Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 5. Februar 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei Γ die Einheitengruppe von $(\mathbb{Z}_{15}, +, \cdot)$, also die Menge aller Restklassen $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{15}$ mit $\mathrm{ggT}(a, 15) = 1$. Bestimmen Sie Γ, die von $\overline{4}$ erzeugte Untergruppe U von Γ sowie die Faktorgruppe Γ/U (durch Angabe der Menge und der Operationstafel).

2)(8 P.) Berechnen Sie $\det(A^3)$ und untersuchen Sie, ob A^4 invertierbar ist. Dabei sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

3)(8 P.) Wieviele verschiedene Permutationen der Buchstaben des Worts MATHEMATIK gibt es? Wieviele dieser Permutationen beginnen mit M? In wievielen dieser Permutationen (der ersten Frage!) sind die beiden A nebeneinander? Alle Antworten müssen auch begründet werden.

4)(8 P.) Was versteht man unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen? Nennen Sie zwei verschiedene Elemente des kartesichen Produkts von $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{R}^2$? Was versteht man unter einer binären Relation auf einer Menge? Geben Sie je ein Beispiel für die folgenden Relationen: (i) symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}_5$, (ii) nicht symmetrische Relation auf $\mathbb{Z}_5$, (iii) antisymmetrische Relation auf $\mathbb{N}$.

5)(8 P.) Seien $(G, \circ)$ und $(H, \heartsuit)$ zwei Gruppen. Wie ist ein Homomorphismus von G nach H definiert? Wann werden $(G, \circ)$ und $(H, \heartsuit)$ isomorph genannt? Nennen Sie zwei verschiedene, aber isomorphe Untergruppen U_1 und U_2 der symmetrischen Gruppe S_3 und geben Sie einen Isomorphismus zwischen U_1 und U_2 konkret an.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 1. März 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Berechnen Sie die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, die höchstens 2 Elemente der Menge $\{1, 2, 3\}$ und genau 3 Elemente der Menge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ enthalten.

(Begründen Sie Ihre Antwort so, dass der Rechenweg nachvollziehbar ist!)

2)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

3)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

4)(8 P.) Was ist ein bewerteter Graph? Wozu dient der Disktra-Algorithmus? Welche Voraussetzung muss ein bewerteter Graph erfüllen, damit der Disktra-Algorithmus korrekt ist? Geben Sie ein Beispiel eines bewerteten Graphen an, wo diese Voraussetzung verletzt ist und der Algorithmus ein falsches Resultat liefert.

5)(8 P.) Gegeben ist die ISBN 3-211-82748-X. Wo steht dabei die Prüfziffer, welche Funktion hat sie und wie wird sie berechnet? Beweisen Sie, dass beim ISBN-Code sowohl Einzelfehler als auch beliebige Vertauschungsfehler erkannt werden.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 3. Mai 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, ob die Menge

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b & a \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der Matrizenaddition und -multiplikation einen Körper bildet. Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, daß die Menge *aller* reellen 2x2-Matrizen mit der Matrizenaddition und -multiplikation ein Ring ist.

2)(8 P.) a) Beschreiben Sie die Methode der vollständigen Induktion!

b) Illustrieren Sie diese Methode anhand eines Beweises für die Identität

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3, \qquad n \geq 1.$$

3)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Bildraums $f(\mathbb{R}^4)$.

4)(8 P.) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wobei $c > 0$. Welche Beziehung zwischen a, b und c wird durch die Formel $a \equiv b \mod c$ beschrieben? Was versteht man unter einer Restklasse modulo c? Geben Sie eine dieser Restklassen konkret an! Seien $\bar{x}$ und $\bar{y}$ Resklassen modulo c. Wie ist das Produkt $\bar{x} \cdot \bar{y}$ definiert? Beschreiben Sie die Menge all jener Restklassen, die bezüglich des Produkts invertierbar sind.

5)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 28. Juni 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Gegeben seien 8 Bücher in englischer, 7 Bücher in französischer und 10 Bücher in deutscher Sprache. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Bücher so auszuwählen, daß jede der drei Sprachen vertreten ist?

2)(8 P.) Wie ist die Inverse einer Matrix A definiert? Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3)(8 P.) a) Beschreiben Sie die Methode der vollständigen Induktion!

b) Illustrieren Sie diese Methode anhand eines Beweises für die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \qquad n \geq 0.$$

4)(8 P.) Definieren Sie, was $a|b$ (a teilt b) und was $d = \mathrm{ggT}(a,b)$ (d ist größter gemeinsamer Teiler von a und b) für ganze Zahlen a, b, d bedeutet. Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(1198009, 565679)$ mit dem Euklidischen Algorithmus. Begründen Sie allgemein oder anhand der eben durchgeführten Rechnungen, warum der Euklidische Algorithmus wirklich den ggT der beiden Ausgangszahlen liefert. Finden Sie einen Teiler von 565679, der nicht Teiler von 1198009 ist. (Begründung!)

5)(8 P.) Gegeben sei eine Menge $M = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ von Vektoren eines Vektorraums V. Definieren Sie, was die folgenden Aussagen bzw. Begriffe bedeuten:
(a) M ist linear unabhängig. (b) M ist eine Basis von V. (c) Die Dimension von V ist 7. (d) Lineare Hülle von M.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Oktober 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

2)(8 P.) Gegeben sei die Menge $M = \{2, .., 6\}$ und zwei Relationen R und S auf M, definiert durch

$$xRy :\Longleftrightarrow 2x - 3 \mid 2y - 3, \qquad xSy :\Longleftrightarrow 2x - 2 \mid 3y - 3.$$

Untersuchen Sie, welche dieser Relationen eine Halbordnung oder sogar Totalordnung ist? Falls eine Halbordnung vorliegt, geben Sie auch das zugehörige Hassediagramm an!

3)(8 P.) Wieviele Möglichkeiten gibt es k natürliche Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_k$ auszuwählen, sodass

a) $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_k \leq n$

b) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$

c) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$

gilt? Alle antworten müssen begründet werden! (In ganzen Sätzen, nicht in Stichworten!)

4)(8 P.) Sei $\circ$ eine zweistellige Operation auf der Menge A. Geben Sie exakte Definitionen für die folgenden Eigenschaften für $(A, \circ)$ an:

(1) Assoziativgesetz
(2) Existenz eines neutralen Elements
(3) Existenz von inversen Elementen

Geben Sie weiters je ein Beispiel einer Struktur $(A, \circ)$ an, die

a) nur (1),
b) (1) und (2), aber nicht (3),
c) alle drei Eigenschaften besitzt.

5)(8 P.) Gelten folgende Formeln? Geben Sie jeweils eine verbale Begründung. (In ganzen Sätzen, nicht in Stichworten!)

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \; x < y$

(2) $\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N} : \; x < y$

(3) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} : \; y < x$

(4) $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z} : \; y < x$

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 29. November 2013 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)
2)
3)
4)
5)

1)(8 P.) a) Beschreiben Sie die Methode der vollständigen Induktion!

b) Illustrieren Sie diese Methode anhand eines Beweises der Aussage

$$\det(\bar{A}) = \overline{(\det A)}.$$

Dabei bezeichnet A eine $n \times n$-Matrix mit komplexwertigen Einträgen, $\bar{z}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl und $\bar{A}$ die Matrix, die aus A durch Konjugieren aller Einträge hervorgeht.

