DETERMINANTEN

Definition

Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$.

$$\det A := \sum_{\pi\in\mathbf{S}_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{\pi(1),1}\, a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n}$$

Schreibweise:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Beispiel $(n = 2)$

Permutation π	$\mathrm{sgn}(\pi)$	Term in der Summe
$\mathrm{id}_{\{1,2\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{1,1}a_{2,2}$
$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1	$a_{1,2}a_{2,1}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Beispiel ($n = 3$) – Die Regel von Sarrus

Permutation π	$\mathrm{sgn}(\pi)$	Term
$\mathrm{id}_{\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$+1$	$a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	-1	$a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	-1	$a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	-1	$a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = aqz + pyc + xbr - xqc - pbz - ayr$$

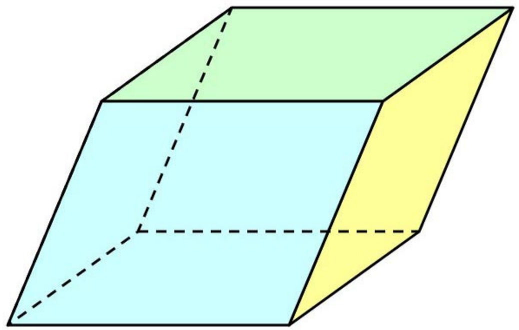
Beispiel

Dreiecksmatrizen:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2} \,\cdots\, a_{n,n}.$$

Permutation π	Term
$\mathrm{id}_{\{1,2,\ldots,n\}}$	$a_{1,1}\, a_{2,2} \,\cdots\, a_{n,n}$
$(i_1, i_2, \ldots, i_k)\pi'$	$\underbrace{a_{i_2,i_1} a_{i_3,i_2} \cdots a_{i_1,i_k}}_{=0} \Pi'$

Geometrische Interpretation der Determinante



Sei $A = (\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$P = \{t_1 \underline{a}_1 + \cdots + t_n \underline{a}_n \,|\, 0 \leq t_1, \ldots, t_n \leq 1\},$$

dann ist $|\det A|$ das Volumen von P.

Satz $A \in K^{n \times n}$ *ist genau dann regulär, wenn* $\det A \neq 0$.

Satz *Für* $A, B \in K^{n \times n}$ *gilt*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \qquad \textit{und} \qquad \det(A^T) = \det A.$$

Falls A *regulär ist, dann gilt auch* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Spaltenumformungen

Satz *Sei* $A = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n) \in K^{n\times n}$ *und* $\lambda \in K$.

Die Matrix A' *gehe aus* A *durch eine Spaltenumformung hervor.*

Dann gilt

Spaltenumformung bei $A \rightsquigarrow A'$	*Auswirkung auf die Determinante*
$\underline{a}_j \longrightarrow \lambda \underline{a}_j$	$\det(A') = \lambda \det A$
$\underline{a}_j \longrightarrow \underline{a}_j + \lambda \underline{a}_i$	$\det(A') = \det A$
$\underline{a}_i \longleftrightarrow \underline{a}_j$	$\det(A') = -\det A$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[]{\substack{z_3 \to z_3 - 2z_2 \\ z_4 \to 3z_4 - 2z_2 \ (!)}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

Berechnung von Determinanten

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{z_3 \to z_3 - 2z_2 \\ z_4 \to 3z_4 - 2z_2 \ (!)}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad \det A = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8}{3} = 16$$

Kofaktoren

$A = (a_{i,j}) \in K^{n\times n}$

Kofaktor $A_{i,j}$:

$$A_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ & & & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} A_{i,j}$$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. *Dann gilt:*

- $\forall i \ : \ \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

- $\forall j \ : \ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. *Dann gilt:*

- $\forall i \, : \, \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

- $\forall j \, : \, \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$. *Dann gilt:*

- $\forall i\ :\ \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$
- $\forall j\ :\ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. *Dann gilt:*

- $\forall i \; : \; \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

- $\forall j \; : \; \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. *Dann gilt:*

- $\forall i\ :\ \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

- $\forall j\ :\ \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$. *Dann gilt:*

- $\forall i \;:\; \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

- $\forall j \;:\; \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0.$$

Vorzeichenmuster: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Kofaktoren

Satz $A \in K^{n\times n}$, $\widehat{A} := (A_{i,j}) \in K^{n\times n}$

Dann gilt:

$$A \cdot \widehat{A}^T = (\det A) \cdot I_n$$

und daher

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widehat{A}^T.$$

Cramersche Regel

Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\det A \neq 0$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Cramersche Regel

Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\det A \neq 0$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\det A \neq 0$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 := \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A_1 \\ \det A_2 \\ \det A_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$