Funktionentheorie für Lehramtskandidaten: Schriftliche Vorlesungsunterlagen

Reinhard Winkler
TU Wien

Wintersemester 2013/2014

Zusammenfassung

Funktionentheorie ist nicht, wie dieser althergebrachte Name missverstanden werden könnte, die Theorie eines allgemeinen Funktionsbegriffs. Sondern sie befasst sich mit ganz speziellen Funktionen, nämlich mit den im komplexen Sinne differenzierbaren (holomorphen). Deshalb wird für dieses Teilgebiet der Mathematik oft die Bezeichnung *Komplexe Analysis* bevorzugt. Bemerkenswert ist, dass hier im Gegensatz zur reellen Analysis Differenzierbarkeit äquivalent ist mit Analytizität oder auch mit der Existenz einer Stammfunktion.

Für einen genaueren Überblick über den Inhalt der Vorlesung verweise ich auf das nachfolgende Inhaltsverzeichnis. Hier seien lediglich ein paar Bemerkungen über die mit dem vorliegenden Skriptum verfolgten Intentionen vorangestellt:

Die vorliegenden Unterlagen sollen in erster Linie die Hörerinnen und Hörer der Vorlesung von der Last des Mitschreibens befreien. Damit soll die Aufmerksamkeit frei gemacht werden für das Mitdenken.

Die Inhalte sind großteils z.B. in dem viel umfassenderen Lehrbuch *Complex Analysis* von Serge Lang zu finden. Interessierten sei dieses Werk als Ergänzung empfohlen. Mit dem Verweis [L] werde ich mich immer wieder darauf als Standardreferenz beziehen; und zwar auf die vierte Auflage, welche 1999 in der Serie *Graduate Texts in Mathematics* bei Springer erschienen ist. Der Stoff der Vorlesung, insbesondere der für die Prüfung relevante, soll jedoch (bestenfalls mit ganz geringen sich möglicherweise kurzfristig ergebenden Ausnahmen) durch das Skriptum abgedeckt sein. Der regelmäßige Besuch der Vorlesung kann durch die Lektüre eines Skriptums allerdings nur mangelhaft ersetzt werden. Meist wird im Skriptum nämlich auf die vollständige Durchführung aufwendiger Rechnungen verzichtet und auf [L] verwiesen. Darüber hinaus eignet sich der mündliche Vortrag an der Tafel besser für anschauliche und lebendige Erklärungen der Ideen, die hinter dem strengen mathematischen Gebäude stehen.

Manchmal werden aber auch in der Vorlesung nicht alle rechnerischen Details durchgeführt, um mehr Zeit für das Herausarbeiten der zahlreichen schönen Ideen zu haben. Dies erscheint deshalb gerechtfertigt, weil im zweiten Studienabschnitt die Beherrschung des mathematischen Handwerkszeugs vorausgesetzt werden darf. Deshalb geht es mehr um eine Ausweitung des Horizonts und um eine Vertiefung des Verständnisses für übergeordnete Zusammenhänge.

Der Aufbau der Vorlesung erfolgt abgesehen von den Auslassungen weitgehend parallel zu dem des Buches. Eine Ausnahme stellt vor allem das erste Kapitel dar. In der Vorlesung, welche im Studienplan ja für die höheren Semester vorgesehen ist, darf mit etwas mehr mathematischer Reife gerechnet werden, als sie bei [L] vorausgesetzt wird. Insbesondere sollten die komplexen Zahlen bereits bekannt sein sowie Vertrautheit mit den Grundkonzepten der Analysis herrschen. Dies wirkt sich auf die Art aus, wie entsprechende Inhalte früherer Lehrveranstaltungen rekapituliert werden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Rekapitulationen aus der Analysis

1.1 Die komplexen Zahlen

Der Abschnitt über komplexe Zahlen stellt eine Wiederholung von Bekanntem dar. Deshalb soll hier weniger Wert darauf gelegt werden, einen fixen axiomatischen Zugang zu fixieren, sondern darauf, verschiedene Aspekte zueinander in Beziehung zu setzen. Allfällige Aha-Erlebnisse werden dabei bewusst in Kauf genommen.

