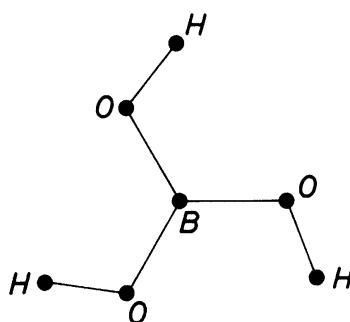


# Mathematik für TCH Übung I

---

- Man gebe alle Elemente der  $S_4$  an. Begründung?
  - Wie viele Elemente hat  $S_n$  für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$ ? Begründung?
- Sei  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  eine Permutation aus  $S_4$ . Man bestimme  $g^{-1}$  und zeige, dass  $g^{-1}$  unter den positiven Potenzen von  $g$ , d. h. unter den Elementen  $g, g^2 = g \circ g, g^3 = g \circ (g \circ g), \dots$  vorkommt.
  - Bezeichne  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$  die ganzen Zahlen mit der Addition. Man bestimme alle positiven Vielfachen von 1, d. h.  $1, 1 + 1, 1 + (1 + 1), \dots$ . Kommt das Inverse von 1 bezüglich  $+$  unter diesen Elementen vor?
- Man bestimme alle Untergruppen der  $S_3$  mit 1, 2 bzw. 3 Elementen. Begründung?  
*Hinweis:* Unter einer Untergruppe der  $S_3$  versteht man eine Teilmenge  $M \subseteq S_3$ , sodass für alle  $x, y$  aus  $M$  gilt:  $x \circ y$  und  $x^{-1}$  sind auch aus  $M$ .
- Man zeige, dass es bei einer Drehspiegelung (d. h. bei einer Zusammensetzung einer Spiegelung und einer Drehung um den Winkel  $\varphi$  mit Drehachse *senkrecht* zur Spiegelungsebene) nicht darauf ankommt, ob zuerst gespiegelt und dann gedreht bzw. zuerst gedreht und dann gespiegelt wird. Gilt das für eine *beliebige* Zusammensetzung einer Spiegelung und einer Drehung?  
*Anleitung:* Man wähle ein rechtwinkeliges Koordinatensystem mit  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Achse so, dass die Spiegelungsebene die  $xy$ -Ebene ist, und überlege jeweils, wie die Drehspiegelung auf die Einheitsvektoren in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung wirkt. Für die Anschlussfrage drehe man anstatt um die  $z$ -Achse z. B. um die  $x$ -Achse.
- Man bestimme die Symmetriegruppe des Borsäuremoleküls.

Abbildung 1:



*Hinweis:* Das Borsäuremolekül ist ein ebenes Molekül, welches als die in der Abbildung 1 wiedergegebene (ebene) Figur aufgefasst werden kann.

- Man bestimme die Symmetriegruppe des Methanmoleküls.  
*Hinweis:* Wir fassen das Methanmolekül als ein regelmäßiges Tetraeder auf, in dessen vier Eckpunkten die H-Atome liegen und dessen Mittelpunkt das C-Atom ist (Abbildung 2).

Abbildung 2:

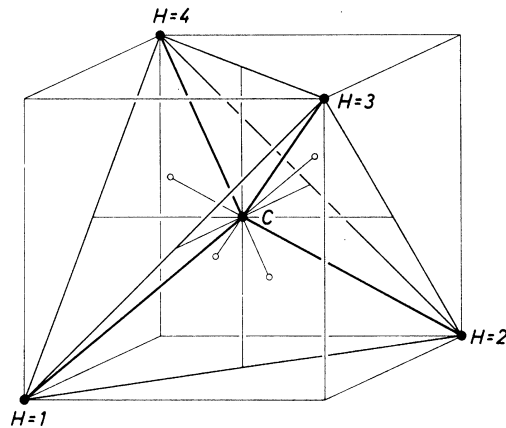
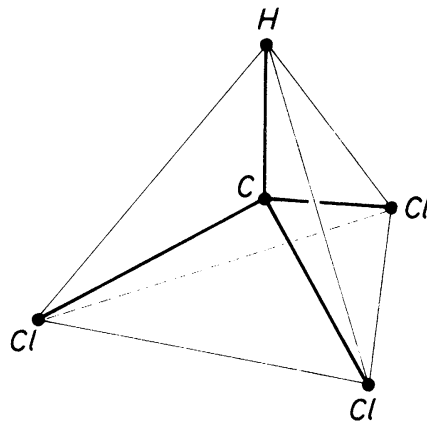
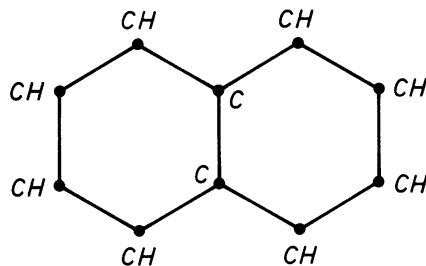


Abbildung 3:



7. Man zeige, dass die Symmetriegruppe des Ammoniak-Moleküls und die Symmetriegruppe des Chloroform-Moleküls (Abbildung 3) isomorph (d. h. bis auf die Bezeichnung der Elemente gleich) sind.
8. Man ermittle die Symmetriegruppe des Naphthalins (Abbildung 4); insbesondere gebe man alle Produkte von je zwei Symmetrieoperationen in Form einer Tabelle (Operationstafel der Symmetriegruppe) an.
9. Man zeige, dass das neutrale Element und zu jedem Element das inverse Element in einer Gruppe eindeutig bestimmt sind.
10. Sei  $\langle G, \circ \rangle$  eine endliche Gruppe und  $g \in G$ . Man zeige, dass es eine positive ganze Zahl  $n$  gibt mit  $g^{-1} = g^n$ .  
*Anleitung:* Man überlege zunächst, dass es Zahlen  $m_1 \neq m_2$  gibt, sodass  $g^{m_1} = g^{m_2}$ , daraus folgere man die Existenz von  $m$  mit  $g^m = e$  ( $e$  das neutrale Element von  $G$ ), woraus sich dann  $g^{-1} = g^{m-1}$  ergibt.
11. Sei  $\mathbb{C} = \langle \mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$  mit  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  und  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ . Man zeige, dass  $\mathbb{C}$  ein Körper ist.

Abbildung 4:



12. (a)  $(-1 + \sqrt{3}i)^{10} = ?$   
(b)  $\frac{(3-4i)^3}{1+2i} = ?$
13.  $\sqrt[3]{(7-2i)^2} = ?$
14. Für eine endliche Menge  $M$  bezeichne  $|M|$  die Anzahl der Elemente von  $M$ . Seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen. Man begründe die Formel

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Wie sieht die entsprechende Formel für drei Mengen  $A, B, C$  aus:

$$|A \cup B \cup C| = ?$$

*Hinweis:* Man verwende Mengendiagramme.

15. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig gewählte Zahl aus  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  durch 3 oder durch 5 teilbar ist, wobei jede Zahl aus  $\Omega$  mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird.  
*Anleitung:* Man betrachte die Ereignisse  $A$ : Zahl ist durch 3 teilbar,  $B$ : Zahl ist durch 5 teilbar und verwende das Additionstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie.
16. Sei  $P$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Ereignisfeld  $F(\Omega)$  und  $A \in F(\Omega)$ . Man zeige mit Hilfe der Eigenschaften von  $P$  aus der Vorlesung, dass für das komplementäre Ereignis  $A' = \Omega - A$  von  $A$  gilt

$$P(A') = 1 - P(A).$$

17. Ein Versuch habe 3 mögliche Ausgänge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , und bezeichne  $A$  das Ereignis  $\{\omega_1, \omega_2\}$  bzw.  $B$  das Ereignis  $\{\omega_2, \omega_3\}$ . Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  sei bekannt, dass

$$P(A) = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2}.$$

Wie groß ist  $P(\{\omega_2\})$ ? Man berechne  $P(A|B)$  und  $P(B|A)$ . Sind  $A$  und  $B$  unabhängig?