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems

$$
\begin{aligned}
x + z - u &= -1 \\
3x + y + 5z - u &= -2 \\
-3x + 2y + z + 7u &= 5 \\
x + 2y + 5z + 3u &= 1
\end{aligned}
$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3)(8 P.) Seien $(G, *)$ und $(H, \circ)$ zwei Gruppen. Wir definieren auf $G \times H$ eine Operation wie folgt: Seien $a, b \in G$ und $x, y \in H$, dann sei

$$(a, x)\Delta(b, y) := (a * b, x \circ y).$$

Untersuchen Sie, ob $(G \times H, \Delta)$ eine Gruppe ist.

4)(8 P.) Sei A eine Menge. Was versteht man unter einer binären Relation auf A? Wann bezeichnet man so eine Relation als Äquivalenzrelation, wann als Funktion?

5)(8 P.) Sei V ein Vektorraum. Wann nennt man eine Teilmenge $M \subseteq V$ linear unabhängig? Was versteht man unter einer Basis von V? Wie ist die Dimension von V definiert? Sei $f : V \to V$ eine injektive lineare Abbildung und $X \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge. Zeigen Sie, dass dann $f(X)$ ebenfalls linear unabhängig ist!

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 3. Februar 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Seien k und n zwei positive natürliche Zahlen.

Wie viele Funktionen $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es, sodass
a) $1 \leq f(1), f(2), \ldots, f(k) \leq n$,
b) $1 \leq f(1) < f(2) < \cdots < f(k) \leq n$ bzw.
c) $1 \leq f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k) \leq n$
gilt?

Alle antworten müssen begründet werden!
(In ganzen Sätzen, nicht in Stichworten!)

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} 4x + y + 6z - 2u &= -3 \\ 3x + y + 5z - u &= -2 \\ -3x + 2y + z + 7u &= 5 \\ -2x + 4y + 6z + 10u &= 6 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3)(8 P.) Stellen Sie alle Werte von

$$\frac{\sqrt{4\cos\frac{2\pi}{3} + 4i\sin\frac{2\pi}{3}}}{(i-3)^2}$$

in der Form $a + ib$ dar.

4)(8 P.) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wobei $c > 0$. Welche Beziehung zwischen a, b und c wird durch die Formel $a \equiv b \mod c$ beschrieben? Was versteht man unter einer Restklasse modulo c? Wählen Sie für den Spezialfall $c = 6$ eine dieser Restklassen aus und geben Sie 3 Elemente der ausgewählten Klasse an!

Seien $\bar{x}$ und $\bar{y}$ Resklassen modulo c. (Hier ist wieder ein allgemeines c gemeint!) Wie ist das Produkt $\bar{x} \cdot \bar{y}$ definiert? Durch welche Eigenschaft kann man die Menge all jener Restklassen charakterisieren, die bezüglich des Produkts invertierbar sind?

5)(8 P.) Seien A und B beliebige Menge und V und W zwei Vektorräume über einem Körper K. Wann nennt man eine Abbildungen $g : A \to B$ injektiv? Wann nennt man eine Teilmenge $M \subseteq V$ linear unabhängig?

Sei $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung und $X \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge. Zeigen Sie, dass dann die Menge $f(X) = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in X\}$ ebenfalls linear unabhängig ist! Zeigen Sie weiters, dass eine lineare Abbildung $h : V \to W$ genau dann injektiv ist, wenn $\ker h = \{\mathfrak{o}\}$.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 6. März 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) a) Beschreiben Sie die Methode der vollständigen Induktion!

b) Illustrieren Sie diese Methode anhand eines Beweises der Aussage

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \text{ für } n \geq 1.$$

2)(8 P.) Zeigen Sie, daß die von $\bar{5}$ erzeugte Untergruppe U von $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ ein Normalteiler von $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ ist, und bestimmen Sie die Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{15}/U$, indem Sie die zugrunde liegende Menge und die Operationstafel angeben!

3)(8 P.) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{b}_3$ mit folgenden Eigenschaften: (a) $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, (b) $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 1$.

4)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

5)(8 P.) Was ist ein bewerteter Graph? Wozu dient der Dijkstra-Algorithmus? Welche Voraussetzung muss ein bewerteter Graph erfüllen, damit der Disktra-Algorithmus ein korrektes Resultat liefert? Geben Sie ein Beispiel eines bewerteten Graphen an, wo diese Voraussetzung verletzt ist und der Algorithmus ein falsches Resultat liefert.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. April 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_3 (das ist die Menge aller geraden Permutationen in S_3) ein Normalteiler der symmetrischen Gruppe S_3 ist.
Wie sieht die S_3/A_3 aus? (Angabe der zugrunde liegenden Menge und der Operationstafel der Gruppenoperation!)
Geben Sie weiters einen Isomorphismus zwischen S_3/A_3 und $(\{-1, 1\}, \cdot)$ an!

2)(8 P.) a) Geben Sie eine mathematische Formel für den n-te Term der Zahlenfolge $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}, \ldots$ an. Die Terme sollen nicht ausgerechnet werden!

b) Wie a) nur für die Zahlenfolge $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots$. Verwenden Sie zur Lösung das Summenzeichen!

c) Drücken Sie die n-te Summe der im folgenden aufgelisteten Summe mittels mathematischer Summennotation aus!

$$(i)\frac{1}{2!}, (ii)\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}, (iii)\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!},$$
$$(iv)\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}, \ldots$$

d) Beweisen Sie mit vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

Bemerkung: Punkt d) bringt bis zu 8 Punkte, falls alle der Teilaufgaben a)-c) richtig beantwortet werden, bis zu 4 Punkte bei zwei richtigen Antworten, andernfalls 0 Punkte!

3)(8 P.) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{b}_3$, sodass $\{\mathbf{b}_3\}$ sowohl auf $\mathbf{b}_1$ als auch auf $\mathbf{b}_2$ normal steht und $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 1$ gilt, indem Sie die gegebenen Bedingungen in ein lineares Gleichungssystem übersetzen und dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen.

4)(8 P.) Was ist ein bewerteter Graph? Wozu dient der Dijkstra-Algorithmus? Welche Voraussetzung muss ein bewerteter Graph erfüllen, damit der Disktra-Algorithmus ein korrektes Resultat liefert? Geben Sie ein Beispiel eines bewerteten Graphen an, wo diese Voraussetzung verletzt ist und der Algorithmus ein falsches Resultat liefert.

