - T_2(1,1)|$ .

78. Man ermittle das Taylorpolynom  $T_3(x)$  dritten Grades zur Funktion

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ . Weiters gebe man das zugehörige Restglied  $R_3(x)$  an. An der Stelle  $x_1 = 0,4$  berechne man  $T_3(x_1)$ , bestimme das Vorzeichen von  $R_3(x_1)$  und gebe eine obere Schranke  $\alpha$  für  $|R_3(x_1)|$  an, d. h.  $|R_3(x_1)| \leq \alpha$ . Was kann man daraus für den Wert  $f(x_1)$  folgern?

79. Man ermittle das  $n$ -te Taylorpolynom  $T_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , zur Funktion  $f(x) = e^x$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$ . Weiters berechne man das zugehörige Restglied  $R_n(x)$  in Lagrangescher Form und gebe den Zusammenhang zwischen  $f(x)$ ,  $T_n(x)$  und  $R_n(x)$  an. Inwiefern kann  $|R_n(x)|$  als Approximationsfehler interpretiert werden?

Für die Stelle  $x_1 = 1$  gebe man  $T_n(x_1)$  an und bestimme ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $|R_n(x_1)| \leq 10^{-8}$ . Was kann man daraus für den Wert  $f(x_1) = e$  folgern?

80. Man bestimme die Taylorentwicklung der Funktion  $f(x) = \arctan(x)$  im Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  bis einschließlich der dritten Potenz von  $x - x_0$  und gebe das zugehörige Restglied  $R_3(x)$  an.

81. Man zeige: Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der Form  $g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0 + \vartheta h) \cdot h$  mit  $0 < \vartheta < 1$  auf die Funktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x_0 + h - x)^k$$

an, so erhält man die Taylor'sche Formel mit einer — im Vergleich zur Vorlesung — anderen Darstellung für das Restglied (das sogenannte Cauchy'sche Restglied).

*Hinweis:* Man behandle jeweils die Terme für  $k = 0$  gesondert.

82. Man bestimme die Potenzreihenentwicklung  $a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots$  der Funktion  $f(x) = e^x \sin x$  an der Entwicklungsstelle  $x_0 = 0$  bis einschließlich der fünften Potenz von  $x - x_0$  auf zwei Arten:

(a) durch Bildung des Cauchy-Produkts der beiden als bekannt vorausgesetzten Reihenentwicklungen von  $e^x$  und  $\sin x$ ,

(b) durch Ableiten von  $f(x)$  und Einsetzen in die Formel der Taylor-Reihe.

Bei (b) kann ein Bildungsgesetz für die Ableitungen von  $f(x)$  aufgestellt werden (Hinweis: man vergleiche die vierte Ableitung  $f^{(4)}(x)$  mit  $f(x)$ ). Mit dessen Hilfe bestimme man weiters die Koeffizienten  $a_{20}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  und  $a_{23}$  in der Potenzreihenentwicklung.

83. Bei der Bestimmung des Strahlungsmaximums eines schwarzen Körpers spielt folgende Funktion  $g(x)$  eine wichtige Rolle:

$$g(x) = \frac{x \cdot e^x}{e^x - 1} - 5$$

Man zeige, dass  $g(x)$  genau eine Nullstelle  $\bar{x} > 0$  besitzt. Dazu gehe man wie folgt vor:

- (a) Man berechne  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ .
- (b) Man zeige, dass  $g(x)$  für  $x > 0$  streng monoton wachsend ist. (Hinweis: Man beachte, dass  $e^x - 1 - x > 0$  für  $x > 0$ . Warum gilt das?)
- (c) Man argumentiere die Existenz und Eindeutigkeit der Nullstelle  $\bar{x} > 0$  von  $g(x)$ .