18. Man führe die Polynomdivision  $(x^3 - 2x^2 + 3x + 1) : (x^2 + 1)$  durch.

*Anleitung:* Man verfare in Analogie zu folgendem Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{1.Schritt :} \quad (x^2 - 2x \quad -5) : (x + 1) = x \\ \quad \quad \quad -(x^2 + x) \\ \hline \quad \quad \quad -3x \quad -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{2.Schritt : } \quad (x^2 \quad -2x \quad -5) : (x + 1) = x - 3 \\
 \underline{-(x^2 \quad +x)} \\
 \quad \quad -3x \quad -5 \\
 \quad \quad \underline{-(-3x \quad -3)} \\
 \quad \quad \quad \quad -2
 \end{array}$$

Man reduziert die höchste auftretende Potenz im Zählerpolynom (durch Multiplizieren des Nennerpolynoms mit einer entsprechenden Potenz von  $x$  und anschließender Subtraktion) so lange, bis das verbleibende Polynom einen echt kleineren Grad als das Nennerpolynom hat. Da in diesem Fall das Restpolynom  $-2$  nach dem zweiten Schritt echt kleineren Grad als  $x + 1$  hat, lautet das Ergebnis der Division

$$\frac{x^2 - 2x - 5}{x + 1} = x - 3 + \frac{-2}{x + 1} .$$

19. Sei  $\alpha$  eine komplexe Zahl und  $p(x)$  ein Polynom. Man zeige: Ist  $\alpha$  eine Nullstelle von  $p(x)$ , so bleibt bei der Polynomdivision  $p(x) : (x - \alpha)$  der Rest 0. Gilt auch der Umkehrschluss?
20. Man berechne alle Nullstellen von  $p(x)$  und schreibe  $p(x)$  als Produkt von Linearfaktoren:
- (a)  $p(x) = x^2 + 2x + 2$   
 (b)  $p(x) = x^3 - 2x - 4$   
 (c)  $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$
21. Ausschließlich mittels der Grenzwertmethode zerlege man die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x(x - 1)(x + 2)(x + 5)}$$

in Partialbrüche.

22. Man zerlege die Funktion

$$f(x) = \frac{x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 10x^2 + 18x - 4}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}$$

in Partialbrüche. Kann dabei die Grenzwertmethode angewendet werden?

23. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$  ?
24. Konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{\cos nx}{2})^n}$  ?
25. Konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$  ?
26. Man beweise:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)} = -1$ .
27. Man beweise die *Divergenz* von  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+nb}$  für  $a, b > 0$ .
28. Lässt man linear polarisiertes gelbes Natriumlicht bei  $20^\circ\text{C}$  durch eine 10 cm lange Schicht einer Rohrzuckerlösung von der Konzentration  $c \text{ g/cm}^3$  hindurchtreten, so wird die Polarisations Ebene annähernd um den Winkel (in Grad)  $\alpha = 66,5c$  gedreht. Genauere Messungen liefern den Wert  $\alpha = 66,5c + 0,00870c^2$ . Noch genauere Versuche zeigen  $\alpha = 66,5c + 0,00870c^2 - 0,000253c^3$ . Falls weitere, exaktere Messungen ergeben, dass auch die letztgenannte Formel nicht ganz befriedigend ist, welcher Ansatz zur Berechnung von  $\alpha$  wäre denkbar?

Man gebe die einzelnen Näherungen von  $\alpha$  als Funktionen von  $c$  graphisch wieder.

29. Man entwickle die Funktion  $\frac{1}{1+2x^2}$  in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Für welche  $x$  konvergiert diese Reihe?

*Hinweis:* Man substituiere  $u := -2x^2$  und beachte die Summenformel für die geometrische Reihe.

30. Man entwickle die Funktion  $\cos x$  in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .
31. Mit Hilfe des Cauchy-Produktes entwickle man die Funktion  $f(x) = e^x \cos x$  in eine Reihe (Angabe der Entwicklung bis einschließlich der 5. Potenz von  $x$ ).

32. Man entwickle die Funktion  $\tan x$  im Punkt  $x_0 = 0$  in eine Potenzreihe (Angabe der Entwicklung bis einschließlich der 5. Potenz von  $x$ ).

*Anleitung:* Man setze die bekannten Reihenentwicklungen für  $\sin x$  und  $\cos x$  in  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  ein, mache einen unbestimmten Ansatz  $\tan x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ , multipliziere mit  $\cos x$  (Cauchy-Produkt!) und bestimme sukzessive die unbestimmten Werte  $c_0, c_1, \dots$  durch Vergleich der Koeffizienten bei den einzelnen Potenzen von  $x$ .

33. Es soll die spezifische Wärme mit Hilfe der Debye'schen Formel bestimmt werden, wonach die Atomwärme  $C_V$  eines einfachen festen Körpers gegeben ist durch

$$C_V = \frac{d}{dT} \left( 9RT \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \right).$$

$T$  ist dabei die absolute Temperatur,  $\theta$  die sogenannte charakteristische Temperatur und  $R$  die Gaskonstante.

*Hinweis:* Man entwickle  $\frac{x}{e^x - 1}$  in eine Potenzreihe.

34. Man entwickle die Funktion  $\ln(1 - x)$  in eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ . Für welche  $x$  konvergiert diese Potenzreihe?

*Anleitung:* Man verwende  $(\ln(1 - x))' = -\frac{1}{1-x}$  (warum?) und entwickle zunächst die abgeleitete Funktion (geometrische Reihe!). Nach erfolgter Integration beachte man  $\ln 1 = 0$ .

35. Das Wechselwirkungspotential diatomarer Moleküle wird oftmals in guter Näherung beschrieben durch folgende, Morse-Potential genannte Funktion:

$$V(r) = D(1 - e^{-a(r-r_0)})^2$$

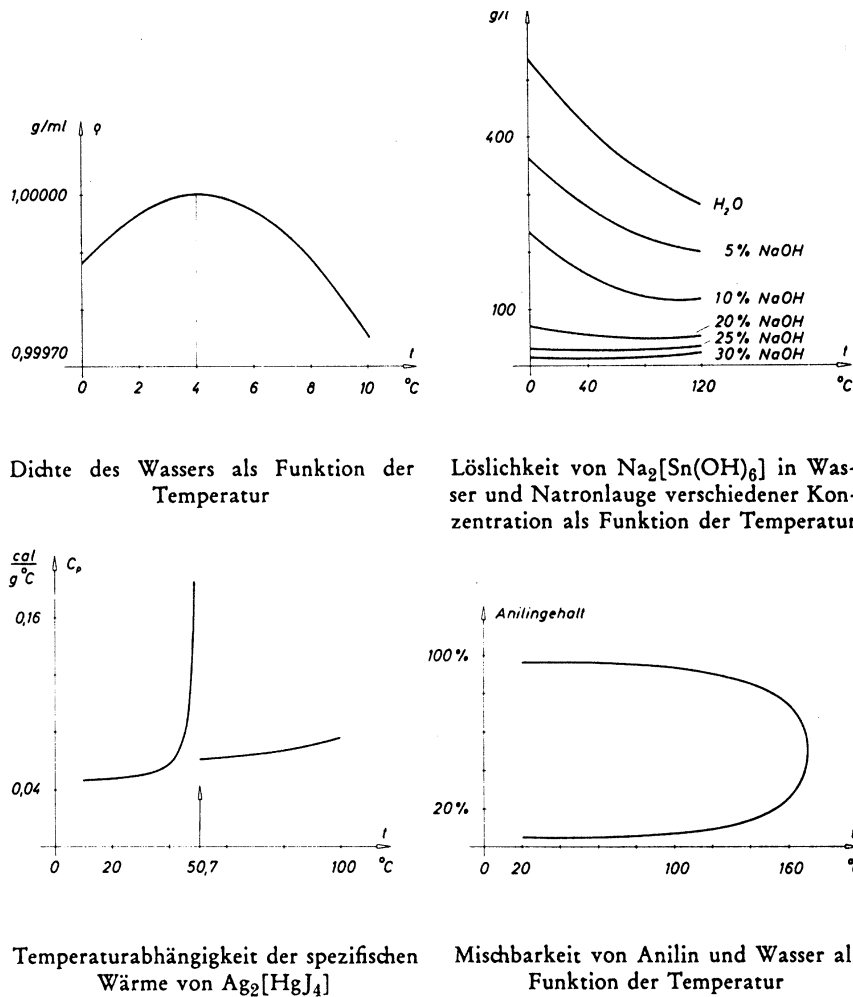
( $D$  ist die Dissoziationsenergie,  $r_0$  der Gleichgewichtsabstand im Molekül,  $a$  ein positiver Parameter).

