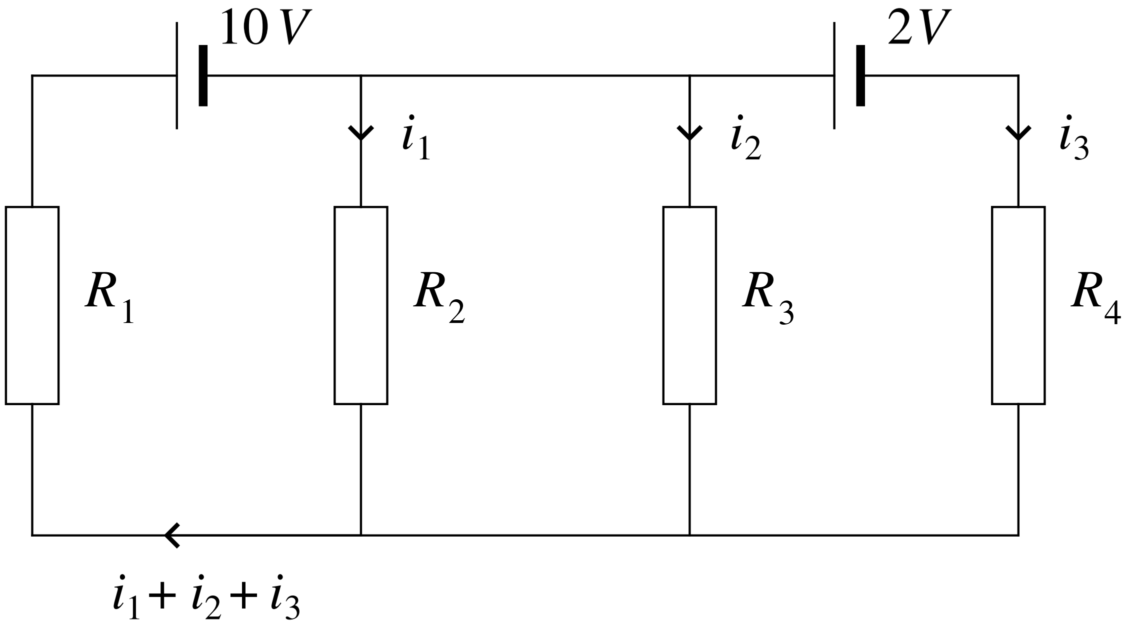
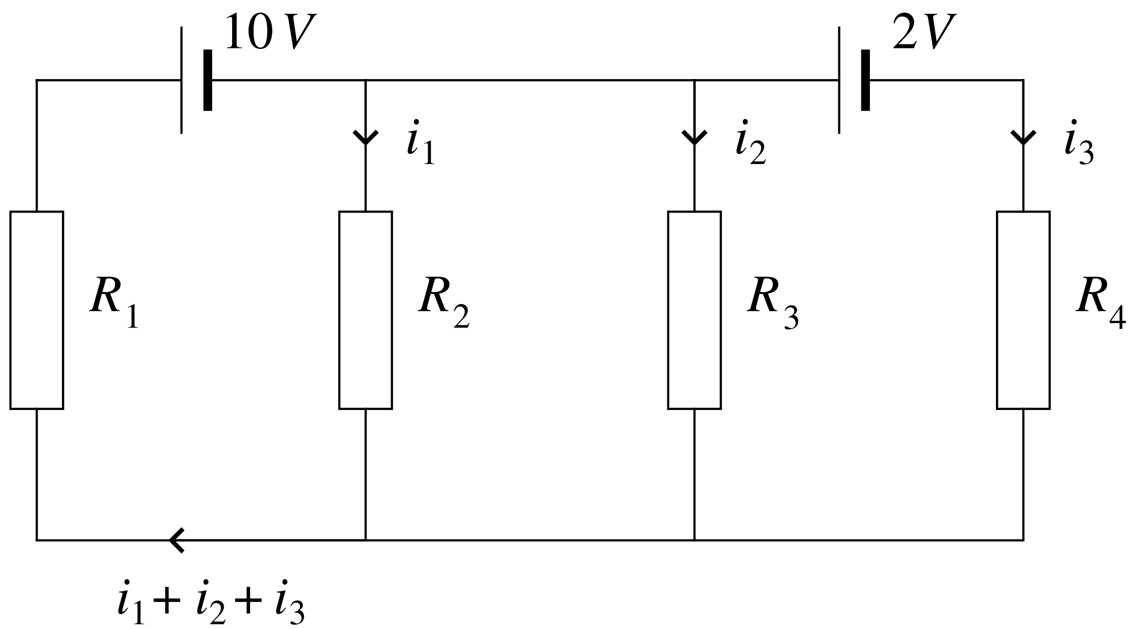
VEKTOREN UND VEKTORRÄUME