84. Man betrachte die Funktion Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

und behandle folgende Punkte:

- (a) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\tanh(x)$  definiert, wo ist diese Funktion stetig bzw. differenzierbar? (Wir nennen den maximalen Definitionsbereich in der Folge  $D$ .)
- (b) Man zeige, dass für alle  $x \in D$  gilt  $-1 < \tanh(x) < 1$  und dass jeder Wert im offenen Intervall  $(-1, 1)$  genau einmal als Funktionswert angenommen wird (Anleitung: Man zeige, dass  $\tanh(x)$  für alle  $x \in D$  streng monoton wachsend ist, berechne  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x)$  (hierbei den Bruch mit  $e^x$  bzw.  $e^{-x}$  erweitern!), und argumentiere.)
- (c) Man zeige, dass die Umkehrfunktion von  $y = \tanh(x)$  für  $x \in D$ , der sogenannte Areatangens hyperbolicus, gegeben ist durch  $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$  und bestimme Definitionsbereich und Wertebereich der Umkehrfunktion.
- (d) Man skizziere die Funktion  $y = \tanh(x)$ .
85. Wendet man das Massenwirkungsgesetz auf wässrige Lösungen von Laugen oder Säuren an, so findet man, dass für die Konzentration  $[\text{H}^+]$  der Wasserstoffionen und die Konzentration  $[\text{OH}^-]$  der Hydroxylionen bei 25 °C gilt:  $[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14} \text{ mol}^2/\text{l}^2$ . Man zeige auf graphischem Weg, dass es eine Wasserstoffionenkonzentration gibt, bei der die Summe  $[\text{H}^+] + [\text{OH}^-]$  ein Minimum ist, und berechne dieses Minimum.
86. Betrachtet man die zweistufige, reversible, adiabatische Gaskompression vom Anfangsdruck  $p_1$  bis zum Enddruck  $p_3$ , so besteht die Ermittlung der optimalen Arbeitsbedingung in der Bestimmung desjenigen Zwischendruckes  $p_2$ , für den der Arbeitsaufwand am niedrigsten ist. Ist die Anfangstemperatur des zu komprimierenden Gases  $T_1$ , dann wird die Arbeit durch die Formel

$$W = nRT_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 2 + \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

ausgedrückt. Dabei bedeutet  $W$  die Arbeit in J,  $n$  die Menge des zu komprimierenden Gases in Mol,  $R$  die Gaskonstante in J/Grad·Mol und  $\kappa$  das Verhältnis der Wärmekapazität bei konstantem Druck zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen ( $\kappa > 1$ ). Die Angabe der Temperatur  $T_1$  bezieht sich auf K.

Man ermittle den optimalen mittleren Druck bei der Kompression.

87. Das Sulfieren und Chlorieren organischer Verbindungen vollzieht sich häufig unter Lichteinwirkung. Über einer Fläche sei eine punktförmige Lichtquelle  $Q$  angebracht, deren senkrechte Projektion auf die Fläche der Punkt  $Q'$  sei. Während  $Q'$  fest sei, sei der Abstand  $\overline{QQ'}$  (entlang der auf die Fläche senkrechten Geraden durch  $Q'$ ) veränderbar. Wie muss die Entfernung  $\overline{QQ'}$  gewählt werden, damit die Bestrahlung eines vorgegebenen Flächenpunktes  $P$ , welcher verschieden von  $Q'$  ist, einen Maximalwert erreicht?

*Anleitung:* Die Beleuchtungsstärke eines Flächenpunktes ist umgekehrt proportional dem Quadrat seiner Entfernung von der Lichtquelle und direkt proportional dem Kosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen zur Normalen der beleuchteten Fläche.

88. Ein Stickstoffmonoxyd enthaltendes inertes Gas wird mit Luft vermischt. Es ist festzustellen, bei welchem prozentuellen Sauerstoffgehalt des sich ergebenden Gasgemisches die Oxydationsgeschwindigkeit des Stickstoffmonoxyds (am Anfang) maximal ist, und wie groß das Luftvolumen ist, das zugegeben werden muss, damit das Gemisch mit der erforderlichen Sauerstoffmenge angereichert wird.

*Hinweis:* Für die Reaktionsgeschwindigkeit  $v$  von  $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}_2$  gilt:  $v = k \cdot [\text{NO}]^2 \cdot [\text{O}_2]$ ;  $k$  ist dabei eine positive Konstante.