5)(8 P.) Seien V und W zwei Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiters gelte $\dim V = n$ und $\dim W = m$, und es sei $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ die Abbildungsmatrix von f bezüglich zweier Basen $B_V = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ bzw. $B_W = (\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{b}}_m)$ von V bzw. W. Wie groß ist k? Was versteht man unter $f(V)$? Wie ist der Rang von f und der Rang von A definiert? Wieviele Zeilen hat A? Wie hängen die Vektoren der Basis B_V mit den Spalten von A zusammen?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. Juni 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Beschreiben Sie die Symmetriegruppe G eines Quadrates und die Symmetriegruppe H eines Rechtecks. Untersuchen Sie, ob H ein Normalteiler von G ist, und bestimmen Sie die (Links-)Nebenklassenzerlegung von G bzgl. H.

Hinweis: Die Gruppen G und H lassen sich als Permutationsgruppen auf der Menge der Eckpunkte auffassen.

2)(8 P.) a) Geben Sie eine mathematische Formel für den n-ten Term der Zahlenfolge $1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}, \ldots$ an. Die Terme sollen nicht ausgerechnet werden!

b) Wie a) nur für die Zahlenfolge $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots$. Verwenden Sie zur Lösung das Summenzeichen!

c) Drücken Sie die n-te Summe der im folgenden aufgelisteten Summe mittels mathematischer Summennotation aus!

$$(i)\frac{1}{2!}, (ii)\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}, (iii)\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!},$$
$$(iv)\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}, \ldots$$

d) Beweisen Sie mit vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$

Bemerkung: Punkt d) bringt bis zu 8 Punkte, falls alle der Teilaufgaben a)-c) richtig beantwortet werden, bis zu 4 Punkte bei zwei richtigen Antworten, andernfalls 0 Punkte!

3)(8 P.) Führen Sie alle Schritte des Quicksort-Algorithmus für den folgenden Datensatz durch:

$$(3, 1, 8, 2, 7, 4, 6, 5)$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

5)(8 P.) Sei M eine Menge. Was versteht man unter einer Äquivalenzrelation auf M? Was versteht man unter einer Partition der Menge M? Wie hängen diese beiden Begriffe zusammen?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 2. Oktober 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4 sowie $\binom{2}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$ und $\binom{5}{2}$. Nutzen Sie Ihre Beobachtung zum Aufstellen einer Vermutung der Form $A^n = \dots$.

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion!

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} 4x + y + 6z - 2u &= -3 \\ 3x + y + 5z - u &= -2 \\ -3x + 2y + z + 7u &= 5 \\ -2x + 4y + 6z + 10u &= 6 \end{aligned}$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

3)(8 P.) Sei n eine positive natürliche Zahl. Beweisen Sie mit Hilfe eines Schubfachschlusses, dass es in jeder Menge $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$, die mehr als n Elemente hat, zwei Zahlen $x, y \in A$ so gibt, dass $\operatorname{ggT}(x, y) = 1$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es ein i gibt, für welches sowohl $2i - 1 \in A$ als auch $2i \in A$.

4)(8 P.) Sei $\circ$ eine zweistellige Operation auf der Menge A. Geben Sie exakte Definitionen für die folgenden Eigenschaften für $(A, \circ)$ an:

(1) Assoziativgesetz
(2) Existenz eines neutralen Elements
(3) Existenz von inversen Elementen

Geben Sie weiters je ein Beispiel einer Struktur $(A, \circ)$ an, die

a) nur (1),
b) (1) und (2), aber nicht (3),
c) alle drei Eigenschaften besitzt.

5)(8 P.) Sei M eine Menge. Was versteht man unter einer Äquivalenzrelation auf M? Was versteht man unter einer Partition der Menge M? Wie hängen diese beiden Begriffe zusammen?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 27. November 2015 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

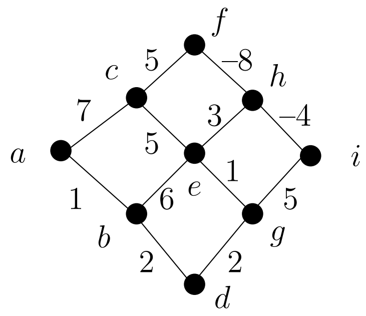
1)
2)
3)
4)
5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie weiters zu jedem Eigenwert sämtliche Eigenvektoren.

2)(8 P.) Wenden Sie den Algorithmus von Dijkstra auf den folgenden Graphen an, um einen küzesten Weg von a nach h zu ermitteln.



Gibt es kürzere Wege als den von Ihnen ermittelten? Woran liegt das?

3)(8 P.) Gegeben sei die Gruppe $(G, +)$ mit $G = \mathbb{Z}_2^4$ und komponentenweise definierter Addition modulo 2, d.h.,

$$(a, b, c, d) + (w, x, y, z) =$$
$$(a + w \mod 2, \quad b + x \mod 2, \quad c + y \mod 2, \quad d + z \mod 2).$$

Bestimmen Sie die kleinste Untergruppe U von G, die die Elemente $(1, 1, 0, 1)$ und $(0, 1, 0, 1)$ enthält.
Wieviele verschiedene Nebenklassen von U in gibt es in G?
Bestimmen Sie alle Nebenklassen von U in G!

4)(8 P.) (a) Beschreiben Sie das Prinzip der vollständigen Induktion: Welche Art von Aussagen lassen sich damit behandeln? Wie funktioniert die Methode? Aus welchem Grund ist Methode logisch korrekt?

(b) Illustrieren Sie die Methode der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ ist $3^{2n} + 7$ durch 8 teilbar.

Bemerkung: Teilaufgabe (b) bringt maximal 8 Punkte. Jede falsche Antwort in (a) halbiert die in (b) erreichten Punkte.

5)(8 P.) Gegeben ist die ISBN 3-211-82748-X. Wo steht dabei die Prüfziffer, welche Funktion hat sie und wie wird sie berechnet? Beweisen Sie, dass beim ISBN-Code sowohl Einzelfehler als auch beliebige Vertauschungsfehler erkannt werden.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 31. Jänner 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei R die Relation auf $\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, die durch $(a,b)R(c,d) \;:\Longleftrightarrow\; ad = bc$ definiert ist. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Bezeichne $K(x,y)$ die Äquivalenzklasse von R, in der (x,y) liegt, d.h.

$$K(x,y) = \{(u,v) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \mid (u,v)R(x,y)\}.$$

Weiters bezeichne M die Menge aller Äquivalenzklassen von R. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : M \to \mathbb{Q}, \quad K(x,y) \mapsto \frac{x}{y}$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Bemerkung: Die Abbildung f ist wohldefiniert, wenn jeder Klasse $K(x,y)$ genau eine rationale Zahl zugeordnet wird.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, für welche (a,b) die Gleichung $K(a,b) = K(x,y)$ gilt. Zeigen Sie dann die Äquivalenz $K(a,b) = K(x,y) \iff \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$. Eine der beiden Implikationen beweist die Wohldefiniertheit (welche?), die andere die Injektivität.

2)(8 P.) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=0}^{n} a_i^2 = a_n a_{n+1}.$$

3)(8 P.) Gegeben seien 9 Bücher in englischer, 7 Bücher in französischer und 10 Bücher in deutscher Sprache. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 7 Bücher so auszuwählen, dass jede der drei Sprachen vertreten ist?

