

Lineare Gleichungssysteme mit spezieller Systemmatrix

LGS mit spezieller Systemmatrix

$A \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Mit $f \longleftarrow A$ gilt $f : K^n \rightarrow K^m$ und $\text{def}(f) = n - m$.

Das LGS

$$\begin{pmatrix} I_m & A' \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hat die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0}_{n-m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A' \\ I_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n-m} \end{pmatrix} \mid t_1, \dots, t_{n-m} \in K \right\}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{cccccccccccc} x_1 + 0 + \dots + \dots + 0 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ 0 + x_2 + 0 + \dots + 0 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots + \dots + \dots + \dots + \vdots + \vdots + \vdots & = & \vdots \\ 0 + \dots + \dots + x_{m-1} + 0 + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_{m-1} \\ 0 + \dots + \dots + 0 + x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{r}
 x_1 + 0 + \dots + \dots + 0 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
 0 + x_2 + 0 + \dots + 0 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
 \vdots + \dots + \dots + \dots + \vdots + \quad \quad \quad \vdots + \quad \quad \quad \vdots + \quad \quad \quad \vdots = \vdots \\
 0 + \dots + \dots + x_{m-1} + 0 + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_{m-1} \\
 0 + \dots + \dots + 0 + x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n = b_m
 \end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \dots, x_n = t_{n-m}$, so folgt (für $i = 1, \dots, m$)

$$x_i = b_i - t_1 a_{i,m+1} - \dots - t_{n-m} a_{i,n},$$

also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t_1 a_{1,m+1} - \dots - t_{n-m} a_{1,n} \\ \vdots \\ -t_1 a_{m,m+1} - \dots - t_{n-m} a_{m,n} \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-m} \end{pmatrix}.$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ 0 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots + \cdots + \cdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ 0 + \cdots + 0 + a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \dots, x_n = t_{n-m}$, so folgt

$$x_m = \frac{b_m - t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m,n}}{a_{m,m}} = b'_m + t_1 a'_{1,m} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \dots, x_n = t_{n-m}$, so folgt

$$x_m = \frac{b_m - t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m,n}}{a_{m,m}} = b'_m + t_1 a'_{1,m} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m}$$

und daraus

$$\begin{aligned} x_{m-1} &= \frac{b_{m-1} - a_{m-1,m}x_m - t_1 a_{m-1,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m-1,n}}{a_{m-1,m-1}} \\ &= b'_{m-1} + t_1 a'_{1,m-1} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m-1}. \end{aligned}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \cdots & + & \cdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

Setzt man $x_{m+1} = t_1, \dots, x_n = t_{n-m}$, so folgt

$$x_m = \frac{b_m - t_1 a_{m,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m,n}}{a_{m,m}} = b'_m + t_1 a'_{1,m} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m}$$

und daraus

$$\begin{aligned} x_{m-1} &= \frac{b_{m-1} - a_{m-1,m}x_m - t_1 a_{m-1,m+1} - \cdots - t_{n-m} a_{m-1,n}}{a_{m-1,m-1}} \\ &= b'_{m-1} + t_1 a'_{1,m-1} + \cdots + t_{n-m} a'_{n-m,m-1}. \end{aligned}$$

Danach berechnet man rekursiv $x_{m-2}, x_{m-3}, \dots, x_1$.

LGS mit spezieller Systemmatrix – Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rclcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_2 + 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Setzt man $x_3 = t$, so folgt aus der 2. Gleichung

$$x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2t$$

und schließlich aus der 1. Gleichung

$$2x_1 = 4 - 3x_2 + x_3 = 4 - 3(3 - 2t) + t \quad \text{und somit} \quad x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2}t.$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_2 + 2x_3 & = & 3. \end{array}$$

Setzt man $x_3 = t$, so folgt aus der 2. Gleichung

$$x_2 = 3 - 2x_3 = 3 - 2t$$

und schließlich aus der 1. Gleichung

$$2x_1 = 4 - 3x_2 + x_3 = 4 - 3(3 - 2t) + t \quad \text{und somit} \quad x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{7}{2}t.$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad L = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

wenn L die Lösungsmenge bezeichnet.

LGS mit spezieller Systemmatrix – Bsp 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rclcl} x_1 & + & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 7. \end{array}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Bsp 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rclcl} x_1 & + & & & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 7. \end{array}$$

Setzt man $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$, so folgt

$$x_1 = 5 - 2t_1 - 4t_2$$

$$x_2 = 7 - 3t_1 - 5t_2$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Bsp 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{cccc} x_1 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 7. \end{array}$$

Setzt man $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$, so folgt

$$x_1 = 5 - 2t_1 - 4t_2$$

$$x_2 = 7 - 3t_1 - 5t_2$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Bsp 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (I_2 \ A) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Setzt man $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$, so folgt

$$x_1 = 5 - 2t_1 - 4t_2$$

$$x_2 = 7 - 3t_1 - 5t_2$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Bsp 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} I_2 & A \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Setzt man $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$, so folgt

$$x_1 = 5 - 2t_1 - 4t_2$$

$$x_2 = 7 - 3t_1 - 5t_2$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A \\ I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

LGS mit spezieller Systemmatrix – Bsp 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (I_2 \ A) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Setzt man $x_3 = t_1$ und $x_4 = t_2$, so folgt

$$x_1 = 5 - 2t_1 - 4t_2$$

$$x_2 = 7 - 3t_1 - 5t_2$$

Insgesamt also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A \\ I_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$L = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Beispiel 1

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 7x_4 & = & -1 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel 1

Elementare Zeilenumformungen durchführen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & -7 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \\ 0 & 2 & 8 & -10 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

LGS ist lösbar wegen des Satzes von Kronecker-Capelli!

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcl} x_1 & - & 10x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 & + & 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{array}$$

Beispiel 1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{rclcl} x_1 & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 7 \\ x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{l} x_1 - 10x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & 13 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ d.h., } \begin{array}{rcl} x_1 & - & 10x_3 + 13x_4 = 7 \\ x_2 & + & 4x_3 - 5x_4 = -2 \end{array}$$

Alle Lösungen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

und somit

$$L = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right]$$

Beispiel 2

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$19x_1 + 27x_2 + 31x_3 = 51$$

Beispiel 2

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

$$19x_1 + 27x_2 + 31x_3 = 51$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right)$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51\end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\19x_1 + 27x_2 + 31x_3 &= 51\end{aligned}$$

Erweiterte Systemmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 27 & 31 & 51 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 5 & 55 & 58 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

unlösbar!

Beispiel 3

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

Beispiel 3

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

Beispiel 3

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array} \right)$$

$$x_3 = \frac{2}{5}, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{5} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + \{0\} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} + [\emptyset]$$

Beispiel 4

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 & = & -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel 4

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 & + & 2x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Beispiel 4

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_4 & = & -6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 & = & 0 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 6 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{s_3 \leftrightarrow s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} x_3 = \lambda, \\ x_4 = -1, \\ x_2 = 2 - 2\lambda, \\ x_1 = 1 - 3\lambda \end{array} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda \\ 2 - 2\lambda \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$