1.1.1 Eindeutigkeit des komplexen Zahlkörpers

Das System $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** geht aus dem der reellen Zahlen durch Adjunktion der sogenannten **imaginären Einheit** i hervor, deren alles bestimmende Eigenschaft die Gleichung $i^2 = -1$ ist. (Somit kann i keine reelle Zahl sein.) Präziser:

Unter einem **komplexen Zahlenkörper** verstehen wir eine Menge $\mathbb{C}$, deren Elemente $z \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen heißen, zusammen mit Rechenoperationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{C}$, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper (im Sinne der Algebra).

2. $\mathbb{C}$ enthält den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Unterkörper. (Folgende etwas allgemeinere Bedingung erweist sich oft als praktischer: $\mathbb{C}$ enthält eine isomorphe Kopie von $\mathbb{R}$. Für die Definition des Körpers der reellen Zahlen verweise ich auf die Analysis.)

3. $\mathbb{C}$ enthält ein Element i mit $i^2 = i \cdot i = -1$.

4. $\mathbb{C}$ ist minimal mit diesen Eigenschaften. Genauer: $\mathbb{C}$ enthält keine echte Teilmenge, welche auch die ersten drei Bedingungen erfüllt.

Übungsaufgabe 1.1.1 *1. Wiederholen Sie die bisher verwendeten Begriffe.*

2. Rekapitulieren Sie den Begriff des geordneten Körpers und zeigen Sie, dass es auf einem komplexen Zahlenkörper keine Ordnungsrelation gibt, die ihn zu einem geordneten Körper macht.

3. Zeigen Sie für einen komplexen Zahlenkörper (mit obiger Notation) $\mathbb{C} = \{a+ib : a, b, \in \mathbb{R}\}$*. (Hinweis: Zur Berechnung des multiplikativen Inversen von* $z = a + ib$ *erweitere man den Bruch* $z^{-1} = \frac{1}{a+ib}$ *mit* $a - ib$*.)*

Bis auf Isomorphie gibt es nur einen Körper der komplexen Zahlen, präziser: Zu je zwei komplexen Zahlenkörpern $\mathbb{C}_i$, $i = 1, 2$, gibt es genau zwei Isomorphismen ϕ_j, $j = 1, 2$, welche die reellen Zahlen punktweise fest lassen. Ist $i \in \mathbb{C}_1$ mit $i^2 = -1$, so gilt $\phi_1(i) = -\phi_2(i)$.

Übungsaufgabe 1.1.2 *1. Beweisen Sie diese Aussage. (Hinweis: Für einen Isomorphismus muss* $\phi(i)^2 = \phi(i^2) = \phi(-1) = -1$ *gelten, also* $\phi(i) \in \{i, -i\}$*. Der Wert* $\phi(i)$ *legt* ϕ *aber eindeutig fest.)*

2. Was bedeutet das im Fall $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2$*?*

Damit ist die Eindeutigkeitsfrage im Wesentlichen positiv geklärt. (Die Rolle von ϕ_1 und ϕ_2 wird gleich unten im Kontext der komplexen Konjugation klarer werden.) Nun wenden wir uns noch der Existenz zu. Dazu genügt es, wenigstens ein Beispiel (Modell) eines komplexen Zahlenkörpers anzugeben. Dies geschieht am einfachsten, indem man die Menge $\mathbb{C}$ angibt, festlegt welche Elemente von $\mathbb{C}$ wie als reelle Zahlen gedeutet werden, und indem man ein $i \in \mathbb{C}$ mit $i^2 = -1$ festlegt.

Damit ergeben sich

Übungsaufgabe 1.1.3 *Man erläutere, wie sich daraus die Operationen* $+$ *und* $\cdot$ *bereits eindeutig ergeben. (Hinweis: Zunächst überlege man sich, dass für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *die Darstellung der Form* $z = a + ib$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$*, wie sie nach Aufgabe 1.1.1 existiert, eindeutig ist.)*

Es bleibt dann vor allem noch zu zeigen, dass es sich bei der resultierenden Struktur um einen Körper handelt, die Minimalitätseigenschaft ergibt sich meist sehr leicht. Wir wollen dies an einigen Beispielen besprechen, zunächst dem für die Praxis wichtigsten.