Bemerkung: Die Dezimaldarstellung der gesuchten Zahl muss nicht angegeben werden. Es genügt, die Zahl mit Hilfe von kombinatorischen Funktionen (Fakultäten, Binomialkoeffizienten, Potenzen, ...) auszudrücken.

4)(8 P.) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$.
Wann nennt man A eine orthogonale Matrix?
Beweisen Sie, dass $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt.
Welche wichtigen geometrischen Eigenschaften besitzt die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$?
Beweisen Sie, dass $|\det A| = 1$.

5)(8 P.) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Weiters sei f die durch $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ definierte Abbildung, und $\mathrm{im}(f)$ bezeichne das Bild von f.

Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Ankreuzen!
(Es können auch mehrere Antworten richtig sein.
Jede komplett richtig beantwortete Frage bringt einen Punkt.)

(1) $z - \bar{z} = 0 \Longleftrightarrow$	$z = 0$ ◯ $z \in \mathbb{R}$ ◯ $\lvert z\rvert = 1$ ◯
(2) Die Menge $\{w \in \mathbb{C} : \ \lvert w - a\rvert \leq b\}$ ist	eine Gerade ◯ ein Quadrat ◯ ein Kreis ◯ eine Halbebene ◯
(3) Die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \lvert z\rvert$ ist	injektiv ◯ surjektiv ◯ bijektiv ◯ weder injektiv noch surjektiv ◯
(4) $z \cdot \bar{z}$ ist bzw. ist gleich	$\lvert z\rvert$ ◯ iz ◯ reell ◯ $\lvert z\rvert^2$ ◯
(5) $\ker(f) \subseteq \mathbb{C}^n$	wahr ◯ falsch ◯
(6) Es gilt: $\mathrm{rg}(A)$	$\leq m$ ◯ $< m$ ◯ $\leq n$ ◯ $> n$ ◯
(7) Die Spalten von A sind	ein Erzeugendensystem von $\ker(f)$ ◯ eine Basis von $\ker(f)$ ◯ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{im}(f)$ ◯ eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ ◯
(8) Das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat	
eine eindeutige Lösung, wenn $m = n$;	wahr ◯ falsch ◯
eine Lösungsmenge mit Dimension mindestens $n - m$, wenn $n \geq m$ und $\mathbf{b} = \mathfrak{o}$.	wahr ◯ falsch ◯

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 3. März 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Wie viele verschiedene Variablennamen kann man in einer fiktiven Programmiersprache verwenden, wenn diese Namen aus mindestens einem, höchstens aber fünf (nicht notwendig verschiedenen) Buchstaben (aus der Menge $\{A, \ldots, Z\}$) bestehen müssen und die Befehle `AND`, `OR`, `IF`, `THEN` und `GOTO` nicht als Teilwörter enthalten sein dürfen.

2)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der linearen Rekursion

$$a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + 4^{n+2}$$

für $a_0 = a_1 = 2$.

3)(8 P.) Sei $M := \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$. Weiters seien die binären Relationen

$$R_A := \{(x, 2x) \mid x \in A\} \text{ und } S_A := \{(2x, x) \mid x \in A\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle $A \in M$, für die die Relation R_A sogar eine Funktion ist. Für welche dieser A ist die durch R_A definierte Funktion bijektiv? Bestimmen Sie weiters alle $A \in M$, für die die Relation S_A eine Funktion ist.

(Alle Antworten müssen begründet werden!)

(b) Für zwei Relationen $U \subseteq X \times Y$ und $V \subseteq Y \times Z$ sei das Relationenprodukt $V \circ U \subseteq X \times Z$ durch

$$V \circ U := \{(x, z) \mid \exists y \in Y : (x, y) \in U \text{ und } (y, z) \in V\}$$

definiert. Beschreiben Sie $S_A \circ R_A$ und $R_A \circ S_A$, jeweils für alle $A \in M$.

4)(8 P.) Seien V und W zwei Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiters gelte $\dim V = n$ und $\dim W = m$, und es sei $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ die Abbildungsmatrix von f bezüglich zweier Basen $B_V = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ bzw. $B_W = (\tilde{\mathbf{b}}_1, \tilde{\mathbf{b}}_2, \ldots, \tilde{\mathbf{b}}_m)$ von V bzw. W. Wie groß ist k? Was versteht man unter $f(V)$? Wie ist der Rang von f und der Rang von A definiert? Wieviele Zeilen hat A? Wie hängen die Vektoren der Basis B_V mit den Spalten von A zusammen?

5)(8 P.) Sei $G = (V, E)$ ein schlichter, ungerichteter Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$. Wann heißt G zusammenhängend? Wann ist G ein Baum? Was versteht man unter der Adjazenzmatrix A von G? Wie kann man die Einträge der Matrix A^4 interpretieren?

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 28. April 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Wie viele Schnittpunkte können n Geraden in der Ebene höchstens haben? Geben Sie eine rekursive und eine explizite Formel an. Begründen Sie die rekursive Formel. Beweisen Sie die explizite Formel aus der rekursiven mittels vollständiger Induktion.

2)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 5 \end{aligned}$$

3)(8 P.) Sei $M = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \text{ ist endlich oder } \mathbb{N} \setminus X \text{ ist endlich}\}$. Untersuchen Sie, ob die algebraische Struktur $(M, \cap, \cup)$ ein Verband ist, d.h. ob $(M, \cap)$ und $(M, \cup)$ kommutative Halbgruppen sind, für alle $A, B \in M$ die Gleichungen $A \cap (A \cup B) = A$ und $A \cup (A \cap B) = A$ gelten.

Bemerkung: Die Assoziativität und die Kommutativität von $\cap$ und $\cup$ dürfen ohne Beweis vorausgesetzt werden.

4)(8 P.) Was versteht man unter der Restklasse einer ganzen Zahl z modulo n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)? Wie ist der Restklassenring Z_n definiert (Definition der Menge sowie der Rechenoperationen)? Geben Sie für $n = 5$ die Operationstafeln für „+“ und „·“ explizit an. Wodurch unterscheidet sich der Fall, wo n eine Primzahl ist, von den anderen Fällen?

5)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. Juni 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f und eine Basis von $f(\mathbb{R}^4)$.

2)(8 P.) Sei $n > 0$ und $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Weiters seien die Mengen $\mathcal{P}_g(M) = \{A \subseteq M \mid \#A \text{ gerade}\}$ und $\mathcal{P}_u(M) = \{A \subseteq M \mid \#A \text{ ungerade}\}$ gegeben. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathcal{P}_g(M) \to \mathcal{P}_u(M), \quad A \mapsto A \triangle \{1\}$$

eine Bijektion ist. Bestimmen Sie weiters die Anzahl der Elemente der Menge $\mathcal{P}_g(M)$.

3)(8 P.) Im folgenden bezeichnen A und B logische Formeln. Untersuchen Sie die Richtigkeit der folgenden Schlussfolgerungen, indem Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel angeben:

a) Wenn sowohl A als auch B keine Kontradiktionen sind, so ist $A \vee \neg B$ eine Tautologie.

b) Falls A und $A \to B$ keine Kontradiktionen sind, so ist B eine Kontradiktion.