Beispiel: Elektrische Netzwerke

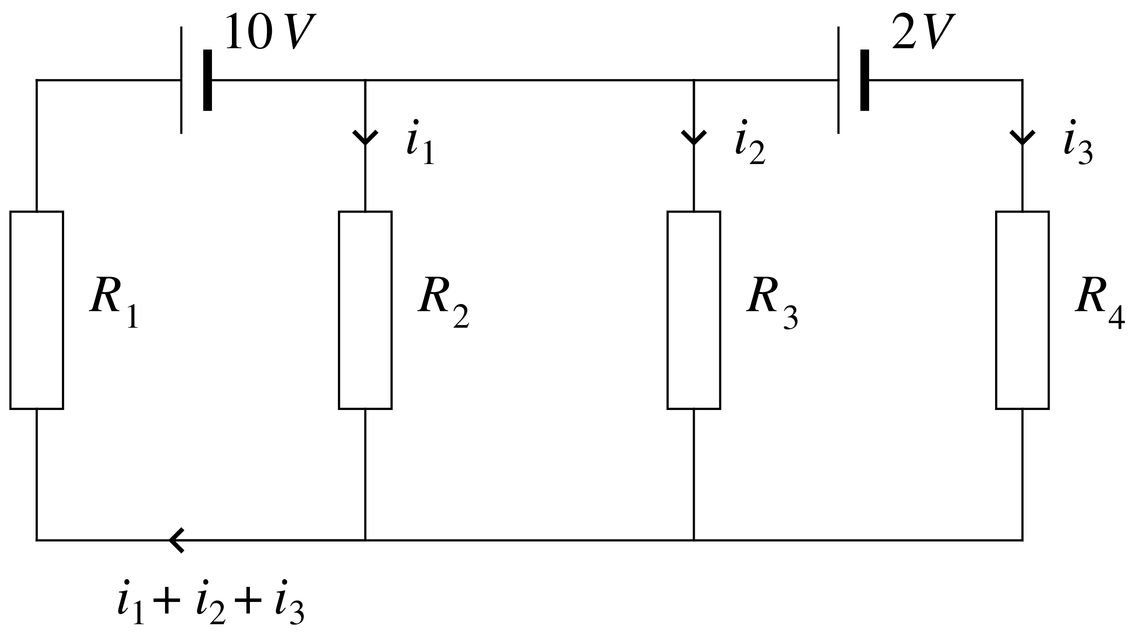


Beispiel: Elektrische Netzwerke



$$
\begin{aligned}
R_2 i_1 + R_1(i_1 + i_2 + i_3) &= 10\,V, \\
R_3 i_2 - R_2 i_1 &= 0\,V, \\
R_4 i_3 - R_3 i_2 &= 2\,V.
\end{aligned}
$$

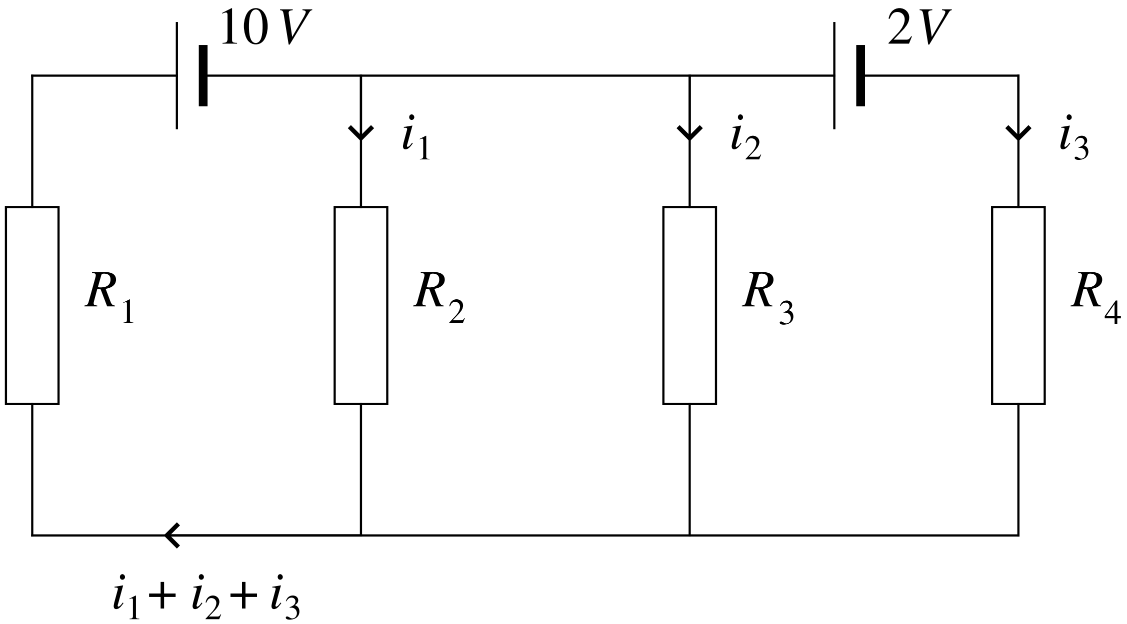
Beispiel: Elektrische Netzwerke



$$
\begin{aligned}
R_2 i_1 + R_1(i_1 + i_2 + i_3) &= 10\,V, \\
R_3 i_2 - R_2 i_1 &= 0\,V, \\
R_4 i_3 - R_3 i_2 &= 2\,V.
\end{aligned}
$$