1.1.2 Real- und Imaginärteil, Konjugium, Betrag

$\mathbb{C}$ wird als Menge aller formalen Ausdrücke $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ aufgefasst. Die reellen Zahlen a und b heißen **Real- bzw. Imaginärteil**. Für $b = 0$ erhält man die reelle Zahl a, für $a = 0$ und $b = 1$ die imaginäre Einheit i. Damit auch das Additionssymbol in natürlicher Weise gedeutet werden kann, ergibt sich als einzig mögliche Festlegung der Addition die Regel

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Also: Zwei komplexe Zahlen werden addiert, indem man Real- und Imaginärteile addiert.

Die Definition der Multiplikation muss etwas komplizierter erfolgen, weil das Quadrat der imaginären Einheit reell ist. Und zwar erhält man durch distributives Ausmultiplizieren

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

An dieser Stelle seien auch die **Konjugierte** $\overline{z} = \overline{a + ib} = a - ib$ der komplexen Zahl $z = a + ib$ sowie ihr **Betrag** $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ definiert.

Übungsaufgabe 1.1.4 *Berechnen Sie Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier komplexer Zahlen, etwa $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 3 - 4i$.*

Übungsaufgabe 1.1.5 *Überprüfen Sie, dass die obige Definition der komplexen Zahlen mittels Real- und Imaginärteil tatsächlich alle Eigenschaften eines komplexen Zahlenkörpers erfüllt.*

Übungsaufgabe 1.1.6 *Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ ein Automorphismus ist, und zwar der einzige neben der Identität, der $\mathbb{R}$ (punktweise oder als Menge?) fest lässt.*

1.1.3 Weitere Modelle der komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen als geordnete Paare: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d.h. jede komplexe Zahl wird als Paar $z = (a, b)$ aufgefasst statt, wie im vorigen Fall, als formale Summe $z = a + ib$. Ansonsten ändert sich gegenüber dem ersten Beispiel nichts. Offenbar können also die komplexen Zahlen als Punkte der Ebene gedeutet werden. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Koordinatendarstellung von z in der komplexen Zahlenebene. Der unverzichtbare Wert dieser geometrischen Deutung wird aber erst etwas später ersichtlich, wenn der Zusammenhang der komplexen Multiplikation mit der Polardarstellung besprochen wird.

$\mathbb{C}$ als Polynomring modulo $x^2 + 1$: Als eine weitere Variante des obigen Modells lässt sich der Ring $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ auffassen. Hier werden im Ring Polynome mit reellen Koeffizienten alle Polynome identifiziert, wenn ihre Differenz ein Vielfaches von $x^2 + 1$ ist. Zum vollen Verständnis dieser Konstruktion muss Grundwissen aus der Algebra als bekannt vorausgesetzt werden.

Erläuternd sei lediglich darauf hingewiesen, dass i Nullstelle des Polynomes $x^2 + 1$ ist, und dass in $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ genauso gerechnet wird wie mit Real und Imaginärteil. Man muss nur die imaginäre Einheit i durch die Unbestimmte x ersetzen, die der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, also $x^2 = -1$ genügt.

Matrizendarstellung komplexer Zahlen: Abschließend betrachten wir die Menge aller reellen 2×2-Matrizen A der speziellen Bauart

$$A = A(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgabe 1.1.7 *Zeigen Sie, dass über die Zuordnung* $z = a + ib \mapsto A(a, b)$ *ein Isomorphismus definiert wird.*

Übungsaufgabe 1.1.8 *Zeigen Sie* $\det A(a, b) = |z|^2$ *für* $z = a + ib$*.*

Übungsaufgabe 1.1.9 *Zeigen Sie: Wendet man* $A(a, b)$ *auf einen Punkt* (c, d) *der Ebene an, so sind die Koordinaten des Ergebnisses gerade Real- und Imaginärteil des Produktes* $(a + ib)(c + id)$*.*

Man bedenke schließlich, dass die Matrizenmultiplikation der Hintereinanderausführung der entsprechenden linearen Abbildungen entspricht. Damit ergibt sich die Deutung einer komplexen Zahl als jener Transformation der Ebene, die durch die Multiplikation mit dieser Zahl gegeben ist.

Zum Nachweis der in Aufgabe 1.1.7 behaupteten Isomorphie ist für die Addition nichts mehr zu tun. Für die Multiplikation ist er zwar nicht ganz offensichtlich, dafür umso bemerkenswerter. Die formale Überprüfung läuft zwar auf einen banalen Vergleich zwischen Matrizenmultiplikation und der Multiplikation komplexer Zahlen in ihrer Darstellung mittels Real- und Imaginärteil hinaus. Der Sinn dahinter führt aber direkt zur fundamentalen **geometrischen Deutung der Operationen** komplexer Zahlen.