4)(8 P.) Was versteht man unter der Determinate einer $n \times n$ Matrix A? Welche Eigenschaften besitzt die Determinante? Wie bestimmt man den Wert der Determinante im Fall $n = 3$ und wie kann man diesen geometrisch deuten? Was sagt die Determinante $\det(A)$ über die Matrix A aus?

5)(8 P.) Seien $(G, \triangle)$ und $(H, \heartsuit)$ zwei Gruppen. Wie ist ein Homomorphismus definiert? Wann werden $(G, \triangle)$ und $(H, \heartsuit)$ isomorph genannt? Nennen Sie zwei verschiedene, aber isomorphe Untergruppen U_1 und U_2 der symmetrischen Gruppe $(S_3, \circ)$ und geben Sie einen Isomorphismus zwischen U_1 und U_2 konkret an.

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 6. Oktober 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

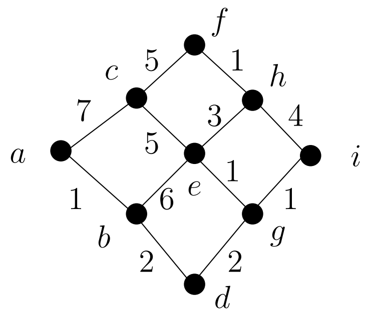
5)

1)(8 P.) Gegeben sind die Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Falls f und g beide injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Falls f und g beide surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

2)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus einen kürzesten Weg von a nach h:



3)(8 P.) Die Menge $\Gamma = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$ bildet bezüglich der Multiplikation modulo 15 eine Gruppe. Sei U die von $\overline{4}$ erzeugte Untergruppe von Γ. Ist U ein Normalteiler von Γ? (Begründung!) Falls ja, beschreiben Sie die Faktorgruppe Γ/U (Menge und Operationstafel)!

Bemerkung: Die Behauptung, dass $(\Gamma, \cdot)$ eine Gruppe ist, muß nicht bewiesen werden.

4)(8 P.)

(1) Wie ist das kartesische Produkt zweier Mengen definiert? Was versteht man unter einer Relation zwischen zwei Mengen, was unter einer binären Relation? Wann wird eine binäre Relation als Äquivalenzrelation bezeichnet, wann als Halbordnung? Was ist eine Partition einer Menge?

(2) Gegeben sei die Menge $A = \{a, b, c\}$. Geben Sie sowohl eine Äquivalenzrelation R_1 auf A als auch eine Halbordnung R_2 auf A an und illustrieren Sie diese beiden Relationen durch Angabe ihrer Graphen $G(R_1)$ und $G(R_2)$.

5)(8 P.) Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Was versteht man unter dem Kern von f? Wie ist der Rang von f definiert? Wann nennt man $a \in \mathbb{R}$ einen Eigenwert von f? Ist 0 ein Eigenwert von f oder nicht? (Begründung!)

Zuname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 1. Dezember 2017 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Es gelte

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ist f durch diese Angabe eindeutig bestimmt? (Begründung!)
Bestimmen Sie weiters die folgenden Mengen:

$$\ker(f), \qquad \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

2)(8 P.) Bestimmen alle Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$, die für alle $n \geq 0$ die Gleichung

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + (n+1)! \quad \text{und} \quad a_0 = 1$$

erfüllen.

3)(8 P.) Schreiben Sie die aussagenlogische Formel

$$\big((x \to (y \to z)) \leftrightarrow ((x \wedge y) \to z)\big) \wedge \neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

in eine äquivalente Formel um, in der nur $\neg$ und $\vee$ als Konnektoren vorkommen.

4)(8 P.) Sei M eine Menge. Was versteht man unter einer Äquivalenzrelation auf M? Was versteht man unter einer Partition der Menge M? Wie hängen diese beiden Begriffe zusammen? Geben Sie ein Beispiel einer Menge M mit einer Äquivalenzrelation auf M und beschreiben Sie die zugehörige Partition von M.

5)(8 P.) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Was versteht man unter einem größten gemeinsamen Teiler von a und b? Wie funktioniert der Euklidische Algorithmus? Warum bricht der Algorithmus immer nach endlich vielen Schritten ab?

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 11. Jänner 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)
2)
3)
4)
5)

1)(8 P.) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie einen Vektor $\mathbf{b}_3$, sodass $\mathbf{b}_3$ sowohl zu $\mathbf{b}_1$ als auch zu $\mathbf{b}_2$ orthogonal ist und $\det(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = 1$ gilt, indem Sie die gegebenen Bedingungen in ein lineares Gleichungssystem übersetzen und dieses Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen.

2)(8 P.) Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie, dass dann $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

3)(8 P.) Ersetzen Sie im folgenden Ausdruck * so durch einen Konnektor aus der Menge $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$, dass eine Tautologie entsteht: $(a * b) \leftrightarrow ((\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b))$.

4)(8 P.) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 4 + 3i$.
Erklären Sie die Polardarstellung komplexer Zahlen am Beispiel z_1 geometrisch.
Führen Sie die Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ geometrisch, d.h. in Form einer Skizze aus.
Was versteht man unter der Konjugierten $\overline{z}$ einer komplexen Zahl z formal wie geometrisch? Illustrieren Sie dies mit einer Skizze für $z = z_1$.
Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra. (Achten Sie darauf, dass ein Satz immer aus Voraussetzungen und (mindestens) einer Schlussfolgerung besteht.)

5)(8 P.) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix und $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$.
Was bedeutet „orthogonal“ im obigen Kontext?
Beweisen Sie, dass $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt.
Welche wichtigen geometrischen Eigenschaften besitzt die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$?
Begründen Sie, warum $|\det A| = 1$ gilt.

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 29. Jänner 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei p eine Primzahl und k eine ganze Zahl mit $0 < k < p$.
Wie groß ist $\mathrm{ggT}(p, k!)$? Begründen Sie Ihre Antwort!
Begründen Sie, warum p ein Teiler von $\binom{p}{k}$ ist! Hinweis: Stellen Sie $\binom{p}{k}$ in der Form $\frac{p \cdot A}{k!}$ dar und nutzen Sie das Ergebnis der ersten Frage.

Folgern Sie aus diesem Resultat mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ die folgende Aussage gilt: p ist ein Teiler von $n^p - n$.

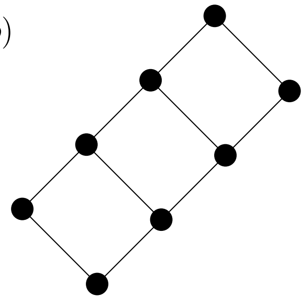
2)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 2 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 &= 3 \end{aligned}$$

3)(8 P.) Seien n und m zwei natürliche Zahlen und $T_{n,m}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die Vielfache von n und Teiler von m sind.
Beweisen Sie, dass $T_{n,m}$ mit der Teilbarkeitsrelation ($aRb :\Longleftrightarrow a \mid b$) eine Halbordnung bildet.
Bestimmen Sie weiters je zwei natürliche Zahlen, sodass das Hassediagramm dieser Halbordnung wie folgt aussieht:

$a)$

$b)$



4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit Abbildungsmatrix A.
Wie hängen die Spalten von A mit der Abbildung f zusammen?
Wieviele Zeilen und wieviele Spalten besitzt A? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
Gibt es eine injektive/surjektive Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$? (Angabe eines konkreten Beispeils oder Begründung, warum so eine Abbildung nicht existiert.)