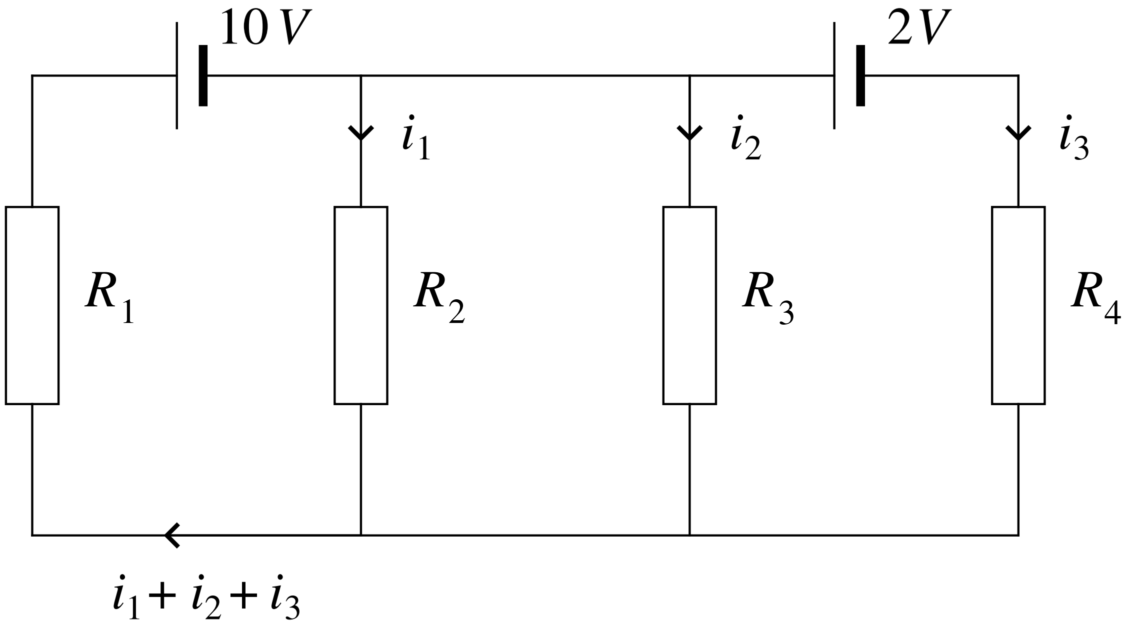
Konkret $R_1 = 1.5\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 4\,\Omega$ und $R_4 = 3\,\Omega$

Beispiel: Elektrische Netzwerke



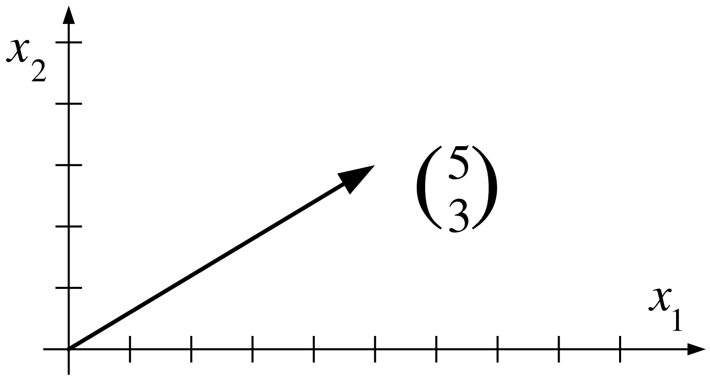
$$
\begin{aligned}
5.5\, i_1 + 1.5\, i_2 + 1.5\, i_3 &= 10, \\
-4\, i_1 + 4\, i_2 &= 0, \\
-4\, i_2 + 3\, i_3 &= 2.
\end{aligned}
$$

Beispiel: Elektrische Netzwerke

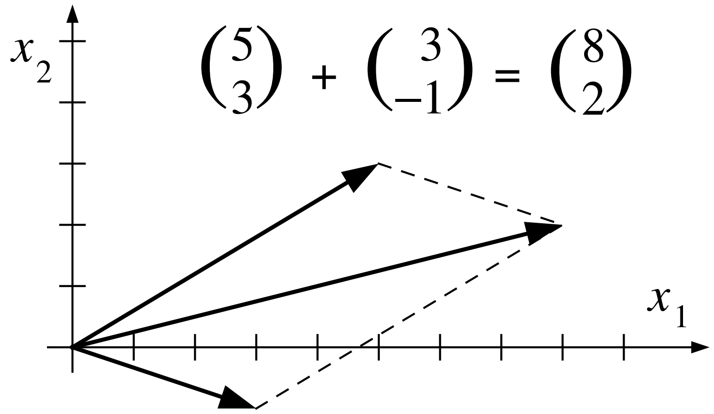


$$\begin{aligned} 5.5\,i_1 + 1.5\,i_2 + 1.5\,i_3 &= 10, \\ -4\,i_1 + 4\,i_2 &= 0, \\ -4\,i_2 + 3\,i_3 &= 2. \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 5.5 & 1.5 & 1.5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vektoren