1.1.4 Polardarstellung und komplexe Zahlenebene

(vgl. [L] I §2) Die Darstellung der komplexen Zahlen als Punkt der komplexen Zahlenebene ist offensichtlich sehr gut geeignet für die Addition

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

welche sich als Vektoraddition deuten lässt. (Es sei an die Kräfteparallelogramme aus der Physik erinnert.)

Für die Multiplikation ist ein anderer Zugang erhellender, welcher an die Matrizendarstellung anknüpft. Dazu stellen wir folgende Überlegungen an:

Nach dem Pythagoräischen Lehrsatz ist der Abstand r eines Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ der Ebene vom Ursprung durch $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ gegeben. Für einen Punkt auf dem Einheitskreis, d.h. $r = 1$, lassen sich a und b als Werte der trigonometrischen Funktionen für einen durch diesen Punkt (bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π) eindeutig bestimmten Winkel φ interpretieren: $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Gehen wir von der Paardarstellung (a, b) über zur Darstellung $a + ib$, so ergibt sich daraus für beliebige komplexe Zahlen z (d.h. auch für solche mit $|z| \neq 1$) die Darstellung

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = [r, \varphi].$$

Man nennt sie auch die **trigonometrische Darstellung** oder die **Darstellung in Polarkoordinaten**. Man beachte, dass lediglich für den Ursprung (für die Null) der Winkel φ modulo 2π nicht eindeutig bestimmt ist. Die imaginäre Einheit i entspricht dem Punkt $(0, 1)$. Alle Punkte $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, bilden die **reelle (x-) Achse**, alle Punkte $(0, b)$, $b \in \mathbb{R}$, die **imaginäre Achse**. Der Winkel

$$\varphi = \arg z$$

heißt auch **Argument** von z.

Im Falle $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$ entspricht z die Matrix

$$A = A(a, b) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

also die Drehung um den Winkel φ. Also bewirkt die Multiplikation mit einer komplexen Zahl z vom Betrag 1 eine Drehung der komplexen Ebene um diesen Winkel. Dem Produkt zweier komplexer Zahlen z_i mit $|z_i| = 1$ und Argumenten φ_i entspricht die Drehung um den Winkel $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. (Man beachte, dass an dieser Stelle, wie auch in Zukunft an allen entsprechenden, die Winkel modulo 2π zu verstehen sind, d.h. $\varphi \in \mathbb{R}$ darf durch $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ersetzt werden.) Durch Vergleich obiger Matrix mit derjenigen Matrix, die durch Multiplikation der beiden φ_1 und φ_2 entsprechenden Matrizen entsteht, erhält man

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 & -(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) \\ \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 & \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vergleich der Eintragungen in der Hauptdiagonale bestätigt das bekannte Additionstheorem für den Cosinus, der Nebendiagonale für den Sinus.

Bei der Multiplikation mit einem beliebigen $z \in \mathbb{C}$, dessen Betrag r i.a. von 1 verschieden ist, ist noch mit r zu multiplizieren, was einer Streckung um den Faktor r entspricht.

Um die vielfältigen Zusammenhänge noch weiter zu betonen, erwähnen wir auch noch die aus der Analysis bekannte fundamentale Beziehung

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = [1, \varphi]$$

zwischen Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen. Sie führt zur alternativen Form der Polardarstellung beliebiger komplexer Zahlen z mit Betrag r und Argument φ als

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Nützlich ist die Polardarstellung insbesondere für die Division, welche sich nun automatisch durch $\frac{[r_1,\varphi_1]}{[r_2,\varphi_2]} = [\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2]$ ergibt. (Mit Winkeln ist natürlich weiterhin modulo 2π zu rechnen.) Damit wird die an früherer Stelle vielleicht als Trick empfundene Methode, bei der Division komplexer Zahlen den Bruch mit der Konjugierten des Nenners zu erweitern, transparent.