Man approximiere die Funktion  $V(r)$  in der Nähe des Gleichgewichtsabstandes durch eine bis zur 5. Potenz von  $r - r_0$  entwickelte Taylor-Reihe.

36. Bei einem Versuch wird ein Kondensator bei 18 °C in verschiedene Flüssigkeiten eingebettet und seine Kapazität  $C$  gemessen. Dabei ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte, welche den (bekannten) Werten der relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_r$  der einzelnen Substanzen gegenübergestellt sind.

Substanz	$\epsilon_r$	$C$ (in $10^{-8}$ F)
$C_6H_5CH_3$	2,3	45
$CH_3COOC_2H_5$	6,1	89
$CH_3COOH$	9,7	131
$(CH_3)_2CO$	21,5	320
$C_2H_5OH$	26,0	402
$C_6H_5NO_2$	36,4	525
$HCOOH$	58,0	860

Abbildung 5:



Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $C$  und  $\epsilon_r$ , und wie groß ist die Kapazität des Kondensators annähernd im Vakuum ( $\epsilon_r = 1$ )?

*Hinweis:* Die Kapazität  $C$  eines Kondensators ist eine Funktion  $f(\epsilon_r)$  der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_r$ .

37. Man studiere die Diagramme in der Abbildung 5. Was kann man aus ihnen herauslesen?

38. Die Leistung des elektrischen Stromes ist proportional dem Quadrat der Stromstärke. Die Reichweite von  $\alpha$ -Strahlen in Luft ist proportional der 3. Potenz der Anfangsgeschwindigkeit. Die Gesamtstrahlung eines schwarzen Körpers ist proportional der 4. Potenz der absoluten Temperatur.

Man veranschauliche die angegebenen Proportionalitäten graphisch.

39. Der Druck  $p$  und das Volumen  $V$  eines idealen Gases sind einander umgekehrt proportional. Nimmt man 100 Liter Stickstoff und untersucht das Volumen bei verschiedenen Druckwerten, so findet man die in den ersten zwei Spalten der folgenden Tabelle wiedergegebenen Werte. Was können wir aus diesen Werten schließen?

$p$ (in atm)	$V$ (in Liter)	$pV$	$\frac{1}{V}$
1,0	100,0	100,0	0,010
27,3	3,622	98,9	0,276
44,4	2,225	98,8	0,449
62,0	1,590	98,6	0,628
73,0	1,352	98,7	0,739
80,6	1,226	98,8	0,816
91,0	1,088	98,9	0,920
109,2	0,909	99,4	1,101
123,4	0,810	100,0	1,235
168,8	0,608	102,6	1,645
208,6	0,505	105,2	1,980
251,1	0,432	108,2	2,316
290,9	0,386	112,2	2,590

40. Schüttelt man Jod mit Benzol und Blutkohle oder mit Tetrachlorkohlenstoff und Wasser oder mit Stärke und Wasser, so verteilt sich das Jod auf beide Medien in einem bestimmten Konzentrationsverhältnis. Die Verteilungskonzentrationen sind in den folgenden Tabellen angegeben. Welche Gesetzmäßigkeiten werden auf Grund dieser Tabellen nahegelegt?

Benzol und Blutkohle:

g Jod / 100 cm <sup>3</sup> C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	0,27	0,39	0,42	0,65	0,93	1,27	3,63	4,32
g Jod / g Kohle	1,04	1,15	1,18	1,31	1,45	1,54	2,03	2,11

Tetrachlorkohlenstoff und Wasser:

g Jod / 100 cm <sup>3</sup> CCl <sub>4</sub>	0,441	0,697	1,088	1,654	2,561
g Jod / 100 l H <sub>2</sub> O	5,16	8,18	12,76	19,34	29,13

Stärke und Wasser:

g Jod / g Stärke	0,245	0,248	0,250	0,255	0,276	0,308	0,326	0,361
g Jod / l H <sub>2</sub> O	1,267	1,763	2,509	3,482	5,235	15,42	29,28	62,33

*Hinweis:* Man bestimme zuerst graphisch die Zusammenhänge zwischen den Logarithmen der einzelnen Größen.

41. Die Gleichung  $\omega = A \cos(2\pi\nu(t - \frac{x}{c}))$  beschreibt ebene, in  $x$ -Richtung fortschreitende harmonische Wellen. Dabei ist  $t$  die Zeitvariable (in s),  $x$  die Längenvariable (in cm);  $\nu$  und  $c$  sind feste positive Größen (mit den Einheiten s<sup>-1</sup> bzw. cm·s<sup>-1</sup>), und  $A$  ist die Schwingungsamplitude.
- Man skizziere in einem  $(x, \omega)$ -Koordinatensystem die Wellenbewegung für  $t = 0, 1, 2$ .
  - Mit Hilfe dieses Schaubildes zeige man:  $c$  ist die Geschwindigkeit, mit der die Schwingungsmaxima sich in positiver  $x$ -Richtung fortbewegen (Phasengeschwindigkeit).
42. Die Gleichung  $\omega = A \cos(2\pi\nu(t - \frac{x}{c}))$  beschreibt ebene, in  $x$ -Richtung fortschreitende harmonische Wellen. Dabei ist  $t$  die Zeitvariable (in s),  $x$  die Längenvariable (in cm);  $\nu$  und  $c$  sind feste positive Größen (mit den Einheiten s<sup>-1</sup> bzw. cm·s<sup>-1</sup>), und  $A$  ist die Schwingungsamplitude.
- Man skizziere in einem  $(t, \omega)$ -Koordinatensystem den zeitlichen Verlauf an der Stelle  $x = 0$ .

- (b) Mit Hilfe dieses Schaubildes zeige man:  $\nu$  ist die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit an einer festen Stelle  $x$  (Frequenz).

43. Man bestimme (ohne elektronische Rechenhilfe) alle Zahlen  $x$ , für die gilt:

$$\arcsin x = \arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{4}{5}.$$

Vorweg kläre man: Welche Zahlen kommen dafür überhaupt in Frage (Definitionsmenge)?

44. Man entwickle die Funktion  $2 \sin x \cos^2 x$  in eine Reihe (bis  $x^7$ )

- (a) mit Hilfe der Euler'schen Formeln,  
(b) durch Bildung des Cauchy-Produktes.

45. Man beweise mit Hilfe der Euler'schen Formeln die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.

46. Bei Absorptionen, Destillationen und Extraktionen spielt die Funktion

$$y = \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1}$$

eine Rolle. Wenn wir z. B. eine Absorptionskolonne mit  $n$  theoretischen Böden betrachten, dann bedeutet  $y$  die relative Abnahme der Konzentration und  $x$  eine dem Verhältnis des reinen Lösungsmittels zur Gasmenge proportionale Größe.

Die Funktion ist für  $n = 0, 1, 2$  graphisch darzustellen.

47. Bringt man einen Körper der Temperatur  $t_0$  in einen Raum der Temperatur  $t_1$ , so beträgt die Temperatur  $t$  des Körpers nach  $\tau$  Sekunden  $t = t_1 + (t_0 - t_1)e^{-k\tau}$  ( $k$  ist eine positive Konstante). Was kann man aus der angegebenen Gleichung entnehmen?

