Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 2. Juli 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7)$. Bestimmen Sie alle relativen Extrema (Lage und Art des Extremums) von f!

2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ für $|x| < 1$ konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1$ bzw. bei $x = -1$?

3)(8 P.) Gegeben sei das Bereichsintegral $\iint_B (xy + 2(x^2 + y^2))\, dx\, dy$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie das Integral!

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor linear approximiert werden? Wie sieht dann das Restglied aus? Was bedeutet, daß eine symmetrische und quadratische Matrix positiv definit ist? Sei $(\mathrm{grad} f)(x_0, y_0) = 0$. Begründen Sie, warum man bei positiv definiter Hessematrix an der Stelle (x_0, y_0) schließen kann, daß (x_0, y_0) ein lokales Minimum von f ist?

Anmerkung: Bei der dritten Frage ist <u>nicht</u> danach gefragt, wie man die Definitheit einer Matrix feststellen kann (zB mittels Hauptminorenkriterium).

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Was bedeuten die folgenden mathematischen Aussagen?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = 3, \qquad f(x) \text{ ist stetig an der Stelle } x = 6.$$

Geben Sie eine verbale Beschreibung und eine formal exakte Definition an!

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. September 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Gegeben sei $f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2)}{y} + y\sin(y)$ und der Punkt $P = (0,\pi)$. Weiters bezeichne n jene Niveaulinie von $f(x,y)$, die durch P geht.

a) Berechnen Sie $\mathrm{grad} f$ im Punkt P.

b) Bestimmen Sie die Richtung von n im Punkt P, z.B. durch Angabe eines Richtungsvektors oder der Gleichung der Tangente an n durch P.

2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

3)(8 P.) Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x)\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} g(x)\right)$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$? Wie lautet der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen?

Gegeben sei die Erdoberfläche E, und wir nehmen an, dass die Lufttemperatur eine stetige Funktion $T : E \to \mathbb{R}$ des Ortes ist. Für $x \in E$ bezeichnen wir mit $\bar{x}$ den zu x antipodalen Punkt (d.h. auf der Erdoberfläche liegen x und $\bar{x}$ genau gegenüber). Beweisen Sie, dass es mindestens ein Paar antipodaler Punkte mit derselben Lufttemperatur gibt! Hinweis: Betrachten Sie einen Großkreis G von E und die Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto T(x) - T(\bar{x})$. Ist diese Funktion stetig? (Warum?) Benützen dann den Zwischenwertsatz.

5)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung? Wie sieht die Lösungsgesamtheit so einer Gleichung aus? (Dh wie sieht die Struktur der Lösungsmenge aus?) Was versteht man unter der charakteristischen Gleichung einer homogenen linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und wie hängen die Lösungen der charakteristischen Gleichung mit den Lösungen der Differenzengleichung zusammen?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 24. Jänner 2014 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren denjenigen Punkt auf der Kurve $x^2 + (y-1)^2 = 1$, der dem Punkt $(1,2)$ am nächsten liegt! Fertigen Sie auch eine zur Problemstellung passende Skizze an!

2)(8 P.) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}.$$

3)(8 P.) Sei $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ die durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u$ definierte Funktion. Beweisen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gilt.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definieren Sie die Begriffe "relatives Maximum (Minimum)" und "absolutes Maximum (Minimum)" von f. Geben Sie weiters je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums von f an. Prüfen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = x^3 + 3xy - 5x - 10y$ im Punkt $(1, 3)$ ein relatives Extremum besitzt.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wie ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ an der Stelle (x_0, y_0) definiert? Was versteht man unter der Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$? Wie lässt sich die Richtungsableitung geometrisch interpretieren? Seien weiters zwei Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $x \mapsto f(g(x), h(x))$?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 14. März 2014 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' - 20y = e^{10x} + 1.$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, für die die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden $3x - 5y = 7$ ist, sowie die Gleichungen der Tangenten an diesen Punkten.

3)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B (-1+2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wobei der Bereich B das Dreieck in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(6,0)$ und $(0,3)$ bezeichnet.

4)(8 P.) Wann nennt man eine Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ kontrahierend? Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ differenzierbar. Warum folgt aus $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$, dass f eine Kontraktion ist? Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine Kontraktion. Wieviele Elemente hat dann die Menge $\{x \in [a, b] \mid f(x) = x\}$ und wie können diese bestimmt werden?

