

Algebra und Diskrete Mathematik für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Zusätzliche Übungsaufgaben

Z1)

- a) Beweisen Sie, dass man in einer Kongruenz einen gemeinsamen Faktor der Kongruenzgleichung und des Moduls kürzen kann, d.h. für $c \neq 0$ folgt aus $ac \equiv bc \pmod{mc}$, dass $a \equiv b \pmod{m}$. Gilt auch umgekehrt, dass aus $a \equiv b \pmod{m}$ immer $ac \equiv bc \pmod{mc}$ folgt, falls $c \neq 0$?
- b) Beim Rechnen mit Kongruenzen dürfen Zahlen immer durch kongruente Zahlen ersetzt werden, d.h. falls $a + b \equiv c \pmod{m}$ und $b \equiv d \pmod{m}$, dann gilt $a + d \equiv c \pmod{m}$.

Z2) Beweisen Sie die folgenden Behauptungen oder widerlegen Sie sie durch ein konkretes Gegenbeispiel.

- a) Falls $ac \equiv bc \pmod{m}$, $c \neq 0$ und $c \mid m$, dann gilt auch $a \equiv b \pmod{\frac{m}{c}}$.
- b) Falls $a \equiv b \pmod{m}$, dann gilt auch $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$.
- c) Falls $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$, dann gilt auch $a \equiv b \pmod{m}$.

Z3) Beweisen Sie mit Hilfe von Kongruenzen, dass die Summe zweier ungerader Quadratzahlen keine Quadratzahl sein kann.

Z4) Beweisen Sie mit Hilfe von Kongruenzen, dass zwei Quadratzahlen, deren Summe durch 3 teilbar ist, selbst durch 3 teilbar sind.

Z5) Sei $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ und R eine Relation auf M gegeben durch

$$(a, b)R(c, d) :\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die durch R induzierte Partition von M .