Analysis 2 für Informatik

Übung 9

Beispiel 1) Man löse die folgende partielle Differentialgleichung. $u_{xx} + u_x + x + y = 1$

Beispiel 2) Man löse die folgende partielle Differentialgleichung. $xyu_x + u_y = xy\cos(x)$

Beispiel 3) Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung:

$$xu_x + 2yu_y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die Lösung dieser Differentialgleichung, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$u\left(x, \frac{1}{x}\right) = x.$$

Beispiel 4) Eine Funktion $u(x, y)$ heißt *homogen* vom Grad n, wenn

$$u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x, y)$$

für alle $\lambda > 0$ und x, y gilt. Durch Differenzieren dieser Beziehung nach λ zeige man: falls u eine stetig differenzierbare Funktion ist, genügt sie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$xu_x + yu_y = nu.$$

Wie lautet die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung?

Beispiel 5) Lösen Sie das AWP

$$u_t + u^2 u_x = 0, \qquad u(x, 0) = x.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass eine implizite Lösung der Form $u = f(x - tg(u))$ existiert.

Beispiel 6) Man klassifiziere die folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach „hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch"':

(a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0,$

(b) $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + u = 0,$

(c) $3u_{xx} - 8u_{xy} + 4u_{yy} - u = 0,$

(d) $u_{xy} + xyu_{yy} + u_y = 0,$

(e) $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0.$