*Anleitung:* Man skizziere die Funktion  $t(\tau)$  für  $t_0 < t_1$  und für  $t_0 > t_1$ .

48. Eine Lösung ist  $p$  kg schwer und enthält  $c_0$  kg gelöstes Salz pro kg Lösung. Die Lösung wird  $n$ -mal hintereinander mit  $\frac{w}{n}$  kg Wasser verdünnt, und zwar so, dass jeweils  $\frac{w}{n}$  kg Wasser zur Lösung dazugegeben und sodann die Lösung wieder auf  $p$  kg abgegossen wird. Wie groß ist (näherungsweise) die Konzentration der Lösung nach dem  $n$ -ten Mal Verdünnen, falls  $n$  sehr groß ist?

*Hinweis:* Bezeichne  $c_k$  die Salzkonzentration in der Lösung nach dem  $k$ -ten Abgießen,  $k = 1, \dots, n$ . Man stelle einen Zusammenhang zwischen  $c_k$  und  $c_{k+1}$  her. Für den Grenzprozess  $n \rightarrow \infty$  verwende man  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

49. Man berechne *ohne* Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$$

*Hinweis:* Reihenentwicklung.

50. Man berechne *ohne* Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x - \sin x} = ?$$

*Hinweis:* Reihenentwicklung.



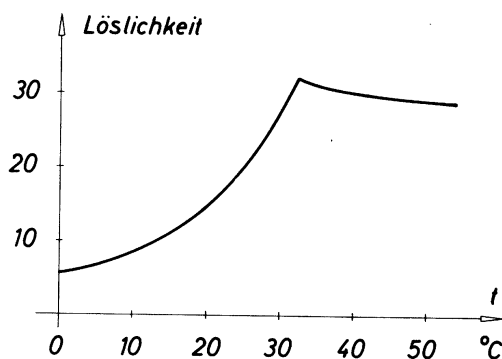
51. In einem Standzylinder mit der Basisfläche  $q \text{ cm}^2$  befindet sich Kupfersulfat. Dieses wird mit Wasser überschichtet. Durch Diffusion wird sich das Kupfersulfat in das Wasser ausbreiten, und zwar so, dass die Verteilung in jeder horizontalen Ebene konstant ist.

Man berechne die Konzentration des Kupfersulfats in einer horizontalen Ebene, welche sich  $x_0 \text{ cm}$  über der Basisfläche befindet, unter der Voraussetzung, dass jene Funktion  $f(x)$  bekannt ist, die die Menge des Kupfersulfats zwischen der Basisfläche und einer horizontalen Ebene, welche sich  $x \text{ cm}$  über der Basisfläche befindet, angibt.

52. Die Löslichkeit von Natriumsulfat in Wasser (in g wasserfreier Substanz pro 100 g Lösung) ist eine stetige Funktion der Temperatur (in  $^\circ\text{C}$ ). Diese ist in Abbildung 6 im Intervall  $[0, 50]$  dargestellt. Man ermittle graphisch den Temperaturkoeffizienten der Löslichkeit im Intervall  $[0, 50]$ . Was passiert bei  $32,4 \text{ }^\circ\text{C}$  (jener Stelle, bei der die Löslichkeitskurve eine „Ecke“ hat)?

*Hinweis:* Der Temperaturkoeffizient der Löslichkeit ist die Ableitung der Funktion nach der Temperatur.

Abbildung 6:



53. Bei einem monomolekularen Zerfall mit autokatalytischer Beschleunigung bezeichne  $x$  die in der Zeit  $t$  zerfallende Menge,  $a$  die Anfangsmenge der zerfallenden Substanz und  $k_u$  bzw.  $k$  die Geschwindigkeitskonstanten des unkatalysierten bzw. des katalysierten Reaktionsanteils. Dann gilt

$$x = \frac{ak_u(e^{(ak+k_u)t} - 1)}{ak + k_ue^{(ak+k_u)t}}.$$

Man berechne die Reaktionsgeschwindigkeit des Zerfalls.

54. Die Zustandsgleichung für  $\text{CO}_2$  bei  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  lautet:

$$\left(p + \frac{3,609}{V^2}\right)(V - 0,04257) = 22,4.$$

Man berechne  $\frac{dV}{dp}$

- mit Hilfe der Ableitung der inversen Funktion,
- durch „implizites“ Differenzieren.

55. Man berechne die folgenden Grenzwerte unter Zuhilfenahme der Regel von de l'Hospital:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
56. (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot 2x}{\cot x}$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$
57. Man gebe die *vollständige* Taylor-Reihenentwicklung der Funktion  $\ln(1 + x)$  im Punkt  $x_0 = 0$  an. Mit Hilfe des Lagrange'schen Restgliedes schätze man für die Werte  $x = -0,5$  und  $x = 0,5$  den jeweiligen Fehler ab, falls man die Reihe nach der 3. Potenz abbricht.
58. Man zeige: Wendet man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der Form  $g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0 + \vartheta h) \cdot h$  mit  $0 < \vartheta < 1$  auf die Funktion

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x_0 + h - x)^k$$

an, so erhält man die Taylor'sche Formel mit einer — im Vergleich zur Vorlesung — anderen Darstellung für das Restglied (das sogenannte Cauchy'sche Restglied).

*Hinweis:* Man behandle jeweils die Terme für  $k = 0$  gesondert.

59. Wendet man das Massenwirkungsgesetz auf wässrige Lösungen von Laugen oder Säuren an, so findet man, dass für die Konzentration  $[\text{H}^+]$  der Wasserstoffionen und die Konzentration  $[\text{OH}^-]$  der Hydroxylionen bei 25 °C gilt:  $[\text{H}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14} \text{ mol}^2/\text{l}^2$ . Man zeige auf graphischem Weg, dass es eine Wasserstoffionenkonzentration gibt, bei der die Summe  $[\text{H}^+] + [\text{OH}^-]$  ein Minimum ist, und berechne dieses Minimum.
60. Betrachtet man die zweistufige, reversible, adiabatische Gaskompression vom Anfangsdruck  $p_1$  bis zum Enddruck  $p_3$ , so besteht die Ermittlung der optimalen Arbeitsbedingung in der Bestimmung desjenigen Zwischendruckes  $p_2$ , für den der Arbeitsaufwand am niedrigsten ist. Ist die Anfangstemperatur des zu komprimierenden Gases  $T_1$ , dann wird die Arbeit durch die Formel

$$W = nRT_1 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 2 + \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]$$

ausgedrückt. Dabei bedeutet  $W$  die Arbeit in J,  $n$  die Menge des zu komprimierenden Gases in Mol,  $R$  die Gaskonstante in J/Grad·Mol und  $\kappa$  das Verhältnis der Wärmekapazität bei konstantem Druck zur Wärmekapazität bei konstantem Volumen ( $\kappa > 1$ ). Die Angabe der Temperatur  $T_1$  bezieht sich auf K.

Man ermittle den optimalen mittleren Druck bei der Kompression.

61. Das Sulfieren und Chlorieren organischer Verbindungen vollzieht sich häufig unter Lichtwirkung. Über einer Fläche sei eine punktförmige Lichtquelle  $Q$  angebracht, deren senkrechte Projektion auf die Fläche der Punkt  $Q'$  sei. Während  $Q'$  fest sei, sei der Abstand  $\overline{QQ'}$  (entlang der auf die Fläche senkrechten Geraden durch  $Q'$ ) veränderbar. Wie muss die Entfernung  $\overline{QQ'}$  gewählt werden, damit die Bestrahlung eines vorgegebenen Flächenpunktes  $P$ , welcher verschieden von  $Q'$  ist, einen Maximalwert erreicht?

*Anleitung:* Die Beleuchtungsstärke eines Flächenpunktes ist umgekehrt proportional dem Quadrat seiner Entfernung von der Lichtquelle und direkt proportional dem Kosinus des Einfallswinkels der Lichtstrahlen zur Normalen der beleuchteten Fläche.