Übungsaufgabe 1.1.10 *Präzisieren Sie diese Andeutung.*

Für das Potenzieren folgt $[r, \varphi]^n = [r^n, n\varphi]$. Doch auch die Berechnung von n-ten Wurzeln komplexer Zahlen wird dadurch klar. Offenbar hat man für vorgegebenes $z = [r, \varphi]$ zur Bestimmung der Lösungen $z_0 = [r_0, \varphi_0]$ der komplexen

Gleichung $z_0^n = z$ die reelle Gleichung $r_0^n = r$ in r_0 sowie die Gleichung $n\varphi_0 = \varphi \mod 2\pi$ in φ_0 zu lösen. Für r_0 gibt es die eindeutige Lösung $r_0 = \sqrt[n]{r}$, für φ_0 genau die n verschiedenen Lösungen $\varphi_0 = \frac{1}{n}\varphi + \frac{k}{n}2\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Wir fassen zusammen:

Seien die komplexen Zahlen $z_j = (a_j, b_j) = [r_j, \varphi_j]$, $j = 1, 2$, in Koordinaten- und Polardarstellung gegeben. Dann folgt die Addition der Rechenregel

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Algebraisch ist die additive Gruppe der komplexen Zahlen isomorph zur direkten Summe $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ zweier Kopien der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Entsprechend gilt für die Subtraktion

$$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2).$$

Die Multiplikation folgt der Rechenregel

$$[r_1, \varphi_1] \cdot [r_2, \varphi_2] = [r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2].$$

Die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen $z \neq 0$ ist daher isomorph zur direkten Summe $(\mathbb{R}^+, \cdot) \oplus (\mathbb{R}, +)/(2\pi\mathbb{Z})$ der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}^+, \cdot) \cong_{\log} (\mathbb{R}, +)$ der positiven reellen Zahlen und der additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo 2π (der Kreisgruppe). Entsprechend gilt für die Division

$$\frac{[r_1, \varphi_1]}{[r_2, \varphi_2]} = [\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2].$$

Potenzen berechnet man nach der Formel

$$[r, \varphi]^n = [r^n, n\varphi],$$

n-te Wurzeln gibt es n Stück (lediglich für $z = 0$ nur eine), nämlich $z_0^n = z$ genau für $z_0 = [\sqrt[n]{r}, \varphi_0]$ mit

$$\varphi_0 = \frac{1}{n}\varphi + \frac{k}{n}2\pi, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Für $z = 1$ spricht man von den n-ten **Einheitswurzeln**).

Übungsaufgabe 1.1.11 *Lassen Sie sich geeignete komplexe Zahlen einfallen, anhand derer Sie die Umrechnung zwischen Koordinaten- und Polardarstellung sowie die Ausführung der Grundrechnungsarten an komplexen Zahlen illustrieren. Ergänzen Sie Ihre Rechnung durch geometrische Illustrationen. Spielen Sie dabei mehrere Varianten hinsichtlich Verschwinden und Nichtverschwinden von Real- und Imaginärteil durch.*

1.2 Topologie, insbesondere der Ebene

Aufgrund der Interpretation von $\mathbb{C}$ als Ebene $\mathbb{R}^2$ liegt eine natürliche topologische Struktur vor, der im vorliegenden Abschnitt unser Hauptinteresse gilt. (In [L] sind hierfür vor allem die Kapitel I §4 und III §1 relevant.) Da es sich weitgehend um Wiederholungen aus der Analysis handelt, genügt eine ziemlich knappe Behandlung des Gegenstandes.

1.2.1 Allgemeine Grundlagen metrischer und topologischer Räume

Die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ erfüllt folgende Bedingungen:

1. $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 0$ nur für $z = 0$.
2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Übungsaufgabe 1.2.1 *Beweisen Sie diese Aussagen.*

Insbesondere erfüllt $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ alle Eigenschaften einer **Metrik**, d.h. $(\mathbb{C}, d)$ ist (ebenso wie alle Teilmengen von $\mathbb{C}$) ein **metrischer Raum**:

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$ für alle $z_i \in \mathbb{C}$ und $d(z_1, z_2) = 0$ nur für $z_1 = z_2$. (Positivität)
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$. (Symmetrie)
3. $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$. (Dreiecksungleichung)