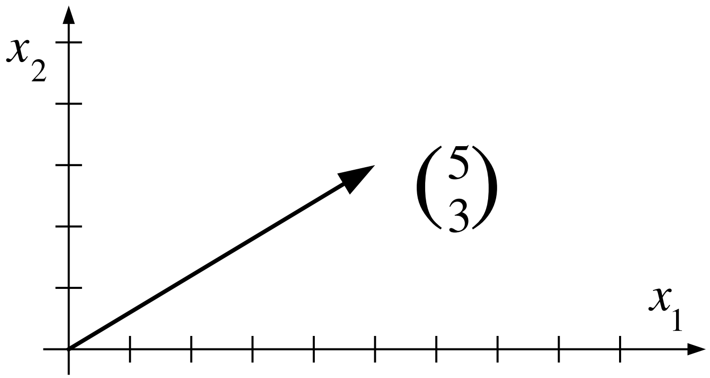


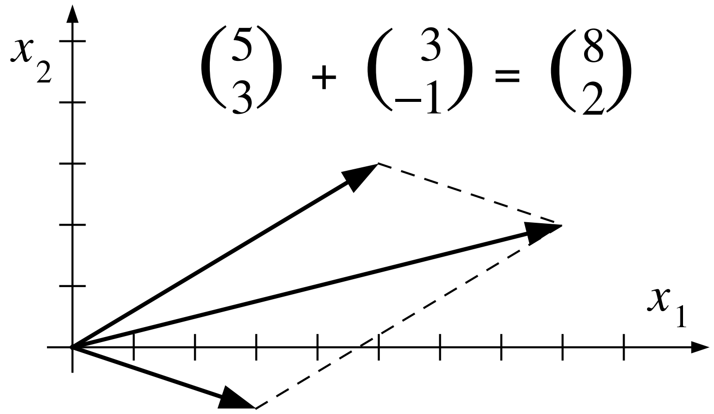
x_2
x_1
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

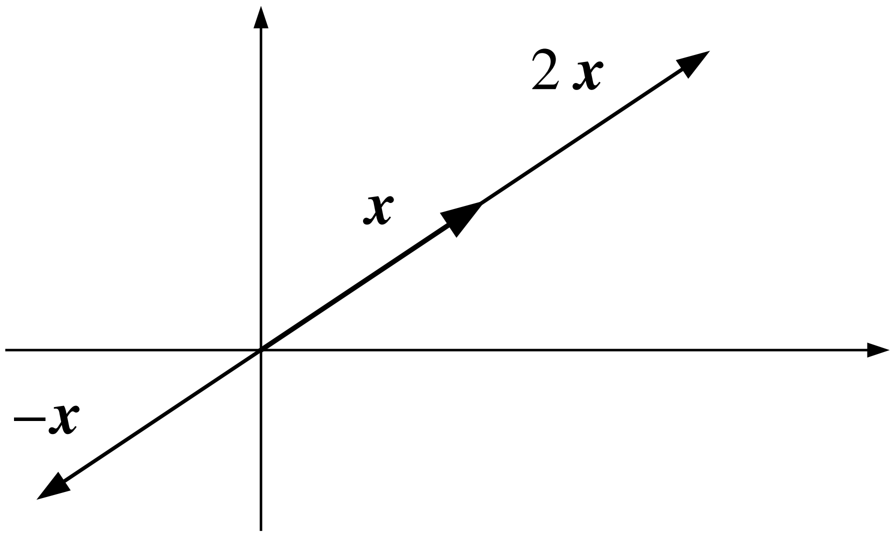


x_2
x_1
$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

Vektoren


x_2
$\binom{5}{3}$
x_1


x_2
$\binom{5}{3} + \binom{3}{-1} = \binom{8}{2}$
x_1


$2\,\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{x}$
$-\boldsymbol{x}$

Vektoren

Allgemein: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda\mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Vektoren

Allgemein: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Speziell:

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Vektoren

Allgemein: $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \lambda \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Speziell:

$$\mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Noch allgemeiner: $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_n \in K \right\}$,

wobei $(K, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Vektoren

Definition *Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper und* $(V, +)$ *eine abelsche Gruppe, weiters*

$$\cdot : K \times V \to V, (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}$$

eine „äußere“ Operation.
$(V, +, K)$ *heißt* <u>Vektorraum</u> *definitionsgemäß genau dann, wenn zusätzlich die folgenden Gesetze gelten:*

$$\forall \lambda \in K\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V :\ \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \mathbf{x} \in V :\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \mathbf{x} \in V :\ (\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$$
$$\forall \mathbf{x} \in V :\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Vektoren