62. Ein Stickstoffmonoxyd enthaltendes inertes Gas wird mit Luft vermischt. Es ist festzustellen, bei welchem prozentuellen Sauerstoffgehalt des sich ergebenden Gasgemisches die

Oxydationsgeschwindigkeit des Stickstoffmonoxyds (am Anfang) maximal ist, und wie groß das Luftvolumen ist, das zugegeben werden muss, damit das Gemisch mit der erforderlichen Sauerstoffmenge angereichert wird.

*Hinweis:* Für die Reaktionsgeschwindigkeit  $v$  von  $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}_2$  gilt:  $v = k \cdot [\text{NO}]^2 \cdot [\text{O}_2]$ ;  $k$  ist dabei eine positive Konstante.

63. Bezeichne bei einem monomolekularen Zerfall mit autokatalytischer Beschleunigung  $x$  die in der Zeit  $t$  zerfallende Menge,  $a$  die Anfangsmenge der zerfallenden Substanz, und seien  $k_u$  bzw.  $k$  die Geschwindigkeitskonstanten des unkatalysierten bzw. des katalysierten Reaktionsanteils, so gilt für die Reaktionsgeschwindigkeit  $v(t) = x'(t)$  des Zerfalls

$$v(t) = ak_u(ak + k_u)^2 \frac{e^{(ak+k_u)t}}{(ak + k_u e^{(ak+k_u)t})^2}.$$

Dabei sind alle auftretenden Konstanten positiv.

Man zeige, dass die Reaktionsgeschwindigkeit ein Maximum besitzt, und berechne dieses.

64. Nach Maxwell und Boltzmann hängt (unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen) die Zahl  $n$  der bei einer chemischen Reaktion aktivierten reaktionsfähigen Moleküle in einem Mol mit der Gesamtzahl  $N$  aller Moleküle zusammen durch die Gleichung

$$n = N e^{-\frac{Q}{RT}},$$

wobei  $R$  die Gaskonstante,  $T$  die absolute Temperatur und  $Q$  die Aktivierungsenergie ist.

Man diskutiere diese Kurve und zeige insbesondere, dass die Zahl der aktivierten Moleküle mit wachsender Temperatur zunächst immer stärker ansteigt, dass es dann aber immer schwerer wird, auch noch den letzten Rest der reaktionsträgen Moleküle zu aktivieren. Bei welchem Prozentsatz aktivierter Moleküle tritt dieser Umschwung etwa ein?

*Hinweis:* Der kritische Punkt für die Änderung des Verhaltens ist jener Temperaturwert  $T_0$ , bei dem die Funktion  $n(T)$  einen Wendepunkt hat.

65. Mit Hilfe der Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung ermittle man den kritischen Druck und das kritische Molvolumen eines realen Gases.

*Hinweis:* Der kritische Druck und das kritische Molvolumen sind die Koordinaten des Wendepunktes mit horizontaler Tangente auf der Isotherme  $T =$  kritische Temperatur.

66. Man diskutiere und skizziere den Verlauf des sogenannten Morse-Potentials

$$V(r) = D \left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2,$$

welches häufig zur Beschreibung der Wechselwirkungsenergie in einem diatomaren Molekül herangezogen wird. ( $D$  ist die Dissoziationsenergie,  $r_0$  der Gleichgewichtsabstand im Molekül,  $a$  eine positive Konstante; die Variable  $r$  ist positiv.)

67. Man berechne die Arbeit, die

- (a) ein ideales Gas,
- (b) ein reales Gas

leistet, welches in einem mit einem Kolben versehenen Zylinder eingeschlossen ist, wenn man voraussetzt, dass der Prozess isotherm verläuft.

*Anleitung:* Ist  $q$  die Oberfläche des Kolbens,  $x$  die Entfernung des Kolbens vom Boden des Zylinders und  $p(x)$  der Druck des Gases als Funktion von  $x$ , so ist die Arbeit bei Verschiebung des Kolbens von  $x_1$  nach  $x_2$  gegeben durch  $A = q \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx$ .

68. (a) Die Abhängigkeit der spezifischen Wärme  $c$  (bei konstantem Druck) von der Temperatur  $t$  wird für Benzin durch die Formel  $c = 0,2237 + 0,0010228 t$  wiedergegeben. Man ermittle die mittlere spezifische Wärme von Benzin für das Temperaturintervall von  $116^\circ\text{C}$  bis  $218^\circ\text{C}$ .

*Hinweis:* Als mittlerer Wert von  $c$  kann der Mittelwert aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung genommen werden.

- (b) Es ist die Wärmemenge  $Q$  zu bestimmen, die erforderlich ist, um 10 kg Eisen von  $20^\circ\text{C}$  auf  $100^\circ\text{C}$  zu erwärmen, wenn die spezifische Wärme  $c_t$  des Eisens im Temperaturbereich von  $0^\circ\text{C}$  bis  $200^\circ\text{C}$  gegeben ist durch die Funktion  $c_t = 0,1053 + 0,000142 t$ .

*Hinweis:* Bezeichne  $m$  die Masse des Eisens, so ist  $c_t = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dt}$  (in cal/grad·g). Damit erhalten wir  $Q = 10000 \int_{20}^{100} c_t dt$ .

69. In einem Wechselstromkreis erzeuge die Wechselspannung  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  einen um den Winkel  $\varphi$  in der Phase verschobenen Wechselstrom  $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . ( $U_0$  ist der Scheitelwert der Wechselspannung,  $I_0$  der Scheitelwert des Wechselstromes,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  die Kreisfrequenz.)

Man berechne die während einer Periode  $T$  erzeugte mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t) dt.$$

70. Die Luft eines 30 m langen, 30 m breiten und 12 m hohen Werkraumes enthalte 0,12 % Kohlendioxyd. Wieviel Frischluft muss je Minute zugeführt werden, damit der Gehalt an Kohlendioxyd nach 10 Minuten auf 0,06 % gesunken ist? Die Konzentration des Kohlendioxyds in der Frischluft betrage dabei 0,04 %, und es werde angenommen, dass sich die Frischluft sofort mit der verunreinigten Luft vermischt.

71. Ein Körper habe die Temperatur  $t_1$  und das ihn umgebende Medium die konstante Temperatur  $t_0$ , wobei  $t_0 < t_1$  sei. Es soll ermittelt werden, nach welchem Gesetz sich dieser Körper mit der Zeit abkühlt.

*Anleitung:* Für die Abnahme der Wärme  $Q$  des Körpers mit der Zeit  $\tau$  gilt:  $\frac{dQ}{d\tau} = -k(t - t_0)$ . Darin sind  $t$  die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt  $\tau$  und  $k$  eine positive Konstante. Nehmen wir die spezifische Wärme  $c$  des Körpers im Intervall  $[t_0, t_1]$  als konstant an, so ist die vom Körper während seiner Abkühlung von  $t$  auf  $t_0$  Grad abgegebene Wärmemenge, wenn  $m$  die Masse des Körpers bezeichnet, gleich  $mc(t - t_0)$ .

72. Die katalytische Zersetzung von  $\text{N}_2\text{O}$  am Platinkontakt wird durch den beim Zerfall gebildeten Sauerstoff gehemmt. Bezeichnet  $x(t)$  die zur Zeit  $t$  zerfallene  $\text{N}_2\text{O}$ -Menge und  $a$  die Anfangsmenge an  $\text{N}_2\text{O}$ , so gilt für die zeitliche Änderung der  $\text{N}_2\text{O}$ -Menge

$$-\frac{d}{dt}(a - x) = \frac{k(a - x)}{1 + bx}.$$

Dabei sind  $k$  und  $b$  Konstanten ungleich 0.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen  $x$  und  $t$ ?