Übungsaufgabe 1.2.2 *Beweisen Sie diese Aussagen.*

Die folgenden Definitionen sind auch sinnvoll, wenn $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen metrischen Räumen ersetzt wird. Die Mengen $D(z, r) = \{z' \in \mathbb{C} : \; d(z', z) < r\}$, $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$, heißen **offene Kreisscheiben** (engl. Disc). Dabei heißt z **Mittelpunkt** und r **Radius**. Eine Menge $O \subseteq \mathbb{C}$ heißt **Umgebung von** z bzw. z heißt **innerer Punkt von** O, falls es ein $r > 0$ gibt mit $D(z, r) \subseteq O$. Die Menge O heißt **offen**, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen**, wenn das Komplement $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. z heißt **Berührungspunkt** von A, falls jede Umgebung von z Punkte von A enthält. Die Menge $\overline{A}$ aller Berührungspunkte von A heißt **Abschluss** von A. Mengen der Form $\overline{D(z, r)} = \{z' \in \mathbb{C} : \; d(z', z) \leq r\}$ heißen **abgeschlossene Kreisscheiben**. Die Menge A^o aller inneren Punkte von A heißt auch das **Innere** von A. z heißt **Randpunkt** von O, wenn es Berührungspunkt sowohl von O als auch von $\mathbb{C} \setminus O$ ist. $z \in A$ heißt **isolierter Punkt** von A, falls es eine Umgebung O von z mit $O \cap A = \{z\}$ gibt. z heißt **äußerer Punkt** von A, falls es innerer Punkt von $\mathbb{C} \setminus A$ ist. $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn es in einer geeigneten Kreisscheibe mit endlichem Radius enthalten ist. z heißt **Häufungspunkt** der Menge A bzw. der Folge z_n, $n \in \mathbb{N}$, wenn jede Umgebung von z unendlich viele Punkte von A bzw. unendlich viele Folgenglieder enthält.

Das System der wie oben definierten offenen Mengen eines metrischen Raumes erfüllt die Axiome einer **Topologie**:

1. Die leere Menge $\emptyset$ wie auch die gesamte Menge $\mathbb{C}$ sind offen.
2. Der Durchschnitt je endlich vieler offener Mengen ist offen.
3. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Übungsaufgabe 1.2.3 *Beweisen diese drei Aussagen.*

Übungsaufgabe 1.2.4 *Beweisen Sie folgende einfache Aussagen über topologische Räume:*

1. *Jeder Punkt ist entweder innerer Punkt, Randpunkt oder äußerer Punkt einer gegebenen Menge.*
2. *A^o ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.*
3. *$\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.*
4. *Endliche Vereinigungen sowie beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*
5. *Geben Sie Beispiele unendlich vieler offener Mengen, deren Schnitt nicht offen ist.*

Übungsaufgabe 1.2.5 (Unterräume, Spurtopologie) *Zeigen Sie, dass jede Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen bzw. metrischen Raumes X selbst wieder in natürlicher Weise ein topologischer bzw. metrischer Raum ist. (Anleitung: Genau die Schnitte von A mit in X offenen Mengen gelten als offen in A.)*

Eine Folge von Elementen z_n, $n \in \mathbb{N}$, eines topologischen Raumes heißt **konvergent** gegen z, und z heißt **Grenzwert** der Folge, symbolisch $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, falls es zu jeder Umgebung U von z einen Index $N_U \in \mathbb{N}$ gibt mit $z_n \in U$ für alle $n \geq N_U$. Man sagt, eine Funktion f zwischen zwei topologischen Räumen konvergiere gegen y für z gegen z_0, symbolisch $\lim_{z\to z_0} f(z) = y$, falls es zu jeder Umgebung U von y eine Umgebung V von z_0 gibt, deren Bild (mit der möglichen Ausnahme von z_0 selbst) unter f vollständig in U liegt, d.h. $f(V \setminus \{z_0\}) \subseteq U$. Auch in diesem Fall schreibt man $y = \lim_{z\to z_0} f(z)$ und nennt y den Grenzwert von f für $z \to z_0$. f heißt **stetig in** z_0, falls $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)$. f heißt (schlechthin oder global) **stetig**, falls f in allen Punkten des Definitionsbereiches stetig ist.