5)(8 P.) Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen. Weiters seien eine Untergruppe U und ein Normalteiler N von G sowie eine Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gegeben. Schließlich sei noch eine positive ganze Zahl m gegeben.

Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Ankreuzen!
(Bei jeder der folgenden Fragen ist jeweils mindestens eine Antwort richtig. Es können auch mehrere, ja sogar alle Antworten richtig sein.
Jede komplett richtig beantwortete Frage bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Frage 0 Punkte.
Ein Frage gilt als komplett richtig beantwortet, wenn alle richtigen Antworten angekreuzt sind und alle falschen Antworten nicht angekreuzt sind.)

(1) $U \trianglelefteq G \iff$	◯ $U \subseteq G$ ◯ $\forall a \in G : \ a \circ U = U \circ a$ ◯ $\exists a \in G : \ a \circ U = U \circ a$
(2) Es gibt eine Teilmenge T von G mit folgenden Eigenschaften:	◯ T ist keine Untergruppe von G und $\forall a, b \in T : \ a \circ b^{-1} \in T$. ◯ T ist Untergruppe von G und $\forall a, b \in T : \ a \circ b^{-1} \in T$. ◯ T ist nicht leer und $\forall a, b \in T : \ a \circ b^{-1} \in T$.
(3) Der Kern von φ ist	◯ eine Teilmenge von G ◯ eine Teilmenge von H ◯ eine Untergruppe von G ◯ eine Untergruppe von H ◯ ein Normalteiler von G ◯ ein Normalteiler von H
(4) N ist	◯ eine Nebenklasse von sich selbst in G; ◯ eine Teilmenge der Faktorgruppe G/N; ◯ ein Element der Faktorgruppe G/N.
(5) N ist	◯ zu sich selbst invers; ◯ nicht zu sich selbst invers; ◯ weder zu sich selbst invers noch nicht zu sich selbst invers, da beide Aussagen keinen Sinn ergeben.
(6) Mit $m\mathbb{Z}$ bezeichnet man	◯ die Menge aller Restklassen modulo m; ◯ eine bestimmte Restklasse modulo m; ◯ die Menge $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : \ x = my\}$; ◯ die Menge $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : \ x - y = m\}$.
(7) Mit $\varphi(G)$ bezeichnet man	◯ das Element in H auf das G unter φ abgebildet wird; ◯ die Menge $\{h \in H \mid \ \exists g \in G : \ \varphi(g) = h\}$; ◯ die Menge $\{\varphi(x) \mid \ x \in G\}$; ◯ die Menge $\{x \in G \mid \ \exists y \in h : \ \varphi(x) = y\}$.
(8) Welche der folgenden Aussagen stimmen?	◯ $\varphi(G) \cong G/\ker\varphi$ ◯ $\varphi(G)$ ist Untergruppe von H ◯ $\varphi(G) \trianglelefteq H$ ◯ $\varphi(G)$ ist Untergruppe von G

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 8. März 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = 17 - 10n$, $n \geq 2$, zu den Anfangsbedingungen $a_0 = 3,\ a_1 = 10$.

2)(8 P.) Sei $G = \{\mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}}, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\} \subseteq S_4$. Veranschaulichen Sie G, indem Sie die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lassen und als geometrische Operationen interpretieren. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Interpretation, dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist und bestimmen alle Untergruppen von G.

3)(8 P.) Sei X die Menge aller nichtleeren, endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ und R die folgende Relation auf X: Es sei $A\,R\,B$ genau dann, wenn das kleinste Element von A nicht größer als das größte Element von B ist. Untersuchen Sie, ob R reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch bzw. transitiv ist. Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

4)(8 P.) Wie lautet das Inklusions-Exklusions-Prinzip für zwei endliche Mengen?
Wie lautet das Inklusions-Exklusions-Prinzip für n endliche Mengen $A_1, \ldots, A_n$?
Formulieren Sie den binomischen Lehrsatz!
(Bemerkung: Ein Lehrsatz besteht aus Voraussetzungen und Schlussfolgerungen. Eine Formel alleine ist kein Lehrsatz!)
Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert der Summe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

5)(8 P.) Wie lautet die Definition einer Eulerschen bzw. einer Hamiltonschen Linie in einem Graphen?

Geben Sie je ein Beispiel für einen Graphen, der eine Eulersche Linie besitzt, und für einen Graphen, der eine Hamiltonsche Linie besitzt.

Geben Sie ein je Kriterium für einen ungerichteten bzw. einen gerichteten Graphen an, das die Existenz einer geschlossenen Eulerschen Linie mit Hilfe der Knotengrade charakterisiert.

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 26. April 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Erläutern Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Aussage: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & \binom{n+1}{2} a^2 \\ 0 & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Alle Schritte des Beweises müssen (in ganzen Sätzen!) erläutert werden, die Beweislogik muss klar herausgearbeitet werden!

2)(8 P.) Untersuchen Sie, ob die Struktur $M = \{a, b\}$ mit der Addition

$$a + a = b, \quad a + b = b + a = a, \quad b + b = b$$

und der Multiplikation

$$a \cdot a = a, \;\; a \cdot b = b \cdot a = b \cdot b = b.$$

ein Halbring, ein Ring bzw. ein Körper ist.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = 17 - 10n$, $n \geq 2$, zu den Anfangsbedingungen $a_0 = 3,\ a_1 = 9$.

4)(8 P.) Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und A eine Teilmenge dieses Vektorraums.

Wann bezeichnet man A als Unterraum von V? Welche einfachen Bedingungen muss A erfüllen, damit A ein Unterraum von V ist?

Wann bezeichnet man A als linear unabhängige Teilmenge von V?

Was versteht man unter einer Basis von V? Wie ist die Dimension von V definiert?

Sei V nun der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten, deren Grad höchstens 2 ist. Geben Sie zwei verschiedene Basen dieses Vektorraums an.

5)(8 P.) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, wobei $c > 0$.
Welche Beziehung zwischen a, b und c wird durch die Formel $a \equiv b \mod c$ beschrieben?
Was versteht man unter einer Restklasse modulo c?
Wählen Sie für den Spezialfall $c = 7$ eine dieser Restklassen aus und geben Sie 3 Elemente der ausgewählten Klasse an!
Seien $\bar{x}$ und $\bar{y}$ Resklassen modulo c. (Hier ist wieder ein allgemeines c gemeint!)
Wie ist das Produkt $\bar{x} \cdot \bar{y}$ definiert?
Durch welche Eigenschaft kann man die Menge all jener Restklassen charakterisieren, die bezüglich des Produkts invertierbar sind?