73. Die effektive Stromstärke  $i_{\text{eff}}$  eines Wechselstromes ist definiert als die Stärke desjenigen Gleichstromes, der, durch denselben Widerstand  $R$  wie der zu untersuchende Wechselstrom fließend, während einer Periode  $\tau$  des Wechselstromes die gleiche elektrische Arbeit wie der Wechselstrom leistet, d. h., es ist

$$i_{\text{eff}}^2 R \tau = \int_0^\tau R i^2 dt,$$

worin  $i$  ist die Stromstärke des Wechselstromes bedeutet.

Man berechne die effektive Stromstärke eines sinusförmigen Wechselstromes, d. i. ein Wechselstrom, für den gilt:  $i = i_0 \sin \frac{2\pi}{\tau} t$ .

74. (a) Man berechne *ohne* Ausmultiplizieren des Integranden:  $\int (3x + 1)^4 dx = ?$

(b)  $\int_4^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$

Bei dieser und allen folgenden Integrationsaufgaben soll unbedingt auch die (maximal mögliche) Definitionsmenge bestimmt werden!

75.  $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = ?$

*Hinweis:* Man substituiere  $x = \tan t$ .

76.  $\int \arcsin x dx = ?$

77.  $\int x^2(\ln x)^3 dx = ?$

78.  $\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx = ?$

79.  $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} dx = ?$

80. Sei  $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + x & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -\frac{\pi}{2} - x & \text{für } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$  und  $f(x + 2k\pi) = f(x)$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .

Man entwickle  $f(x)$  in eine Fourierreihe.

*Hinweis:* Die Formeln für die Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  entnehme man der Formelsammlung. Hier gilt zudem  $b_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Warum?

81. Man entwickle die Funktion  $f(x) = |\sin x|$  für  $x \in \mathbb{R}$  (kommutierter Sinusstrom) in eine Fourierreihe.

*Hinweis:* Siehe Hinweis zu Aufgabe 80. Hier gilt ebenfalls  $b_k = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Warum?

82. Ein radioaktiver Stoff ergebe zwei (selbst nicht weiter zerfallende) Zerfallsprodukte, von denen jedes mit verschiedener Geschwindigkeit entstehe. Die Bildungsgeschwindigkeit eines jeden Zerfallsproduktes ist der jeweiligen Menge des Ausgangsstoffes proportional, und jedes Zerfallsprodukt wird unmittelbar aus dem Ausgangsstoff erhalten.

Man bestimme die jeweiligen Mengen  $x(t)$  und  $y(t)$  der Zerfallsprodukte zur Zeit  $t$ , wenn die ursprüngliche Menge des Ausgangsstoffes 10 g beträgt und nach 3 Tagen für die beiden Zerfallsprodukte die Mengen 4 g bzw. 1 g gemessen werden.

83. Für eine irreversible Reaktion vom Typ  $A + B + C \rightarrow \text{Produkte}$ , bei der alle Teilreaktionen von 1. Ordnung sind und deren Geschwindigkeitskonstante  $k$  bekannt ist, stelle man die Differentialgleichung für den Umsatz  $x(t)$  auf und löse sie für den Fall, dass die Ausgangskonzentrationen von A, B und C gleich  $a$ ,  $b$  bzw.  $c$  sind ( $a < b < c$ ). Ferner bestimme man jenen Zeitpunkt  $\tau$ , bei dem  $x = 0,5a$  ist.

84. Für eine gewisse Reaktion gelte für den Umsatz  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t$

$$\frac{dx}{dt} = 3(2-x)(1-x) - (1+x)(2+x).$$

Unter der Voraussetzung, dass  $x(0) = 0$  ist, berechne man  $x(t)$ . Ab welchem Wert von  $x$  nimmt  $x$  nicht mehr mit der Zeit zu?

85. Bei der Extraktion des Schwefels aus 25 g einer 52 % Schwefel enthaltenden Gasreinigungsmasse mit 100 g siedendem Benzol wurde zu verschiedenen Zeitpunkten die Konzentration des Schwefels im Benzol gemessen:

Zeit in min	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Konzentration des Schwefels in g pro 100 g Benzol	0	2,15	3,40	4,32	5,10	5,73	6,32	6,78	7,04	7,42

Die Löslichkeit des Schwefels in Benzol beträgt bei der Siedetemperatur 11,7 g pro 100 g Benzol.

Auf Grund der gefundenen Messdaten überprüfe man die Annahme, dass die Abnahme der Menge des ungelösten Schwefels mit der Zeit sowohl der jeweiligen Menge des ungelösten Schwefels als auch der jeweiligen Differenz aus Sättigungskonzentration und Konzentration proportional ist.

86. Für eine vollständig ablaufende Reaktion  $n$ -ter Ordnung vom Typ  $A \rightarrow \text{Produkte}$  werden für die Konzentration  $c_A$  von A (in mol/l) folgende Werte nach  $t = 0, 1, 10$  Minuten gemessen:

$$c_A(0) = 0,1 \quad c_A(1) = 0,05 \quad c_A(10) = 0,01$$

Von welcher Ordnung  $n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3$ , wird die Reaktion am ehesten sein?

87. Bei der Hydrolyse von 5,11 g Dibrombernsteinsäure wurde bei einer bestimmten Wassertemperatur zu verschiedenen Zeiten die jeweilige Menge an noch vorhandener Säure bestimmt. Die Messung ergab dabei folgende Werte:

Zeit in min	0	10	20	30	40	50	60
Säuremenge in g	5,11	3,77	2,74	2,02	1,48	1,08	0,80

Auf Grund der vorliegenden Messwerte ist die Frage zu erörtern, ob es sich bei der untersuchten Reaktion um eine Reaktion 1. Ordnung handeln kann.

88. (a)  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = ?$   
 (b)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = ?$   
 (c)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5} = ?$

89. Für  $x > 0$  gibt es Konstanten  $K_1, K_2, \alpha$  mit  $\alpha < 1$ , sodass

$$e^{-t}t^{x-1} \leq K_1t^{-\alpha} \quad \text{für } 0 < t \leq 1 \quad \text{und} \quad e^{-t}t^{x-1} \leq K_2t^{-2} \quad \text{für } t \geq 1.$$

Aus diesem Sachverhalt leite man die Konvergenz des  $\Gamma(x)$  für  $x > 0$  definierenden uneigentlichen Integrals ab.

90. Ein Würfel werde so oft geworfen, bis erstmalig eine 6 auftritt.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass *genau* 1, 2, 3, ...,  $n$ -mal gewürfelt werden muss?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass *mindestens* 1, 2, 3, ...,  $n$ -mal gewürfelt werden muss?
  - Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der erforderlichen Würfe?

- (d) Was ist die erforderliche Zahl an Würfeln, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens  $\frac{1}{2}$  zumindest eine 6 dabei ist?

Vor Beantwortung dieser Fragen definiere man eine geeignete Zufallsvariable  $X$  und formuliere die Fragestellungen mit Hilfe dieser Zufallsvariablen.

*Hinweis:* Es gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$  für  $|x| < 1$ .

91. Man berechne für

- (a) eine Alternativverteilung mit  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $p_1 = \frac{1}{2}$ ,
- (b) eine Alternativverteilung mit  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $p_1 = \frac{4}{5}$ ,
- (c) eine diskrete Gleichverteilung mit  $n = 5$ ,  $x_i = i - 1$  für  $i = 1, \dots, 5$

den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung.

92. Man berechne für eine stetige Gleichverteilung  $S_{[\alpha, \beta]}$  den Erwartungswert, die Varianz, die Standardabweichung, den Median und das allgemeine  $p$ -Quantil.

93. Sei  $X$  verteilt nach  $N(\mu, \sigma^2)$ . Man zeige, dass für den Erwartungswert gilt:  $\mathbb{E}(X) = \mu$ .

*Hinweis:*  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$ .