Übungsaufgabe 1.2.6 *Zeigen Sie, dass für eine Abbildung zwischen metrischen/topologischen Räumen folgende Bedingungen äquivalent sind.*

1. *f ist stetig.*
2. *Die Urbilder sämtlicher offener Mengen unter f sind offen.*
3. *Die Urbilder sämtlicher abgeschlossener Mengen unter f sind abgeschlossen.*
4. *f ist folgenstetig, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ impliziert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. (Diese Bedingung ist zu den anderen nur im Falle metrischer Räume äquivalent, im allgemeinen Fall kann sie schwächer sein.)*

Übungsaufgabe 1.2.7 *Zeigen Sie, dass die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist.*

Übungsaufgabe 1.2.8 *Präzisieren Sie, was es bedeutet, dass Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer durch 0) und Konjugation komplexer Zahlen stetig sind. (Anleitung: Da Addition etc. von zwei Variablen abhängen, müssen Sie $\mathbb{C}^2$ als topologischen Raum deuten. Wie?)*

Übungsaufgabe 1.2.9 *Beweisen Sie die Aussagen aus Aufgabe 1.2.8.*

Eine Folge von Elementen z_n, $n \in \mathbb{N}$, eines metrischen Raumes heißt **Cauchyfolge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ε gibt, so dass $d(z_{n_1}, z_{n_2}) < \varepsilon$ für alle $n_1, n_2 \geq N_\varepsilon$ gilt. Ein metrischer Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchyfolge konvergiert.

Übungsaufgabe 1.2.10 *Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Sie dürfen dabei verwenden, dass $\mathbb{R}$ diese Eigenschaft besitzt.*

1.2.2 Kompaktheit

(vgl. [L] I §4.) Ein System von Mengen $O_i, i \in I$ heißt **Überdeckung** der Menge A, falls A in der Vereinigung aller O_i enthalten ist. Handelt es sich um Teilmengen eines topologischen Raum und sind die O_i offen, spricht man von einer **offenen Überdeckung**. Ist für $J \subseteq I$ das System aller $O_i, i \in J$, immer noch Überdeckung von A, so spricht man von einer **Teilüberdeckung**. Ist J darüber hinaus endlich, liegt eine **endliche Teilüberdeckung** vor. Die Menge A heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Für metrische Räumen X sind äquivalent (**Satz von Bolzano-Weierstraß**):

1. X ist kompakt.
2. Jede unendliche Teilmenge $A \subseteq X$ hat einen Häufungspunkt in X (der nicht notwendig in A liegen muss.
3. Jede Folge in X hat eine konvergente Teilfolge.

In den euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ (und damit insbesondere in $\mathbb{C}$) sind genau jene Teilmengen A kompakt, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt sind. (**Satz von Heine-Borel**)

Übungsaufgabe 1.2.11 *Wiederholen Sie die Beweise der Sätze von Bolzano-Weierstraß und Heine-Borel für den Fall der komplexen Zahlen.*

Übungsaufgabe 1.2.12 *Zeigen Sie: Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind stets abgeschlossen. Gilt das auch für beliebige topologische Räume?*

Übungsaufgabe 1.2.13 *Zeigen Sie: Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind selbst kompakt.*

Übungsaufgabe 1.2.14 *Sei A eine kompakte Menge, und seien die A_i, $i \in I$, abgeschlossene Teilmengen von A, von denen je endlich viele nichtleeren Schnitt besitzen. Dann ist der Schnitt aller A_i nicht leer.*

Stetigkeit und Kompaktheit, Satz vom Extremum: Das Bild kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen ist wieder kompakt. Insbesondere nimmt jede reellwertige stetige Funktion auf einer kompakten Menge sowohl Minimum als auch Maximum an.

Übungsaufgabe 1.2.15 *Wiederholen Sie den Beweis dieser Aussagen aus der Analysis.*

Gleichmäßige Stetigkeit und Kompaktheit: Sei f eine stetige Funktion auf dem kompakten metrischen Raum X mit Werten in einem metrischen Raum Y. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig, d.h.: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ (abhängig nur von ε, nicht aber von den x_i) derart, dass für beliebige $x_i \in X$ aus $d(x_1, x_2) < \delta$ auch $d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ folgt.

Übungsaufgabe 1.2.16 *Wiederholen Sie den Beweis dieses Satzes aus der Analysis.*

In metrischen Räumen (X, d) ist in natürlicher Weise der Abstand nicht nur zwischen Punkt und Punkt definiert, sondern auch zwischen Punkt und Menge sowie zwischen Menge und Menge: $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, $d(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B)$.