89. Bezeichne bei einem monomolekularen Zerfall mit autokatalytischer Beschleunigung  $x$  die in der Zeit  $t$  zerfallende Menge,  $a$  die Anfangsmenge der zerfallenden Substanz, und seien  $k_u$  bzw.  $k$  die Geschwindigkeitskonstanten des unkatalysierten bzw. des katalysierten Reaktionsanteils, so gilt für die Reaktionsgeschwindigkeit  $v(t) = x'(t)$  des Zerfalls

$$v(t) = ak_u(ak + k_u)^2 \frac{e^{(ak+k_u)t}}{(ak + k_u e^{(ak+k_u)t})^2}.$$

Dabei sind alle auftretenden Konstanten positiv.

Man zeige, dass die Reaktionsgeschwindigkeit ein Maximum besitzt, und berechne dieses.

90. Nach Maxwell und Boltzmann hängt (unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen) die Zahl  $n$  der bei einer chemischen Reaktion aktivierten reaktionsfähigen Moleküle in einem Mol mit der Gesamtzahl  $N$  aller Moleküle zusammen durch die Gleichung

$$n = N e^{-\frac{Q}{RT}},$$

wobei  $R$  die Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur und  $Q$  die Aktivierungsenergie ist.

Man diskutiere diese Kurve und zeige insbesondere, dass die Zahl der aktivierten Moleküle mit wachsender Temperatur zunächst immer stärker ansteigt, dass es dann aber immer schwerer wird, auch noch den letzten Rest der reaktionsträgen Moleküle zu aktivieren. Bei welchem Prozentsatz aktivierter Moleküle tritt dieser Umschwung etwa ein?

*Hinweis:* Der kritische Punkt für die Änderung des Verhaltens ist jener Temperaturwert  $T_0$ , bei dem die Funktion  $n(T)$  einen Wendepunkt hat.

91. Man diskutiere die Funktion  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Insbesondere untersuche man: Monotonie- und Krümmungsverhalten, Extremwerte und Wendepunkte, Symmetrieeigenschaften, Grenzwerte für  $x \rightarrow 0$  und  $x \rightarrow \pm\infty$ . Man skizziere den Funktionsgraphen von  $f$ .

Weiters definiere man  $f(0)$  so, dass dadurch  $f$  stetig nach  $x = 0$  fortgesetzt wird.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Man zeige, dass damit  $f$  bei  $x = 0$  auch differenzierbar wird und berechne die Ableitung  $f'(0)$ .

92. Man diskutiere die reelle Funktion  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  und behandle dabei insbesondere: (maximaler) Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonieverhalten und Extremwerte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte, Grenzwerte am Rand des Definitionsbereichs. Weiters skizziere man den Funktionsgraphen von  $f$ .

93. Man diskutiere die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$  und behandle dabei insbesondere folgende Punkte: Nullstellen, Monotonieverhalten und Extremwerte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte, Grenzwerte für  $x \rightarrow \pm\infty$ , Skizze des Funktionsgraphen.

94. Beim Maxwellschen Geschwindigkeits-Verteilungsgesetz tritt eine Funktion der Bauart

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$$



auf. Man diskutiere die Funktion  $f(x)$  für  $x \geq 0$  und bestimme dabei insbesondere Nullstellen, Monotonieverhalten, Extremwerte, Krümmungsverhalten, Wendepunkte,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und skizziere den Funktionsgraphen.

95. Mit Hilfe der Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung ermittle man den kritischen Druck und das kritische Molvolumen eines realen Gases.

*Hinweis:* Der kritische Druck und das kritische Molvolumen sind die Koordinaten des Wendepunktes mit horizontaler Tangente auf der Isotherme  $T = \text{kritische Temperatur}$ .

96. Man diskutiere und skizziere den Verlauf des sogenannten Morse-Potentials

$$V(r) = D \left( 1 - e^{-a(r-r_0)} \right)^2,$$

welches häufig zur Beschreibung der Wechselwirkungsenergie in einem diatomaren Molekül herangezogen wird. ( $D$  ist die Dissoziationsenergie,  $r_0$  der Gleichgewichtsabstand im Molekül,  $a$  eine positive Konstante; die Variable  $r$  ist positiv.)