94. Man beweise, dass für beliebige unabhängige Zufallsvariable  $X, X_1, X_2$  und reelle Zahlen  $k, k_1, k_2$  gilt:

- (a)  $\text{Var}(k \cdot X) = k^2 \cdot \text{Var}(X)$ ,
- (b)  $\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2)$ ,
- (c)  $\text{Var}(k_1 X_1 + k_2 X_2) = k_1^2 \text{Var}(X_1) + k_2^2 \text{Var}(X_2)$ .

Wo wird die Voraussetzung „unabhängig“ benötigt?

*Anleitung:* Für beliebige Zufallsvariable  $X_1, X_2, \dots, X_n$  und reelle Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_n$  gilt:

$$\mathbb{E}(k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n) = k_1 \mathbb{E}(X_1) + k_2 \mathbb{E}(X_2) + \dots + k_n \mathbb{E}(X_n).$$

95. Ein mathematisches Pendel schwinde ohne Dämpfung, der Winkel der größten Auslenkung sei  $2^\circ$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gänzlich zufällig gewählten Zeitpunkt die Auslenkung größer als  $1^\circ$  ist?

Definieren Sie eine geeignete Zufallsvariable  $X$ , geben Sie deren Verteilung an, und mit Hilfe dieser Zufallsvariablen formulieren Sie die Fragestellung und bearbeiten Sie die Aufgabe.

*Anleitung:* Lässt man die betrachtete Schwingung zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit der Amplitude  $\phi_0$  beginnen, so kann der jeweilige Auslenkungswinkel beschrieben werden durch  $\phi(t) = \phi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t$ , worin  $T$  die Schwingungsdauer bedeutet. Zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist es überdies hinreichend, bloß eine einzige Schwingung zu betrachten (warum?).

96. Wir betrachten eine chemische Substanz in einem homogenen, kontinuierlichen Reaktor. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Teilchen frühestens nach einer vorgegebenen Zeit  $T$  den Reaktor verlässt, wenn man weiß, dass die Verweilzeit im Reaktor exponentiell verteilt ist mit  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

97. Man berechne für eine Exponentialverteilung die Varianz, die Standardabweichung, den Median und das allgemeine  $p$ -Quantil.

98. Bei der Bestimmung einer photometrischen Eichkurve erhielt man folgende Wertepaare für die Konzentration (in mg/l) und die Absorbance:

Konzentration	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5
Absorbance	0,00	0,07	0,10	0,16	0,33

Man berechne

- den empirischen Korrelationskoeffizienten,
- die Ausgleichsgerade

und veranschauliche diese zusammen mit den Wertepaaren in einer Graphik.

99. Bei einer Messserie von luftgetragenen Staub (sogenannte PM10, d. s. „particulate matter“ kleiner 10  $\mu\text{m}$  Durchmesser) erhielt man im Jahr 1999 an der Messstelle AKH, in Wien 9, folgende Tagesmittelwerte:

1.-7. Oktober:	12,63	18,22	22,75	9,19	16,18	24,87	22,13
1.-7. November:	20,76	66,40	50,49	38,37	61,50	46,00	16,32
1.-7. Dezember:	54,33	14,05	36,75	14,75	12,49	24,28	49,58

Für jeden einzelnen dieser Zeiträume bestimme man

- einen Schätzwert für das Mittel sowie die Varianz und die Standardabweichung,
- das 95-%- sowie das 99-%-Konfidenzintervall für den Mittelwert (unter Annahme einer Normalverteilung)

und vergleiche die erhaltenen Ergebnisse.

100. Aus der Verfahrenstechnik: Im Rahmen einer Untersuchung zur Porosierung von Mauerziegelprodukten wurde Weizengras geschnitten und mit einer Schneidmühle gemahlen. Sodann wurden von einer Zufallsstichprobe die Faserlängen gemessen (in  $\mu\text{m}$ ):

40 13 36 20 24 33 28 29 54 32 42

- Man berechne das Stichprobenmittel sowie die empirische Varianz und Standardabweichung.
- Unter der Annahme, dass die Faserlängen (näherungsweise) normalverteilt sind, bestimme man ein Konfidenzintervall für den Mittelwert zum Konfidenzniveau  $\gamma = 0,95$  bzw.  $\gamma = 0,99$ .

Die gleichen Berechnungen führe man auch mit dem (natürlichen) Logarithmus der Messwerte durch und vergleiche die jeweils einander entsprechenden Ergebnisse.

101. Zur Bestimmung des Eisengehalts in einer Legierung wurde wiederholt das erhaltene Eisenoxid  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  gewogen, und dabei wurden folgende gravimetrischen Auswaagen (in mg) erhalten:

95,6 95,4 96,6 96,1 96,2

Man bestimme

- das Mittel, den mittleren Fehler der Einzelmessungen, den mittleren Fehler des Mittelwerts,



- (b) das 95-%- sowie das 99-%-Konfidenzintervall für den Mittelwert
- i. bei bekannter Standardabweichung  $\sigma = 0,3$  bzw.
  - ii. bei unbekannter Standardabweichung.
- (c) Ferner prüfe man, ob die Annahme einer Normalverteilung der Fehler gerechtfertigt erscheint.
102. Bei der volumetrischen Bestimmung der Wasserhärte erhielt man bei der Titration folgende Messwerte (in ml):

15,14   15,21   15,19   15,27   15,08   15,25   15,27

Man bestimme

- (a) das Mittel, den mittleren Fehler der Einzelmessungen, den mittleren Fehler des Mittelwerts,
  - (b) das 95-%- sowie das 99-%-Konfidenzintervall für den Mittelwert
    - i. bei bekannter Standardabweichung  $\sigma = 0,035$  bzw.
    - ii. bei unbekannter Standardabweichung.
  - (c) Ferner prüfe man, ob die Annahme einer Normalverteilung der Fehler gerechtfertigt erscheint.
103. Man stelle das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = -\frac{x}{y}$  graphisch dar und ermittle auf Grund der Skizze die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
104. Gegeben sei die Differentialgleichung  $y' - x^2 - e^y = 0$  mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ . Man stelle die Lösung  $y(x)$  als Potenzreihe (bis einschließlich der 4. Potenz von  $x$ ) dar.
105. Mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes löse man näherungsweise die Differentialgleichung

$$y'' + xy' + \frac{1}{1-x}y = 0$$

mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

106. Mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung im Punkt  $x_0 = 0$  finde man eine Näherung für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'' - x^2y' - y = 0$ . Wie kann der  $n$ -te Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung der allgemeinen Lösung durch die vorangegangenen Koeffizienten ausgedrückt werden?
107. Man zeige, dass die allgemeine Lösung der Euler'schen Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{n^2}{x^2}y = 0$$

im Fall  $n \neq 0$  lautet:  $y(x) = C_1x^n + C_2x^{-n}$  mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Man berechne weiters die partikuläre Lösung zu der Anfangsbedingung  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 4$  im Fall  $n = 2$ .

108. Für den Dampfdruck  $p = p(T)$  einer Flüssigkeit bei der absoluten Temperatur  $T$  gilt näherungsweise

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\rho_0 + (C_p - C)T}{RT^2}p.$$

Hierin bedeuten  $C$  die Molwärme der Flüssigkeit,  $C_p$  die Molwärme des Dampfes,  $\rho_0$  die Verdampfungswärme bei  $T = 0$  und  $R$  die Gaskonstante.

Man bestimme  $p(T)$ .

109. Lässt man Suspensionen in Ruhe stehen, dann setzen sich die festen Teilchen unter dem Einfluss der Schwerkraft allmählich ab. Es soll das Bewegungsgesetz eines sich in der Flüssigkeit ohne Anfangsgeschwindigkeit absetzenden Partikels ermittelt werden.

*Hinweis:* Der Betrag  $K$  der Resultante der an einem Teilchen der Masse  $m$  angreifenden Kräfte bei der Abwärtsbewegung ist einerseits gleich  $mg - kw$ , wobei  $w = \frac{dh}{dt}$  die Geschwindigkeit des Teilchens,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $k$  eine Widerstandskonstante ist. Nach dem Newton'schen Gesetz gilt andererseits  $K = m \frac{dw}{dt}$ .