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 28. Juni 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Es gelte

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie, ob

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

berechnet werden kann und bestimmen Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

Bemerkung: Falls Sie zur Lösung ein lineares Gleichungssystem verwenden, so ist dieses mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren zu lösen.

2)(8 P.) Sei $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Auf A seien die binären Relationen $f_A := \{(x, 2x) \mid x \in A\}$ und $g_A := \{(2x, x) \mid x \in A\}$ gegeben.

(1) Für welche A ist g_A eine Funktion von A nach A?

(2) Für welche A ist f_A eine Funktion von A nach A? Wann ist diese Funktion sogar injektiv, surjektiv, bijektiv?

(3) Sind $f \subseteq A \times B$ und $g \subseteq B \times C$ Relationen, so ist (analog zur Komposition von Abbildungen) das Relationenprodukt $g \circ f \subseteq A \times C$ definiert als Relation $\{(a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in f, (b, c) \in g\}$. Beschreiben Sie $g_A \circ f_A$.

3)(8 P.)

a) Wie viele Diagonalen hat ein regelmäßiges Zehneck?

b) Sei K_n der vollständige Graph mit 78 Kanten und n Knoten. Wie groß ist n?

c) Auf einer Party befinden sich Paare und Singles. Alle trinken ein Glas Sekt. Jeder Gast stößt mit jedem anderen Gast mit Ausnahme seines Partners/seiner Partnerin an (Singles stoßen also mit allen anderen Gästen an.) Insgesamt wird 117 mal angestoßen. Wieviele Personen und wieviele Paare sind auf dieser Party?

4)(8 P.) Gegeben seien drei positive natürliche Zahlen m, n und p und zwei Matrizen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B = (b_{k,\ell}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Wie lautet die Definition der Determinante von A?

Für welche Wahlen von m, n, p ist $C = A + B$ definiert? Beschreiben Sie C für diese Fälle.

Für welche Wahlen von m, n, p ist $D = A \cdot B$ definiert? Beschreiben Sie D für diese Fälle.

5)(8 P.) Seien A und B zwei Mengen. Wie sind die Mengen $A \times B$, 2^A und $A \Delta B$ definiert? Sei nun $A = \mathbb{R}$ und $B = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Geben Sie zu jeder der oben genannten Mengen je zwei ihrer Elemente an.

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 11. Oktober 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 2 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 11x_4 &= 3 \end{aligned}$$

2)(8 P.) Sei $f \subseteq A \times A$ eine Relation auf A. Für zwei Relationen g und h auf A sei die Komposition $g \circ h$ wie folgt definiert:

$$g \circ h = \{(x, y) \in A \mid \ \exists z \in A : \ (x, z) \in g \wedge (z, y) \in h\}.$$

Begründen Sie mittels Induktion, dass die rekursive Definition der Iterationen f^n, $n \in \mathbb{N}$, durch $f^0 := \{(x, x) | \, x \in A\}$ und $f^{n+1} := f \circ f^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f^n : A \to A$ definiert, sofern $f : A \to A$ (f also selbst eine Funktion ist).

3)(8 P.) Wieviele verschiedene Permutationen der Buchstaben des Worts MATHEMATIK gibt es? Wieviele dieser Permutationen beginnen mit M? In wievielen dieser Permutationen (der ersten Frage!) sind die beiden A nebeneinander? Alle Antworten müssen auch begründet werden.

4)(8 P.) Was versteht man unter einem Eigenwert, was unter einem Eigenvektor einer quadratischen Matrix A? Geben Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ alle Eigenwerte und zu jedem Eigenwert je zwei verschiedene Eigenvektoren an.

5)(8 P.) Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen. Weiters seien eine Untergruppe U und ein Normalteiler N von G sowie eine Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ gegeben. Schließlich sei noch eine positive ganze Zahl m gegeben.

Beantworten Sie die folgenden Fragen durch Ankreuzen!
(Bei jeder der folgenden Fragen ist jeweils mindestens eine Antwort richtig. Es können auch mehrere, ja sogar alle Antworten richtig sein.
Jede komplett richtig beantwortete Frage bringt einen Punkt, jede falsch beantwortete Frage 0 Punkte.
Ein Frage gilt als komplett richtig beantwortet, wenn alle richtigen Antworten angekreuzt sind und alle falschen Antworten nicht angekreuzt sind.)

(1) $U \trianglelefteq G \iff$	○ $U \subseteq G$ ○ $\forall a \in G : a \circ U = U \circ a$ ○ $\exists a \in G : a \circ U = U \circ a$
(2) Der Kern von φ ist	○ eine Teilmenge von G ○ eine Teilmenge von H ○ eine Untergruppe von G ○ eine Untergruppe von H ○ ein Normalteiler von G ○ ein Normalteiler von H
(3) Es gibt eine Teilmenge T von G mit folgenden Eigenschaften:	○ T ist keine Untergruppe von G und $\forall a, b \in T : a \circ b^{-1} \in T$. ○ T ist Untergruppe von G und $\forall a, b \in T : a \circ b^{-1} \in T$. ○ T ist nicht leer und $\forall a, b \in T : a \circ b^{-1} \in T$.
(4) N ist	○ eine Nebenklasse von sich selbst in G; ○ eine Teilmenge der Faktorgruppe G/N; ○ ein Element der Faktorgruppe G/N.
(5) N ist	○ zu sich selbst invers; ○ nicht zu sich selbst invers; ○ weder zu sich selbst invers noch nicht zu sich selbst invers, da beide Aussagen keinen Sinn ergeben.
(6) Mit $m\mathbb{Z}$ bezeichnet man	○ die Menge aller Restklassen modulo m; ○ eine bestimmte Restklasse modulo m; ○ die Menge $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x = my\}$; ○ die Menge $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : x - y = m\}$.
(7) Mit $\varphi(G)$ bezeichnet man	○ das Element in H auf das G unter φ abgebildet wird; ○ die Menge $\{h \in H \mid \exists g \in G : \varphi(g) = h\}$; ○ die Menge $\{\varphi(x) \mid x \in G\}$; ○ die Menge $\{x \in G \mid \exists y \in h : \varphi(x) = y\}$.
(8) Welche der folgenden Aussagen stimmen?	○ $\varphi(G) \cong G/\ker\varphi$ ○ $\varphi(G)$ ist Untergruppe von H ○ $\varphi(G) \trianglelefteq H$ ○ $\varphi(G)$ ist Untergruppe von G

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 29. November 2019 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -2 \\ -4x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 &= -3 \end{aligned}$$

2)(8 P.) Seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie, dass dann $\varphi(G)$ eine Untergruppe von H ist.

3)(8 P.) Berechnen Sie die Anzahl derjenigen 6-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, die höchstens 2 Elemente der Menge $\{1, 2, 3\}$ und genau 3 Elemente der Menge $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ enthalten.

(Begründen Sie Ihre Antwort so, dass der Rechenweg nachvollziehbar ist!)

4)(8 P.) Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Es gelte $\dim f(\mathbb{R}^4) = 3$. Weiters sei A eine Abbildungsmatrix von f (bezüglich welcher Basen ist im weiteren nicht relevant).