Definition *Sei* $(K,+,\cdot)$ *ein Körper und* $(V,+)$ *eine abelsche Gruppe, weiters*

$$\cdot : K \times V \to V, (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}$$

eine „äußere“ Operation.
$(V,+,K)$ *heißt* <u>Vektorraum</u> *definitionsgemäß genau dann, wenn zusätzlich die folgenden Gesetze gelten:*

$$\forall \lambda \in K \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V : \ \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K \ \forall \mathbf{x} \in V : \ (\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K \ \forall \mathbf{x} \in V : \ (\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$$
$$\forall \mathbf{x} \in V : \ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Beipiele: a) K^n,

Vektoren

Definition *Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper und* $(V, +)$ *eine abelsche Gruppe, weiters*

$$\cdot : K \times V \to V, (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}$$

eine „äußere“ Operation.
$(V, +, K)$ *heißt* Vektorraum *definitionsgemäß genau dann, wenn zusätzlich die folgenden Gesetze gelten:*

$$\forall \lambda \in K\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V:\ \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \mathbf{x} \in V:\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \mathbf{x} \in V:\ (\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$$
$$\forall \mathbf{x} \in V:\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Beipiele: a) K^n, b) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\}$,

Vektoren

Definition *Sei* $(K, +, \cdot)$ *ein Körper und* $(V, +)$ *eine abelsche Gruppe, weiters*

$$\cdot : K \times V \to V, (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{x}$$

eine „äußere“ Operation.
$(V, +, K)$ *heißt* Vektorraum *definitionsgemäß genau dann, wenn zusätzlich die folgenden Gesetze gelten:*

$$\forall \lambda \in K\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V:\ \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \mathbf{x} \in V:\ (\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$$
$$\forall \lambda, \mu \in K\ \forall \mathbf{x} \in V:\ (\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu \mathbf{x})$$
$$\forall \mathbf{x} \in V:\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Beipiele: a) K^n, b) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = x_2 \right\}$,

c) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

Vektoren

Definition *Sei* $(V, +, K)$ *ein Vektorraum über einem Körper* K *und* $U \subseteq V$ *mit* $U \neq \varnothing$. U *heißt* Unterraum, *in Zeichen:* $U \leq V$, *definitionsgemäß genau dann, wenn* $(U, +, K)$ *ein Vektorraum ist.*

Vektoren

Definition *Sei* $(V, +, K)$ *ein Vektorraum über einem Körper* K *und* $U \subseteq V$ *mit* $U \neq \varnothing$. U *heißt* <u>Unterraum</u>, *in Zeichen:* $U \leq V$, *definitionsgemäß genau dann, wenn* $(U, +, K)$ *ein Vektorraum ist.*

Satz *Sei* $(V, +, K)$ *ein Vektorraum und* $U \subseteq V$. *Dann gilt:* $U \leq V \iff$ *1)* $U \neq \varnothing$, *2)* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \Longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$, *3)* $\lambda \in K, \mathbf{x} \in U \Longrightarrow \lambda\mathbf{x} \in U$.

Vektoren

Definition *Sei $(V,+,K)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ mit $U \neq \varnothing$. U heißt* <u>Unterraum</u>*, in Zeichen: $U \leq V$, definitionsgemäß genau dann, wenn $(U,+,K)$ ein Vektorraum ist.*

Satz *Sei $(V,+,K)$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann gilt: $U \leq V \iff$ 1) $U \neq \varnothing$, 2) $\mathbf{x},\mathbf{y} \in U \Longrightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in U$, 3) $\lambda \in K, \mathbf{x} \in U \Longrightarrow \lambda\mathbf{x} \in U$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: trivial

„$\Longleftarrow$“: Man kann zeigen, dass $0\mathbf{x} = \mathfrak{o}$ und $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Da $U \neq \varnothing$, gibt es $\mathbf{x} \in U$. Setzt man in 3) $\lambda = -1$, so erhält man $-\mathbf{x} \in U$ und somit ist $(U,+)$ eine Untergruppe von $(V,+)$.

Alle anderen Vektorraumaxiome gelten trivialerweise. $\square$

Vektoren

Definition *Sei $(V, +, K)$ ein Vektorraum über einem Körper K und $U \subseteq V$ mit $U \neq \varnothing$. U heißt* Unterraum*, in Zeichen: $U \leq V$, definitionsgemäß genau dann, wenn $(U, +, K)$ ein Vektorraum ist.*

Satz *Sei $(V, +, K)$ ein Vektorraum und $U \subseteq V$. Dann gilt: $U \leq V \iff$ 1) $U \neq \varnothing$, 2) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \Longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$, 3) $\lambda \in K, \mathbf{x} \in U \Longrightarrow \lambda\mathbf{x} \in U$.*

Beweis: „$\Longrightarrow$“: trivial

„$\Longleftarrow$“: Man kann zeigen, dass $0\mathbf{x} = \mathfrak{o}$ und $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Da $U \neq \varnothing$, gibt es $\mathbf{x} \in U$. Setzt man in 3) $\lambda = -1$, so erhält man $-\mathbf{x} \in U$ und somit ist $(U, +)$ eine Untergruppe von $(V, +)$.