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe "Grenzwert" und "Häufungspunkt" an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 16. Mai 2014 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig ist.

2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

3)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(6, 2)$, $(5, 5)$ und $(-1, 3)$ bezeichnet.

4)(8 P.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Was bedeuten die folgenden Aussagen? a) $a_n = O(b_n)$, b) $a_n = o(b_n)$, c) $a_n \sim b_n$.

Stimmen die folgenden Schlussfolgerungen?
(Ihre Antwort muss begründet werden!)

d) Aus $a_n = o(1)$ folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
e) Aus $a_n \sim b_n$ folgt $a_n - b_n = o(a_n)$.

Geben Sie weiters je zwei konkrete Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass

f) $a_n = O(b_n)$, g) $a_n = o(b_n)$ gilt bzw h) $a_n = O(b_n)$ <u>nicht</u> gilt.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wie ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ an der Stelle (x_0, y_0) definiert? Was versteht man unter der Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$? Wie lässt sich die Richtungsableitung geometrisch interpretieren? Seien weiters zwei Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $x \mapsto f(g(x), h(x))$?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 3. Juli 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{3^{3n}x^n}{n^2+1}$ konvergiert. Beachten Sie, dass jene Stellen, wo das von Ihnen gewählte Konvergenzkriterium versagt, gesondert untersucht werden müssen!

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' + 7y = e^x - 1.$$

3)(8 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \leq 0, \\ x + \frac{2\log(1+x)}{x} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor im Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ linear approximiert werden? Was versteht man unter der Hesse-Matrix $H_f(a, b)$? Wie hängt $H_f(a, b)$ mit f und der linearen Approximation von f im Punkt (a, b) zusammen? Angenommen, $H_f(a, b)$ sei positiv definit, und es gelte $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Warum hat dann f an der Stelle (a, b) ein lokales Minimum?

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{v}$, jeweils im Punkt (a, b), geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 28. September 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\sqrt{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n + \cos(n\pi)}} \right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

(a) Bestimmen Sie alle eigentlichen und uneigentlichen Häufungspunkte dieser Folge.
(b) Beweisen Sie auch, dass ausser den in (a) gefundenen Häufungspunkten keine weiteren gibt.

2)(8 P.) Man beweise mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)e^{-n}$$

konvergent ist.

3)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x^2 + 2y) + x^2.$$

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache verwenden, dass eine symmetrische 2×2-Matrix genau dann indefinit ist, wenn ihre Determinante negativ ist.

4)(8 P.) Was versteht man darunter, dass eine reelle Funktion f im Punkt x_0 stetig ist? (Geben Sie die exakte ϵ-δ-Definition an!)

Erklären Sie anhand dieser Definition, warum die Funktion $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x \leq 0 \\ 1 & \text{f. } x > 0 \end{cases}$ unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist. Warum ist die Funktion $f_2 : (0, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig? Gibt es eine (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die auf $(0, 1]$ mit f_2 übereinstimmt? (Begründung!)

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{v}$, jeweils im Punkt (a, b), geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 20. November 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B x\cdot|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten $(-1,-2),(-1,3),(2,3)$ und $(2,-2)$ bezeichnet.

2)(8 P.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Beweisen Sie mit Hilfe eines indirekten Beweises, dass aus $a_n \leq b_n$ immer $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ folgt. Stimmt diese Behauptung immer noch, wenn die beiden $\leq$ durch $<$ ersetzt werden (Beweis oder Gegenbeispiel)?

3)(8 P.) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

4)(8 P.) Wie kann man eine Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor quadratisch approximieren. Sei $T(x)$ die quadratische Approximation von $f(x)$. Geben Sie einen exakten Ausdruck für den Fehler $f(x)-T(x)$ an. Bestimmen Sie für $x = 1/2$ eine obere Schranke für $|f(x)-T(x)|$ an, falls (a) $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$ bzw. (b) $f(x) = e^x$.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definieren Sie die Begriffe "relatives Maximum (Minimum)" und "absolutes Maximum (Minimum)" von f. Geben Sie weiters je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums von f an. Prüfen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = 3xy + y^3 - 10x - 5y$ im Punkt $(3, 1)$ ein relatives Extremum besitzt.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 22. Jänner 2016 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+1}{(n+2)!}$.

2)(8 P.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x, y \in [a, b]$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $[a, b]$ konstant ist.