Was versteht man unter dem Kern von f?
Sind die Spalten von A linear unabhängig? (Begründung!)
Wann nennt man $a \in \mathbb{R}$ einen Eigenwert von f?
Ist 0 ein Eigenwert von f oder nicht? (Begründung!)

5)(8 P.) (1) Wie ist das kartesische Produkt zweier Mengen definiert? Was versteht man unter einer Relation zwischen zwei Mengen, was unter einer binären Relation? Wann wird eine binäre Relation als Äquivalenzrelation bezeichnet, wann als Halbordnung? Was ist eine Partition einer Menge?

(2) Gegeben sei die Menge $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta\}$. Geben Sie sowohl eine Äquivalenzrelation R_1 auf A als auch eine Halbordnung R_2 auf A an und illustrieren Sie diese beiden Relationen durch Angabe ihrer Graphen $G(R_1)$ und $G(R_2)$.

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS
ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK
F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 19. Februar 2021 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems über $\mathbb{Z}_7$:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Wie viele Elemente besitzt die Lösungsmenge?

2)(8 P.) Erläutern Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Behauptung:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} + i^2 \cdot ((i-1)!) \right) = n!$$

für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Anmerkung: Alle Schritte des Beweises müssen genau angegeben werden und die Präsentation des Beweises muss der Beweislogik Rechnung tragen. Insbesondere darf eine zu beweisende Behauptung nicht am Anfang des Beweises stehen, sondern muss sich als dessen letzte Schlussfolgerung ergeben.

3)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Rekursion

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 36n \cdot 5^n, \text{ für } n \geq 2.$$

Geben Sie weiters zwei konkrete Elemente des Lösungsraums an.

4)(8 P.) Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Was versteht man unter einer Untergruppe, was unter einem Normalteiler von G?

Sei $U \leq G$ und $x \in G$. Wie ist die Nebenklasse $x * U$ definiert? Geben Sie eine formale und eine verbale Beschreibung!

Die Relation Δ, definiert durch $a \Delta b \;:\Longleftrightarrow\; a * U = b * U$, ist eine Äquivalenzrelation. Welche Relation ergibt sich für Δ im Fall $(G, *) = (\mathbb{Z}, +)$ und $U = \{z \in \mathbb{Z} : 5 \mid z\}$ und wie sieht die zugehörige Partition aus?

5)(8 P.) Sei $n > m \geq 1$, $M = \{1, \ldots, m\}$ und $N = \{1, \ldots, n\}$. Weiters bezeichne S_n die Menge aller Bijektionen $f : N \to N$. Wir definieren

$$A := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq N\},$$
$$B := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid \{a_1, \ldots, a_n\} = N\},$$
$$C := \{\{a_1, \ldots, a_n\} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in A \setminus B\}.$$

a) Geben Sie Formeln für $|A|$, $|B|$ und $|C|$ an und ordnen Sie diese Zahlen der Größe nach.
b) Wie viele $f \in S_n$ gibt es mit $f(M) = M$, d.h. die $f(i) \leq m$ für alle $i \leq m$ erfüllen?
c) Was versteht man unter $\binom{n}{m}$ und welches Anzahlproblem wird durch diese Zahl gelöst?

Nachname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Nummer des Breakoutraums:

PRÜFUNG AUS ALGEBRA UND DISKRETE MATHEMATIK F. INF. U. WINF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 19. März 2021 (Ab hier freilassen!) Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie, ob die Struktur $M = \{\heartsuit, \Diamond\}$ mit der Addition

$$\heartsuit + \heartsuit = \Diamond, \quad \heartsuit + \Diamond = \Diamond + \heartsuit = \heartsuit, \quad \Diamond + \Diamond = \Diamond$$

und der Multiplikation

$$\Diamond \cdot \Diamond = \Diamond \cdot \heartsuit = \heartsuit \cdot \Diamond = \Diamond, \quad \heartsuit \cdot \heartsuit = \heartsuit.$$

ein Ring bzw. ein Körper ist.

2)(8 P.) Im europäischen Artikelnummernsystem EAN werden Zahlen mit 13 Dezimalziffern der Form $a_1\, a_2 \ldots a_{12}\, p$ verwendet. Dabei wird die letzte der 13 Ziffern, das ist die Prüfziffer p, im EAN-Code so bestimmt, dass

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + \cdots + a_{11} + 3a_{12} + p \equiv 0 \mod 10$$

gilt.

Zeigen Sie, dass beim EAN-Code ein Fehler in einer einzelnen Ziffer stets erkannt wird, während eine Vertauschung von zwei benachbarten Ziffern genau dann nicht erkannt wird, wenn die beiden Ziffern gleich sind oder sich um 5 unterscheiden.

3)(8 P.) Sei $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine Menge von reellwertigen, auf $\mathbb{R}$ definierten Funktionen, die einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bildet. Wir betrachten zwei Funktionen $f, g \in \mathbb{M}$. Bekanntlich ist das Funktionenprodukt durch $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ definiert. Analoges gilt für die Summe $f + g$ und die skalare Multiplikation mit $c \in \mathbb{R}$.

Sei $A : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ eine weitere Abbildung, die allen Funktionen $h \in \mathbb{M}$ wieder eine Funktion aus $\mathbb{M}$ zuordnet, also $A(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $A(g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind wieder Funktionen, und es gilt $A(f), A(g) \in \mathbb{M}$. Weiters gelte für alle $h_1, h_2 \in \mathbb{M}$ die Gleichung $A(h_1 \cdot h_2) = A(h_1) \cdot h_2 + h_1 \cdot A(h_2)$ und die Funktion sei außerdem noch linear. Offensichtlich ist für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $A^k(h) := (\underbrace{A \circ A \circ \cdots \circ A}_{k\text{mal}})(h)$ für $h \in \mathbb{M}$ definiert und liegt wieder in $\mathbb{M}$.

Erläutern Sie das Verfahren der vollständigen Induktion anhand eines Beweises der folgenden Behauptung:

$$A^n(f \cdot g) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} A^{\ell}(f) \cdot A^{n-\ell}(g)$$

für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

Anmerkung: Alle Schritte des Beweises müssen genau angegeben werden und die Präsentation des Beweises muss der Beweislogik Rechnung tragen. Insbesondere darf eine zu beweisende Behauptung nicht am Anfang eines Beweisteils stehen, sondern muss sich als dessen letzte Schlussfolgerung ergeben.

4)(8 P.) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Was versteht man unter einem Eigenwert von A, was unter einem Eigenvektor?

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie zu jedem Eigenwert einen normierten Eigenvektor an.

5)(8 P.) Die beiden Folgen $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$ und $(1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots)$ sind Lösungen einer homogenen linearen Rekursion zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Rekursion.

Wie verändert sich die Lösungsmenge, wenn diese Rekursion mittels einer Störfunktion $(s_n)_{n\geq 0}$ in eine inhomogene Rekursion umgewandelt wird?

Wie lauten die Ansätze für $s_n = n \cdot 3^n$ und für $s_n = n^2 \cdot 2^n$?