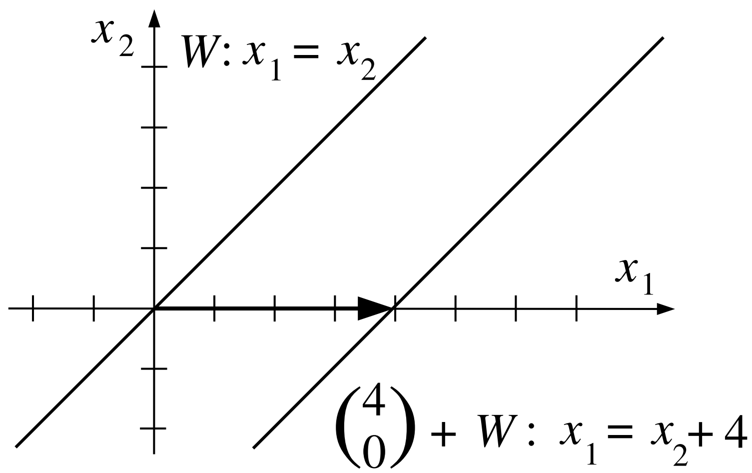
Alle anderen Vektorraumaxiome gelten trivialerweise. $\square$

Bem.: Jeder Vektorraum V besitzt die trivialen Unterräume $\{\mathfrak{o}\}$ und V.

Vektoren

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = x_2 \right\}$$

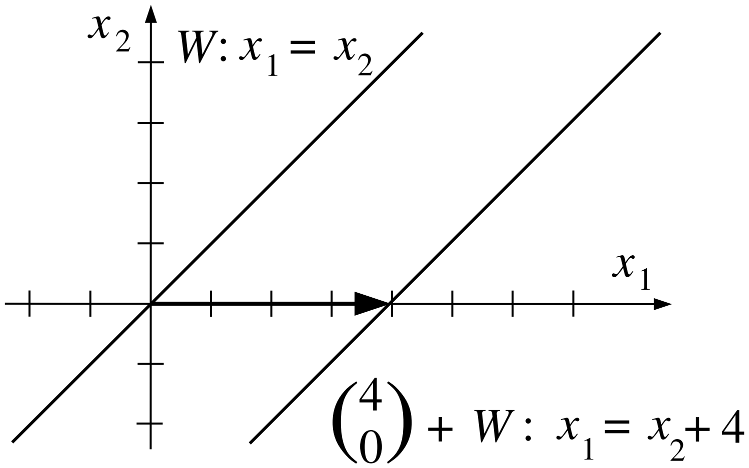
$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in W \implies (W, +) \leq (\mathbb{R}^2, +).$ $\quad \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda \mathbf{x} \in W.$



Vektoren

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 = x_2 \right\}$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \implies \mathbf{x} - \mathbf{y} \in W \implies (W, +) \leq (\mathbb{R}^2, +)$. $\quad \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\mathbf{x} \in W$.



verschobener Unterraum: Nebenraum

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0, \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder anders angeschrieben

$$\begin{aligned} 1\lambda_1 + 1\lambda_2 - 1\lambda_3 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0, \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Es gibt eine nichttriviale Lösung: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = -1$
$\Longrightarrow$ die Vektoren sind linear abhängig.

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathfrak{o}$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathfrak{o}$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Folgt aus $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathfrak{o}$, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$?

Gleichungssystem bzw. die Vektoren als Matrix geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \\ \Longrightarrow \lambda_2 = 0 \\ \Longrightarrow \lambda_3 = 0 \\ \end{matrix}$$

MATRIZEN

Matrizen

$m \times n$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$K^{m \times n}$... Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K

$A \in K^{n \times n} \longrightarrow$ quadratische Matrix

Schreibweise als Vektor von Spaltenvektoren:

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Die transponierte Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Summe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Skalare Vielfache

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 15 & 21 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 1 & 2 \\
 & & & 5 & 7 \\
 & & & 0 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 2 & & \\
3 & 2 & 1 & & \\
0 & 1 & 2 & & \\
\end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 7 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 7 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc}
 & & & 1 & 2 \\
 & & & 5 & 7 \\
 & & & 0 & 2 \\
\hline
1 & 5 & 2 & 1\cdot 1 + 5\cdot 5 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 5\cdot 7 + 2\cdot 2 \\
3 & 2 & 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 7 + 1\cdot 2 \\
0 & 1 & 2 & 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 + 2\cdot 2
\end{array}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 7 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1\cdot 1 + 5\cdot 5 + 2\cdot 0 & 1\cdot 2 + 5\cdot 7 + 2\cdot 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3\cdot 1 + 2\cdot 5 + 1\cdot 0 & 3\cdot 2 + 2\cdot 7 + 1\cdot 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 + 2\cdot 2 \end{array}$$

$$A \in K^{m\times n},\ B \in K^{n\times r} \Longrightarrow AB \in K^{m\times r}$$