3)(8 P.) Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ definiert eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie $\frac{dz}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel. Machen Sie anschließend die Probe, indem Sie zuerst x und y in z einsetzen und dann nach dem Parameter t differenzieren. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

4)(8 P.) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und illustrieren Sie ihn durch eine Skizze.
(Der Zusammenhang zwischen Skizze und Aussage des Satzes muss genau erklärt werden!)

5)(8 P.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was versteht man unter (i) der Beschränktheit von f, (ii) einer Zerlegung Z von $[a, b]$ und der Feinheit von Z, (iii) der Obersumme von f über $[a, b]$? Wie lautet das Riemannsche Integrabilitätskriterium?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 11. März 2016 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)
2)
3)
4)
5)

1)(8 P.) a) Beweisen Sie mit Hilfe der Differentialrechung, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung $\ln(x) < \frac{x}{2}$ gilt.
Hinweis: Wo ist die Differenz der beiden Seiten der beiden Seiten der Ungleichung minimal?

b) Leiten Sie aus a) die folgende Ungleichung her:
Für alle positiven natürlchen Zahlen n gilt $\ln(n) < \sqrt{n}$.

c) Benutzen Sie b), um die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{\ln n}{n}$ zu zeigen, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ angeben.

2)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to 0+} x^x$.

3)(8 P.) Bestimmen Sie jene Lösung der linearen Differentialgleichung $2y'' + 3y' - 5y = 0$, die den Anfangsbedingungen $y(0) = 3/2$, $y'(0) = -5$ genügt.

4)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a,b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,\mathrm{d}z.$$

5)(8 P.) Wie lautet die Taylorreihenentwicklung einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit Anschlussstelle x_0)?
Wie lautet das Taylorsche Näherungspolynom zweiten Grades einer Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (mit Anschlussstelle (x_0, y_0))?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 6. Mai 2016 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B x \cdot |y| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(-1, -2), (-1, 3), (2, 3)$ und $(2, -2)$ bezeichnet.

2)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

4)(8 P.) Definieren Sie die Begriffe partielle Ableitung, Richtungsableitung, Gradient für Funktionen in zwei Variablen und geben Sie jeweils ein Beispiel an.

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Juli 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t.$$

Warum ist $\Gamma(x)$ ein uneigentliches Integral? Beweisen Sie, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gilt und leiten Sie daraus die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$ her.

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

3)(8 P.) Berechnen Sie unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{2^n}.$$

4)(8 P.) Was versteht man darunter, dass eine reelle Funktion f im Punkt x_0 stetig ist? (exakte ε-δ-Definition und auch anschaulich!)

Erklären Sie anhand der ε-δ-Definition, warum die Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x \leq 0 \\ 1 & \text{f. } x > 0 \end{cases}$$

unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist.

Warum ist die Funktion

$$f_2 : (0, 1] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?

Gibt es eine auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die auf $(0, 1]$ mit f_2 übereinstimmt? (Begründung!)

5)(8 P.) Was ist eine Potenzreihe?

Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe?
(Bemerkung: Es ist bei dieser Frage nicht die Formel zur Berechnung des Konvergenzradius gefragt!)

Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen?

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die man um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln kann? Wie lautet in diesem Fall die Potenzreihe von $f(x)$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 29. September 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ erfüllt.

Zeigen Sie: a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. b) f ist eine konstante Funktion.

2)(8 P.) Gegeben ist die Differentialgleichung $x^2y'' - 6y = 12\ln x$.

Beschreiben Sie den Typ dieser Differentialgleichung (linear/nichtlinear, homogen/inhomogen, Ordnung, etc.)!

Beweisen Sie, dass für alle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist!

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung!

Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = \frac{2}{3}$, $y'(1) = -1$.

3)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)^2} + \frac{1}{(3n+3)^2} + \frac{1}{(3n+5)^2} + \cdots + \frac{1}{(3n+2n+1)^2}$$

Schreiben Sie die Folge kompakter in der Form $a_n = \sum_{?}^{?} ?$ auf, in dem Sie die Fragezeichen durch passende Ausdrücke ersetzen!

Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Zeigen Sie weiters, dass $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

4)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit.

Wie lässt sich die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{v}$ im Punkt (a, b) geometrisch beschreiben?

Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = (1 + 2x)\arctan(\ln(2y^2))$ in Richtung des Vektors $(1, 0)$ im Punkt $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

5)(8 P.) Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a, b)$ definiert?

Rechnen Sie $(x^2)' = 2x$ mit Hilfe dieser Definition nach!

Wie lautet die Kettenregel fürs Differenzieren? Geben Sie eine vollständige Formulierung in Form eines mathematischen Theorems, d.h. gefordert ist eine Formulierung in ganzen Sätzen, die auch alle nötigen Voraussetzungen angibt!

Sei $g = f^{-1}$. Weiters gelte, dass f und g differenzierbar sind und dass $f'(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass dann $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 24. November 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) $\iint_B (|x|y + x^2 - y^2)\, dx\, dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ und $(-1, 5)$ bestimmt ist.

2)(8 P.) Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(x)\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} g(x)\right)$$

3)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{1/\ln x}.$$

Anleitung: Stellen Sie die Funktion mit Hilfe der Identität $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ in der Form $e^{a(x)/b(x)}$ dar. Bestimmen Sie dann $c = \lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{b(x)}$. Der gesuchte Grenzwert ist dann e^c. (Warum gilt das?)

4)(8 P.) Sei $f(x, y)$ eine reellwertige Funktion. Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert? Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$? Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist? (Begründung! Welche Voraussetzungen legen Sie bei Ihrer Antwort zugrunde?)

5)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion. Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$? Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert? Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert. Begründen Sie auch, warum es nicht existiert. Wie ist das unbestimmte Integral der Funktion f definiert?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. Jänner 2018 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{xy}{x^2+1}$$

und finden Sie die allgemeine Lösung.

2)(8 P.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen im Punkt (0,0).
Berechnen Sie $\lim_{t\to 0} f(t, t^2)$.
Untersuchen Sie, ob $f(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist.

3)(8 P.) Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation (also die entsprechenden Taylorpolynome) der Funktion

$$f(x,y) = e^{x+y-3}\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)$$

für den Entwicklungspunkt $(x,y) = (2,1)$.

4)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung?

Wie sieht die Lösungsmenge so einer Differentialgleichung aus? Wie kann man infolge dessen die Lösungsmenge am einfachsten beschreiben?

Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip für inhomogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

Beweisen Sie das Superpositionsprinzip für inhomogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

5)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion.

Was ist eine Zerlegung von $[a, b]$ und wie ist die Feinheit einer Zerlegung definiert?

Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$?

Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert?

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert, und begründen Sie mit Hilfe von Riemann'schen Zwischensummen, warum es nicht existiert.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 9. März 2018 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B |xy| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(-1, -2), (-1, 3), (2, 3)$ und $(2, -2)$ bezeichnet.

2)(8 P.) Gegeben ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sqrt{j}-2\sqrt{j+1}+\sqrt{j+2}\right)$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe gegeben ist durch $s_n = -1-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$.

Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Manchmal hilft es, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ um $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ zu erweitern.

3)(8 P.) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, für die die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden $3x - 5y = 7$ ist, sowie die Gleichungen der Tangenten an diesen Punkten.

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

5)(8 P.) Was ist eine Potenzreihe?

Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe?

(Bemerkung: Es ist bei dieser Frage nicht die Formel zur Berechnung des Konvergenzradius gefragt!)

Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen?

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die man um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln kann? Wie lautet in diesem Fall die Potenzreihe von $f(x)$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Mai 2018 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x^2 + 2y) + x^2.$$

Bemerkung: Eine symmetrische 2×2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a,b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_x^y e^{\tan(z^2)}\,\mathrm{d}z.$$

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 21. Mai 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Beweisen Sie die folgende Formel (mit $n \in \mathbb{N}$) mit vollständiger Induktion:

$$\int x^n (\log x)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!(n+1)^{k+1}} x^{n+1} (\log x)^{n-k}$$

2)(8 P.) Beweisen Sie, dass die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x^2y'' - 6y = 12\ln x$$

durch

$$y(x) = C_1x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist.
Wie lautet die partikuläre Lössung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

4)(8 P.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Ergänzen Sie die folgende Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ heißt stetig an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ definitionsgemäß genau dann, wenn ...

Zeigen Sie: Für jede $m \times n$-Matrix A ist die Funktion $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ stetig an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Resultats, dass $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ an jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ stetig ist.

5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} \, \mathrm{d}z.$$

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 2. Juli 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 2^n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$.