97. Man berechne die Arbeit, die

- (a) ein ideales Gas,
- (b) ein reales Gas

leistet, welches in einem mit einem Kolben versehenen Zylinder eingeschlossen ist, wenn man voraussetzt, dass der Prozess isotherm verläuft.

*Anleitung:* Ist  $q$  die Oberfläche des Kolbens,  $x$  die Entfernung des Kolbens vom Boden des Zylinders und  $p(x)$  der Druck des Gases als Funktion von  $x$ , so ist die Arbeit bei Verschiebung des Kolbens von  $x_1$  nach  $x_2$  gegeben durch  $A = q \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$ .

98. (a) Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme  $c$  (bei konstantem Druck) von der Temperatur  $t$  wird für Benzin durch die Formel  $c = 0,2237 + 0,0010228 t$  wiedergegeben. Man ermittle die mittlere spezifische Wärme von Benzin für das Temperaturintervall von  $116^\circ\text{C}$  bis  $218^\circ\text{C}$ .

*Hinweis:* Als mittlerer Wert von  $c$  kann der Mittelwert aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung genommen werden.

- (b) Es ist die Wärmemenge  $Q$  zu bestimmen, die erforderlich ist, um  $10 \text{ kg}$  Eisen von  $20^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  zu erwärmen, wenn die spezifische Wärme  $c_t$  des Eisens im Temperaturbereich von  $0^\circ\text{C}$  bis  $200^\circ\text{C}$  gegeben ist durch die Funktion  $c_t = 0,1053 + 0,000142 t$ .

*Hinweis:* Bezeichne  $m$  die Masse des Eisens, so ist  $c_t = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt}$  (in  $\text{cal/grad}\cdot\text{g}$ ). Damit erhalten wir  $Q = 10000 \int_{20}^{100} c_t dt$ .

99. In einem Wechselstromkreis erzeuge die Wechselspannung  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  einen um den Winkel  $\varphi$  in der Phase verschobenen Wechselstrom  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . ( $U_0$  ist der Scheitelwert der Wechselspannung,  $I_0$  der Scheitelwert des Wechselstromes,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  die Kreisfrequenz.)

Man berechne die während einer Periode  $T$  erzeugte mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t) dt.$$

100. Die Schichtdicke  $A(\tau)$  einer heißen Schmelze auf einer Drehtrommel ändere sich mit der Zeit  $\tau$  gemäß der Formel  $A(\tau) = \beta e^{-\alpha\tau}$  ( $\alpha, \beta$  Konstante). Zu einem Zeitpunkt  $\tau_1$  wird die Schichtdicke  $A_1$ , zu einem späteren Zeitpunkt  $\tau_2$  die Schichtdicke  $A_2$  gemessen. Man

bestimme die mittlere Schichtdicke  $\bar{A}$  im Zeitintervall  $[\tau_1, \tau_2]$ , wenn man zur Mittelbildung den Mittelwertsatz der Integralrechnung verwendet und stelle  $\bar{A}$  mit Hilfe von  $A_1$  und  $A_2$  dar (das ist möglich ohne  $\tau_1, \tau_2, \alpha$  oder  $\beta$  zu verwenden).

101. Die Luft eines 30 m langen, 30 m breiten und 12 m hohen Werkraumes enthalte 0,12 % Kohlendioxyd. Wieviel Frischluft muss je Minute zugeführt werden, damit der Gehalt an Kohlendioxyd nach 10 Minuten auf 0,06 % gesunken ist? Die Konzentration des Kohlendioxyds in der Frischluft betrage dabei 0,04 %, und es werde angenommen, dass sich die Frischluft sofort mit der verunreinigten Luft vermischt.
102. Ein Körper habe die Temperatur  $t_1$  und das ihn umgebende Medium die konstante Temperatur  $t_0$ , wobei  $t_0 < t_1$  sei. Es soll ermittelt werden, nach welchem Gesetz sich dieser Körper mit der Zeit abkühlt.