Rechnen mit Matrizen

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 41 \\ 13 & 22 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 2 \\ & & & 5 & 7 \\ & & & 0 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 2 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \end{array}$$

$A \in K^{m \times n},\ B \in K^{n \times r} \Longrightarrow AB \in K^{m \times r}$

Einheitsmatrix: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rechnen mit Matrizen

Diagonalmatrix: $$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Diagonalmatrix: $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

Rechnen mit Matrizen

Diagonalmatrix: $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

Diagonalmatrix: $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(K^{n \times n}, +, \cdot)$ ist ein Ring.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nicht kommutativ, nicht nullteilerfrei.

Rechnen mit Matrizen

A, B, C: Matrizen, λ: Skalar

I: Einheitsmatrix mit passender Anzahl von Zeilen und Spalten

1. $A \cdot I = I \cdot A = A$
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
5. $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$
7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
8. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

Invertierbare Matrizen

Definition $A \in K^{n \times n}$ *heißt* regulär $:\Longleftrightarrow \exists A^{-1}: \ AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, *sonst* singulär.

Invertierbare Matrizen

Definition $A \in K^{n\times n}$ *heißt* regulär $:\Longleftrightarrow \exists A^{-1}: \; AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, *sonst* singulär.

Satz $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Beweis: Prüfen von $B^{-1}A^{-1} \cdot AB = AB \cdot B^{-1}A^{-1} = I_n$ bzw.
Anwenden von Regel 7: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Invertierbare Matrizen

Für

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

gilt

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i.$$

Invertierbare Matrizen

Für

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

gilt

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i,$$

das heißt,

$$A\mathbf{x} \in [\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}].$$

Insbesondere $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$.

Invertierbare Matrizen

Für

$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

gilt

$$A\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i,$$

das heißt,

$$A\mathbf{x} \in [\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}].$$

Insbesondere $A\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j$.

Oder für $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_q) \in K^{n \times q}$:

$$AB = (A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_q), \quad \text{mit } A\mathbf{b}_i \in [\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}].$$

Invertierbare Matrizen

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 11 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Invertierbare Matrizen

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 11 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{33} & -\frac{7}{33} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{7}{33} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{137}{33} \\ \frac{8}{33} \end{pmatrix}$$

Invertierbare Matrizen

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 11 \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{7}{33} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{7}{33} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{137}{33} \\ \frac{8}{33} \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix} \in \left[\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\} \right].$$

Invertierbare Matrizen

Falls A regulär, dann ist

$$AX = A(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = I_n$$

lösbar und es gilt daher:

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in [\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}],$$

d.h., $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ ist eine Basis von K^n.

Invertierbare Matrizen

Falls A regulär, dann ist

$$AX = A(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = I_n$$

lösbar und es gilt daher:

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in [\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}],$$

d.h., $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ ist eine Basis von K^n.

Auch umgekehrt. Daher:

Satz

$$\begin{aligned} A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in K^{n\times n} \text{ *regulär* } &\iff \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \text{ *l.u.*} \\ &\iff [\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}] = K^n \end{aligned}$$

Der Rang einer Matrix

Definition *Der* Spaltenrang *einer Matrix* $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in K^{m \times n}$ *ist definiert wie folgt:*

$$\operatorname{rg} A := \dim[\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}]$$

Der Zeilenrang *von* A *ist definiert als* $\operatorname{rg}(A^T)$.

Der Rang einer Matrix

Definition *Der* Spaltenrang *einer Matrix* $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in K^{m \times n}$ *ist definiert wie folgt:*

$$\text{rg}\, A := \text{dim}[\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}]$$

Der Zeilenrang *von* A *ist definiert als* rg(A^T)*.*

Satz *Für jede Matrix* $A \in K^{m \times n}$ *stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein.*

Definition *Der* Rang *einer Matrix* $A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) \in K^{m \times n}$ *ist definiert als ihr Spaltenrang (=Zeilenrang)*

$$\text{rg}\, A := \text{dim}[\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}]$$

Der Rang einer Matrix

Definition <u>Elementare Spaltenumformungen</u> *sind*

1. $\mathbf{a}_j \longrightarrow \lambda \mathbf{a}_j$ *mit* $\lambda \in K \setminus \{0\}$

2. $\mathbf{a}_j \longrightarrow \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i$ *mit* $i \neq j$ *und* $\lambda \in K$

3. $\mathbf{a}_i \longleftrightarrow \mathbf{a}_j$

Elementare Zeilenumformungen definiert man analog.