110. Das Wachstum (d. h. die zeitliche Änderung der Höhe) einer Pflanze sei in jedem Augenblick direkt proportional ihrer Höhe  $y$  und umgekehrt proportional der 3. Potenz ihres Alters  $t$ , der Proportionalitätsfaktor sei  $k$ . Man stelle die Differentialgleichung für die zu berechnende Pflanzenhöhe  $y = y(t)$  auf und löse diese Differentialgleichung unter der Bedingung, dass zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t_1$  die Pflanzenhöhe  $y_1$  ist. Welche Höhe erreicht die Pflanze für  $t \rightarrow \infty$ ?

111.  $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

112.  $xy' + y = x^2 + 3x + 2$

113.  $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ . Man ermittle die Lösungen durch den Punkt  $(0, 1)$ .

114. Bei einer chemischen Reaktion werde ein Ausgangsstoff A über ein Zwischenprodukt E in einen Stoff B umgewandelt, wobei die Teilreaktionen  $A \rightarrow E$  und  $E \rightarrow B$  beide von 1. Ordnung mit bekannten Geschwindigkeitskonstanten  $k_1$  und  $k_2$  verlaufen ( $k_1 \neq k_2$ ). Wie groß sind zu einem beliebig herausgegriffenen Zeitpunkt die Stoffmengen von A, E und B, wenn die Ausgangsmenge von A ein Mol beträgt?

115. Zwischen zwei Elektroden, die in einen Elektrolyten von konstanter Temperatur getaucht werden, bestehe ein elektrisches homogenes Feld mit konstanter Feldstärke. Unter dem Einfluss des Feldes wandern die Ionen dann von der einen Elektrode in Richtung der anderen, wobei ihre Bewegung als geradlinig angesehen werden kann. Wie lautet das Gesetz für die Bewegung eines Ions der Masse  $m$ , wenn die durch das elektrische Feld induzierte Kraft, welche auf das Ion wirkt, dem Betrage nach bekannt ist (lässt sich sofort aus der Wertigkeit des Ions und der Feldstärke berechnen) und wenn die dem Ion entgegenwirkende Widerstandskraft als proportional der Wanderungsgeschwindigkeit angenommen wird, wobei der Proportionalitätsfaktor ebenfalls bekannt sei?

116. In einem flüssigen Medium suspendierte kugelförmige Teilchen mit gleichem Halbmesser  $r$  und Masse  $m$  bewegen sich unter dem Einfluss von Zusammenstößen mit den Molekülen der Flüssigkeit. Betrachten wir den durchschnittlichen Wert der  $x$ -Komponente der Ortsänderung eines Teilchens mit der Zeit  $t$ , welchen wir mit  $x = x(t)$  bezeichnen, so gilt bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems

$$\frac{m}{2} \frac{d^2x}{dt^2} - kT = -3\pi\eta r \frac{dx}{dt}.$$

Dabei bezeichnet  $\eta$  die Viskosität,  $T$  die Temperatur des Mediums (in K), und  $k$  ist eine positive Konstante.

Man bestimme  $x(t)$ .

117. Man stelle für die Reaktion  $A \rightleftharpoons B$ , welche in beiden Richtungen von 1. Ordnung verlaufe, (Geschwindigkeitskonstanten  $k_1$  bzw.  $k_2$ ), die Reaktionsgleichung für die Konzentration  $c_A$  von A auf, bestimme daraus die möglichen Gleichgewichtszustände und untersuche diese auf Stabilität. Dabei nehme man an, dass die Summe  $c_A(0) + c_B(0) =: c$  der Anfangskonzentrationen von A und B fest vorgegeben ist.

118. Man bestimme die möglichen Gleichgewichtszustände bei der Differentialgleichung  $y' + ay = k$  ( $a, k$  positive Konstanten) und untersuche diese auf Stabilität.
119. Gesucht ist die Lösung der Schwingungsgleichung  $y'' + 2y' + 2y = 0$  zur Anfangsbedingung  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .
120. Das mathematische Pendel besteht aus einem Massepunkt der Masse  $m$ , der an einem gewichtslosen undehnbaren Faden der Länge  $L$  aufgehängt ist und der Schwerkraft unterliegt. Bezeichnet  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\varphi$  die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage und  $t$  die Zeit, so folgt nach dem Grundgesetz der Dynamik für die an den Massepunkt während der Pendelbewegung angreifenden Kräfte

$$mL \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Für kleine Winkel kann man in dieser Gleichung den Sinus durch den Bogen ersetzen (warum?).

Man ermittle eine Näherung für die Funktion  $\varphi(t)$  unter der Voraussetzung, dass die größte Auslenkung des Pendels, welche es zum Zeitpunkt  $t = 0$  habe, gleich  $\varphi_0$  sei.

121. Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y'' + y = \cos x$ .
122. Man löse die Differentialgleichung  $y'' - 2y' + y = e^x$ .
123. Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 10x = 47 \cos 3t - \sin 3t$$

mit der Anfangsbedingung  $x(0) = 3, x'(0) = -1$ .

124. Ein Kondensator der Kapazität  $C$  sei über den Ohm'schen Widerstand  $R$  und die Induktivität  $L$  zu einem Schwingungskreis geschlossen. Dieser Schwingungskreis sei mit einem Erregerkreis gekoppelt, der eine zeitlich periodische Spannung  $U_0 \cos(\omega t)$  überträgt. Für die im Zeitpunkt  $t$  am Kondensator herrschende Spannung  $U(t)$  gilt die folgende Differentialgleichung:

$$LU'' + RU' + \frac{1}{C}U = \frac{U_0}{C} \cos \omega t.$$

Gesucht ist  $U(t)$  unter der Bedingung, dass  $R^2 > \frac{4L}{C}$ .

125. In einem homogenen Medium laufen hintereinander zwei umkehrbare Reaktionen  $A \rightleftharpoons B$  und  $B \rightleftharpoons C$  ab, wobei sämtliche Teilreaktionen von 1. Ordnung sind. Unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeitskonstanten aller Reaktionen bekannt sind und dass die Ausgangsmenge des Stoffes A ein Mol beträgt, berechne man die Stoffmengen von A, B, C zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ .

*Anleitung:* Seien  $x(t), y(t)$  und  $z(t)$  die Molzahlen von A, B bzw. C zur Zeit  $t$ , und sind  $k_1$  und  $k_2$  die Geschwindigkeitskonstanten von  $A \rightarrow B$  bzw.  $B \rightarrow A$ ,  $k_3$  und  $k_4$  die Geschwindigkeitskonstanten von  $B \rightarrow C$  bzw.  $C \rightarrow B$ , so stelle man die Reaktionsgleichungen für  $x(t)$  und  $y(t)$  auf und eliminiere anschließend  $x(t)$  oder  $y(t)$  durch Differenzieren einer Gleichung und Einsetzen in die andere.

126. Man berechne für die in Aufgabe 125 beschriebene Reaktion die möglichen Gleichgewichtszustände und untersuche diese auf Stabilität.
127. Man untersuche die zyklische Reaktion  $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \xrightarrow{k_3} A$ , bei der alle Teilreaktionen von 1. Ordnung seien, auf mögliche Gleichgewichtszustände und beurteile deren Stabilitätsverhalten.

128. Unter welchen Voraussetzungen über die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$ , wobei  $\lambda \neq 0$  sei, hat die Differentialgleichung

$$y'' + (\lambda - \mu\lambda + 1)y' + \lambda y = \lambda$$

- (a) eine asymptotisch stabile Gleichgewichtslösung,
- (b) eine stabile Gleichgewichtslösung, die nicht asymptotisch stabil ist,
- (c) eine instabile Gleichgewichtslösung?

Die Bedingungen für  $\lambda$  und  $\mu$  veranschauliche man in einem  $\lambda\mu$ -Diagramm.