*Anleitung:* Für die Abnahme der Wärme  $Q$  des Körpers mit der Zeit  $\tau$  gilt:  $\frac{dQ}{d\tau} = -k(t-t_0)$ . Darin sind  $t$  die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt  $\tau$  und  $k$  eine positive Konstante. Nehmen wir die spezifische Wärme  $c$  des Körpers im Intervall  $[t_0, t_1]$  als konstant an, so ist die vom Körper während seiner Abkühlung von  $t$  auf  $t_0$  Grad abgegebene Wärmemenge, wenn  $m$  die Masse des Körpers bezeichnet, gleich  $mc(t-t_0)$ .

103. Die katalytische Zersetzung von  $N_2O$  am Platinkontakt wird durch den beim Zerfall gebildeten Sauerstoff gehemmt. Bezeichnet  $x(t)$  die zur Zeit  $t$  zerfallene  $N_2O$ -Menge und  $a$  die Anfangsmenge an  $N_2O$ , so gilt für die zeitliche Änderung der  $N_2O$ -Menge

$$-\frac{d}{dt}(a-x) = \frac{k(a-x)}{1+bx}.$$

Dabei sind  $k$  und  $b$  Konstanten ungleich 0.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $x$  und  $t$  ?

104. Die effektive Stromstärke  $i_{eff}$  eines Wechselstromes ist definiert als die Stärke desjenigen Gleichstromes, der, durch denselben Widerstand  $R$  wie der zu untersuchende Wechselstrom fließend, während einer Periode  $\tau$  des Wechselstromes die gleiche elektrische Arbeit wie der Wechselstrom leistet, d. h., es ist

$$i_{eff}^2 R \tau = \int_0^\tau R i^2 dt,$$

worin  $i$  ist die Stromstärke des Wechselstromes bedeutet.

Man berechne die effektive Stromstärke eines sinusförmigen Wechselstromes, d. i. ein Wechselstrom, für den gilt:  $i = i_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} t$ .

105. Man berechne die isotherme Ausdehnungsarbeit  $W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$  ( $V_2 > V_1$ )

(a) für ein Van der Waal'sches Gas:  $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$ ,

(b) für ein Clausius'sches Gas:  $(p + \frac{A}{T(V+C)^2})(V - B) = RT$

( $p$  = Druck,  $V$  = Volumen,  $T$  = absolute Temperatur,  $R$  = allgemeine Gaskonstante,  $a, b, A, B, C$  sind artspezifische Konstanten).

106. (a) Man berechne *ohne* Ausmultiplizieren des Integranden:  $\int (3x+1)^4 dx = ?$

(b)  $\int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$

Bei dieser und allen folgenden Integrationsaufgaben soll unbedingt auch die (maximal mögliche) Definitionsmenge bestimmt werden!

107.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = ?$

*Hinweis:* Man substituiere  $x = \tan t$ .

108.  $\int \arcsin x \, dx = ?$

109.  $\int x^2(\ln x)^3 \, dx = ?$

110. Man zerlege die Funktion

$$g(x) = \frac{x-2}{x^2(x^2+1)}$$

in Partialbrüche und berechne  $\int g(x) \, dx$ .

111.  $\int \frac{1}{x^2(x-1)} \, dx = ?$

112.  $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} \, dx = ?$

113. Man zerlege die Funktion

$$f(x) = \frac{-x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{x \cdot (x+1) \cdot (x^2+1)}$$

in Partialbrüche und berechne anschließend  $\int f(x) \, dx$ .

114. Man bestimme die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

und berechne das Integral  $\int_0^1 f(x) \, dx$ .

115. Sei  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + x & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -\frac{\pi}{2} - x & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$  und  $f(x + 2k\pi) = f(x)$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .

Man entwickle  $f(x)$  in eine Fourierreihe.

*Hinweis:* Die Formeln für die Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  entnehme man der Formelsammlung. Hier gilt zudem  $b_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Warum?

116. Man entwickle die Funktion  $f(x) = |\sin x|$  für  $x \in \mathbb{R}$  (kommutierter Sinusstrom) in eine Fourierreihe.

*Hinweis:* Siehe Hinweis zu Aufgabe 114. Hier gilt ebenfalls  $b_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Warum?