Der Rang einer Matrix

Definition Elementare Spaltenumformungen *sind*

1. $\mathbf{a}_j \longrightarrow \lambda \mathbf{a}_j$ *mit* $\lambda \in K \setminus \{0\}$
2. $\mathbf{a}_j \longrightarrow \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i$ *mit* $i \neq j$ *und* $\lambda \in K$
3. $\mathbf{a}_i \longleftrightarrow \mathbf{a}_j$

Elementare Zeilenumformungen definiert man analog.

Satz *Elementare Spalten- oder Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.*

Der Rang einer Matrix

Definition Elementare Spaltenumformungen *sind*

1. $\mathbf{a}_j \longrightarrow \lambda \mathbf{a}_j$ *mit* $\lambda \in K \setminus \{0\}$

2. $\mathbf{a}_j \longrightarrow \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i$ *mit* $i \neq j$ *und* $\lambda \in K$

3. $\mathbf{a}_i \longleftrightarrow \mathbf{a}_j$

Elementare Zeilenumformungen definiert man analog.

Satz *Elementare Spalten- oder Zeilenumformungen verändern den Rang einer Matrix nicht.*

Beweis: 1. und 3.: trivial.
Ad 2.: $\mathbf{x} = \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_i$ kann nach dem Austauschlemma für $\mathbf{a}_j$ getauscht werden (Koeffizient von $\mathbf{a}_j$ ist 1 und $1 \neq 0$):

$$[\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}] = [(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} \setminus \{\mathbf{a}_j\}) \cup \{\mathbf{x}\}]$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	-1	2
-2	-3	-12	-13
2	-1	2	-1

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	−1	2
−2	−3	−12	−13
2	−1	2	−1

$$\underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

s_1	s_2	s_3	s_4
1	2	3	4
2	5	−1	2
−2	−3	−12	−13
2	−1	2	−1

$$\xrightarrow{}$$

$$s_2 \to s_2 - 2s_1$$
$$s_3 \to s_3 - 3s_1$$
$$s_4 \to s_4 - 4s_1$$

s_1	s_2	s_3	s_4
1	0	0	0
2	1	−7	−6
−2	1	−6	−5
2	−5	−4	−9

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} \quad \underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array} \quad \underset{\substack{s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array} \quad \underset{s_4 \to s_4 - s_3}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -39 & 0 \end{array}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$\begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -12 & -13 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array} \quad \underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -6 \\ -2 & 1 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & -4 & -9 \end{array} \quad \underset{\substack{s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -39 & -39 \end{array} \quad \underset{s_4 \to s_4 - s_3}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -39 & 0 \end{array} \quad \underset{s_1 \to s_1 - 2s_2}{\longrightarrow}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & -5 & -39 & 0 \end{array}$$

Bestimmung des Rangs einer Matrix

$$
\begin{array}{cccc}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 \\
2 & 5 & -1 & 2 \\
-2 & -3 & -12 & -13 \\
2 & -1 & 2 & -1
\end{array}
\quad
\underset{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1 \\ s_4 \to s_4 - 4s_1}}{\longrightarrow}
\quad
\begin{array}{cccc}
s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & -7 & -6 \\
-2 & 1 & -6 & -5 \\
2 & -5 & -4 & -9
\end{array}
\quad
\underset{\substack{s_3 \to s_3 + 7s_2 \\ s_4 \to s_4 + 6s_2}}{\longrightarrow}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -5 & -39 & -39
\end{array}
\quad
\underset{s_4 \to s_4 - s_3}{\longrightarrow}
\quad
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 1 & 0 \\
2 & -5 & -39 & 0
\end{array}
\quad
\underset{s_1 \to s_1 - 2s_2}{\longrightarrow}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
-4 & 1 & 1 & 0 \\
12 & -5 & -39 & 0
\end{array}
\quad
\underset{\substack{s_1 \to s_1 + 4s_3 \\ s_2 \to s_2 - s_3}}{\longrightarrow}
\quad
\begin{array}{cccc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
-144 & 34 & -39 & 0
\end{array}
$$

Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Zeilen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$z_2 \to z_2 - 2z_1, \quad z_3 \to 3z_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 9 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Deutung elementarer Umformungen als Matrizenmultiplikation

Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$s_2 \to s_2 - 2s_1, \quad s_3 \to s_3 - 3s_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Invertieren einer Matrix

$$
\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
\quad \xrightarrow{\substack{s_2 \to s_2 - 2s_1 \\ s_3 \to s_3 - 3s_1}} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
\quad \xrightarrow{s_3 \to s_3 - 2s_2} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}
$$

$$
\xrightarrow{s_3 \to -s_3} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}
\quad \xrightarrow{\substack{s_2 \to s_2 + 2s_3 \\ s_1 \to s_1 - 3s_3 \\ s_2 \to -s_2}} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 4 & -1 \\ -6 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}
\quad \xrightarrow{s_1 \to s_1 - 2s_2} \quad
\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -4 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array}
$$