2)(8 P.) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine auf dem ganzen Definitionsbereich stetige Funktion. Beweisen Sie, dass dann ein $x \in [a, b]$ existiert, für das $f(x) = x$ gilt.

3)(8 P.) Gegeben ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{j} - 2\sqrt{j+1} + \sqrt{j+2}\right)$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe durch $s_n = -1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ gegeben ist.

Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Manchmal hilft es, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ um $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ zu erweitern.

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Z}$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

5)(8 P.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Erklären Sie anschaulich, was man unter der Stetigkeit von f auf $[a, b]$ versteht.

Formulieren Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit.

Wie sehen alle auf dem Intervall $[a, b]$ „stetigen“ Funktionen aus, wenn man in der Definition der Stetigkeit die Reihenfolge der Quantoren (von ε und δ) vertauscht?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Oktober 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Für welche komplexen Zahlen x ist diese Reihe konvergent?

Hinweis: Die Stirling'sche Formel lautet $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, wobei e die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828\ldots$ bezeichnet. Außerdem gilt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2)(8 P.) a) Beweisen Sie mit Hilfe der Differentialrechung, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung $\ln(x) < \frac{x}{2}$ gilt.
Hinweis: Wo ist die Differenz der beiden Seiten der beiden Seiten der Ungleichung minimal?

b) Leiten Sie aus a) die folgende Ungleichung her:
Für alle positiven natürlchen Zahlen n gilt $\ln(n) < \sqrt{n}$.

c) Benutzen Sie b), um die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{\ln n}{n}$ zu zeigen, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ angeben.

3)(8 P.) a) Beweisen Sie, dass das Restglied zum Taylor-Polynom nullter Ordnung einer Funktion $f(x)$ an der Anschlussstelle a auch durch

$$\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

darstellbar ist.

b) Beweisen Sie, dass das Restglied zum Taylor-Polynom erster Ordnung einer Funktion $f(x)$ an der Anschlussstelle a auch durch

$$\int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

darstellbar ist.

4)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion.

Was ist eine Zerlegung von $[a, b]$ und wie ist die Feinheit einer Zerlegung definiert?

Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$?

Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert?

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f, für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert, und begründen Sie mit Hilfe von Riemann'schen Zwischensummen, warum es nicht existiert.

5)(8 P.) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Was bedeuten die folgenden Aussagen? a) $a_n = O(b_n)$, b) $a_n = o(b_n)$, c) $a_n \sim b_n$.

Stimmen die folgenden Schlussfolgerungen?
(Ihre Antwort muss begründet werden!)

d) Aus $a_n = o(1)$ folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.
e) Aus $a_n \sim b_n$ folgt $a_n - b_n = o(a_n)$.

Geben Sie weiters je zwei konkrete Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass

f) $a_n = O(b_n)$, g) $a_n = o(b_n)$ gilt bzw h) $a_n = O(b_n)$ <u>nicht</u> gilt.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 22. November 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{3^{3n}x^n}{n^2+1}$ konvergiert. Beachten Sie, dass jene Stellen, wo das von Ihnen gewählte Konvergenzkriterium versagt, gesondert untersucht werden müssen!

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = e^x - 1.$$

3)(8 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \leq 0, \\ x + \frac{2\log(1+x)}{x} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

4)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} \, \mathrm{d}z.$$

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors $\mathbf{v}$, jeweils im Punkt (a, b), geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 24. Jänner 2020 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)
2)
3)
4)
5)

1)(8 P.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $(1,2)$ im Punkt (0,0).
Berechnen Sie $\lim_{t\to 0} f(t,t^3)$.
Bestimmen Sie die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist stetig an der Stelle } (x,y)\}$.

2)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+4)^2} + \frac{1}{(2n+9)^2} + \frac{1}{(2n+16)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+4n^2)^2}$$

Schreiben Sie die Folge kompakter in der Form $a_n = \sum_{?}^{?} ?$ auf, in dem Sie die Fragezeichen durch passende Ausdrücke ersetzen!

Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Zeigen Sie weiters, dass $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

3)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Weiters seien $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert?

Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$?

Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$ an der Stelle x_0, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort und nennen Sie die Voraussetzungen, die Sie dabei zugrunde legen!

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die zwei Grenzwerte hat? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, beweisen Sie, dass es so eine Folge nicht geben kann.