117. Ein radioaktiver Stoff ergebe zwei (selbst nicht weiter zerfallende) Zerfallsprodukte, von denen jedes mit verschiedener Geschwindigkeit entstehe. Die Bildungsgeschwindigkeit eines jeden Zerfallsproduktes ist der jeweiligen Menge des Ausgangsstoffes proportional, und jedes Zerfallsprodukt wird unmittelbar aus dem Ausgangsstoff erhalten.

Man bestimme die jeweiligen Mengen  $x(t)$  und  $y(t)$  der Zerfallsprodukte zur Zeit  $t$ , wenn die ursprüngliche Menge des Ausgangsstoffes 10 g beträgt und nach 3 Tagen für die beiden Zerfallsprodukte die Mengen 4 g bzw. 1 g gemessen werden.

118. Für eine irreversible Reaktion vom Typ  $A+B+C \rightarrow$  Produkte, bei der alle Teilreaktionen von 1. Ordnung sind und deren Geschwindigkeitskonstante  $k$  bekannt ist, stelle man die Differentialgleichung für den Umsatz  $x(t)$  auf und löse sie für den Fall, dass die Ausgangskonzentrationen von A, B und C gleich  $a$ ,  $b$  bzw.  $c$  sind ( $a < b < c$ ). Ferner bestimme man jenen Zeitpunkt  $\tau$ , bei dem  $x = 0,5 a$  ist.

119. Für eine Reaktion vom Typ  $A \rightarrow \text{Produkte}$  mit Reaktionsordnung 2 und Anfangskonzentration  $c_A(0) = c_{A_0} > 0$  von  $A$  stelle man die Differentialgleichung für den Umsatz  $x(t)$  von  $A$  zur Zeit  $t$  auf und bestimme  $x(t)$ . Weiters berechne man  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ .

120. Für eine vollständig ablaufende Reaktion  $n$ -ter Ordnung vom Typ  $A \rightarrow \text{Produkte}$  bestimme man den Umsatz  $x_n(t)$  von Stoff  $A$  als Funktion der Zeit  $t$  in den Fällen  $n = 1$  und  $n = 2$ . Die Ausgangskonzentration von  $A$  werde jeweils mit 1 mol/l angenommen. In beiden Fällen ist die Differentialgleichung für den Umsatz  $x_n(t)$  aufzustellen und zu lösen.

In welchem Fall wird der Stoff  $A$  für große  $t$ -Werte schneller umgesetzt, d. h. welche der beiden Konzentrationen  $x_1(t)$  bzw.  $x_2(t)$  konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  schneller gegen 1? Man untersuche dazu den Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-x_1(t)}{1-x_2(t)}$ .

121. Für eine gewisse Reaktion gelte für den Umsatz  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$

$$\frac{dx}{dt} = 3(2-x)(1-x) - (1+x)(2+x).$$

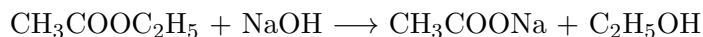
Unter der Voraussetzung, dass  $x(0) = 0$  ist, berechne man  $x(t)$ . Ab welchem Wert von  $x$  nimmt  $x$  nicht mehr mit der Zeit zu? Wie groß ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ ?

122. Bei einer chemischen Reaktion gelte für den Umsatz  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t \geq 0$ :

$$x' = (1-x)^2 + 2(1-x), \quad x(0) = 0$$

Man bestimme  $x(t)$  und berechne  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ .

123. Die Verseifung von Äthylazetat durch Natronlauge



wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$-\frac{d}{dt}(a-x) = \frac{k}{v}(a-x)(b-x)$$

Hierbei bedeutet  $x(t)$  die verseifte Estermenge bzw. verbrauchte Laugenmenge zum Zeitpunkt  $t$ ,  $v$  das Reaktionsvolumen,  $a$  die Anfangsmenge des Esters,  $b$  die Anfangsmenge der Lauge und  $k$  eine positive Konstante. Man ermittle den zeitlichen Ablauf  $x(t)$  der Esterverseifung für den Fall  $a \neq b$  und  $x(0) = 0$ .

124. Bei der Extraktion des Schwefels aus 25 g einer 52 % Schwefel enthaltenden Gasreinigungsmasse mit 100 g siedendem Benzol wurde zu verschiedenen Zeitpunkten die Konzentration des Schwefels im Benzol gemessen:

Zeit in min	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Konzentration des Schwefels in g pro 100 g Benzol	0	2,15	3,40	4,32	5,10	5,73	6,32	6,78	7,04	7,42

Die Löslichkeit des Schwefels in Benzol beträgt bei der Siedetemperatur 11,7 g pro 100 g Benzol.

Auf Grund der gefundenen Messdaten überprüfe man die Annahme, dass die Abnahme der Menge des ungelösten Schwefels mit der Zeit sowohl der jeweiligen Menge des ungelösten Schwefels als auch der jeweiligen Differenz aus Sättigungskonzentration und Konzentration proportional ist.

125. Für eine vollständig ablaufende Reaktion  $n$ -ter Ordnung vom Typ  $A \rightarrow$  Produkte werden für die Konzentration  $c_A$  von A (in mol/l) folgende Werte nach  $t = 0, 1, 10$  Minuten gemessen:

$$c_A(0) = 0,1 \quad c_A(1) = 0,05 \quad c_A(10) = 0,01$$

Von welcher Ordnung  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ , wird die Reaktion am ehesten sein?

126. Für eine vollständig ablaufende Reaktion  $n$ -ter Ordnung vom Typ  $A \rightarrow$  Produkte werden für die Konzentration  $c_A$  von A folgende Werte nach  $t = 0, 1, 10, 20$  Minuten gemessen:

$$c_A(0) = 1 \text{ mol/l}, \quad c_A(1) = 0,913 \text{ mol/l}, \quad c_A(10) = 0,580 \text{ mol/l}, \quad c_A(20) = 0,449 \text{ mol/l}.$$

Von welcher Ordnung  $n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , wird die Reaktion am ehesten sein? Zu welchem Zeitpunkt  $T$  wird die Konzentration  $c_A(T) = 0,1$  mol/l betragen?

127. Bei der Hydrolyse von 5,11 g Dibrombernsteinsäure wurde bei einer bestimmten Wassertemperatur zu verschiedenen Zeiten die jeweilige Menge an noch vorhandener Säure bestimmt. Die Messung ergab dabei folgende Werte:

Zeit in min	0	10	20	30	40	50	60
Säuremenge in g	5,11	3,77	2,74	2,02	1,48	1,08	0,80

Auf Grund der vorliegenden Messwerte ist die Frage zu erörtern, ob es sich bei der untersuchten Reaktion um eine Reaktion 1. Ordnung handeln kann.

128. (a)  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = ?$   
 (b)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = ?$   
 (c)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5} = ?$

129. Man berechne das uneigentliche Integral  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$ .

Hinweis: Man bestimme zuerst das unbestimmte Integral  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$  durch Partialbruchzerlegung. Bei der Partialbruchzerlegung ist die Substitution  $x^2 = u$  nützlich.

130. Für  $x > 0$  gibt es Konstanten  $K_1, K_2, \alpha$  mit  $\alpha < 1$ , sodass

$$e^{-t}t^{x-1} \leq K_1t^{-\alpha} \quad \text{für } 0 < t \leq 1 \quad \text{und} \quad e^{-t}t^{x-1} \leq K_2t^{-2} \quad \text{für } t \geq 1.$$

Aus diesem Sachverhalt leite man die Konvergenz des  $\Gamma(x)$  für  $x > 0$  definierenden uneigentlichen Integrals ab.

131. Man betrachte die Gamma-Funktion  $\Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{a-1} dt$ ,  $a > 0$ , und zeige:

- (a)  $\Gamma(1) = 1$ ,  
 (b)  $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$  für alle  $a > 0$ ,  
 (c)  $\Gamma(a+1) = a!$  für alle positiven ganzzahligen Werte von  $a$ .

Anleitung: Bei (b) starte man mit  $\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^a dt$  und integriere partiell, bei der Auswertung der integrierten Funktion an der oberen Integrationsgrenze „ $t = \infty$ “ argumentiere man, warum dieser Ausdruck den Wert 0 ergibt; bei (c) bestimme man mit Hilfe der Rekursion (b) die Werte  $\Gamma(2), \Gamma(3), \dots$  und argumentiere dann den allgemeinen Fall.