Übungsaufgabe 1.2.17 *Zeigen Sie, dass die Metrik eine stetige Funktion ist, ebenso die Abbildung $x \mapsto d(x, A)$.*

Übungsaufgabe 1.2.18 *Folgern Sie daraus: Ist A kompakt, B abgeschlossen und disjunkt zu A, so ist $d(A, B) > 0$. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass dies nicht gelten muss, sofern nur eine der Voraussetzungen verletzt ist.*

1.2.3 Zusammenhang

(Diesem Abschnitt entsprechen in [L] am ehesten III §1-2.)

Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren, offenen Mengen dargestellt werden kann. Maximale zusammenhängende Teilmengen eines (i.a. selbst nicht zusammenhängenden) topologischen Raumes heißen **Zusammenhangskomponenten**. Dieser (wie jeder andere topologische Begriff) ist auch auf jede Teilmenge T eines topologischen Raumes X anwendbar, weil T mit der Spurtopologie selbst einen topologischen Raum bildet. Die **Spurtopologie** besteht aus allen Mengen der Gestalt $T \cap O$ mit O offen in X.

Übungsaufgabe 1.2.19 *Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten eines topogischen Raumes eine Partition bilden. (Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass die Vereinigung zusammenhängender Mengen mit einem gemeinsamen Punkt stets wieder zusammenhängend ist. Damit liegt jeder Punkt in jener Komponente, die sich als Vereinigung aller x enthaltenden zusammenhängenden Mengen ergibt.)*

Übungsaufgabe 1.2.20 *Wiederholen Sie aus der reellen Analysis: Unter den Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die konvexen Mengen, d.h. die Intervalle (offen, halboffen, abgeschlossen, eigentlich oder uneigentlich) zusammenhängend.*

Übungsaufgabe 1.2.21 *Zeigen Sie: Stetige Bilder zusammenhängender Mengen sind selbst zusammenhängend.*

Übungsaufgabe 1.2.22 *Folgern Sie daraus den Zwischenwertsatz für stetige reelle Funktionen.*

Übungsaufgabe 1.2.23 *Zeigen Sie: Abschlüsse zusammenhängender Mengen sind selbst zusammenhängend.*

Übungsaufgabe 1.2.24 *Folgern Sie: Zusammenhangskomponenten sind stets abgeschlossen.*

Definition 1.2.25 *Unter einem* **Weg** *in $\mathbb{C}$ versteht man eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. $a := \gamma(0)$ heißt* **Anfangspunkt***, $b := \gamma(1)$* **Endpunkt** *des Weges. Man spricht auch von einem* **Weg von** *a* **nach** *b. Eine Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ heißt* **wegzusammenhängend***, wenn es zwischen je zwei Punkten von A einen Weg mit Werten ausschließlich in A gibt. Maximale wegzusammenhängende Teilmengen eines (i.a. selbst nicht wegzusammenhängenden) Raumes heißen* **Wegkomponenten***.*

Übungsaufgabe 1.2.26 *Zeigen Sie, dass die Wegkomponenten eines topologischen Raumes eine Partition bilden.*

Übungsaufgabe 1.2.27 *Zeigen Sie, dass konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (das sind Teilmengen, welche mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsgerade enthalten) stets wegzusammenhängend sind.*

Die wichtigsten Beziehungen zwischen Zusammenhang und Wegzusammenhang sollen nun hervorgehoben werden:

Satz 1.2.28 *Wegzusammenhängende Mengen sind stets zusammenhängend.*

Beweis: Wir gehen indirekt vor. Ist die Menge X nicht zusammenhängend, so lässt Sie sich als disjunkte Vereinigung $X = A \cup B$ nichtleerer offener Mengen A und B schreiben. Man hat lediglich zu zeigen, dass es für $a \in A$ und $b \in B$ keinen Weg γ von a nach b gibt. Der Wertebereich $W = \gamma([0,1])$ eines solchen wäre zusammenhängend, was der disjunkten Zerlegung von W in die beiden nichtleeren offenen Teilmengen $W \cap A$ und $W \cap B$ widerspräche. $\square$

Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht, sehr wohl jedoch für offene zusammenhängende Teilmengen (sogenannte **Gebiete**) von $\mathbb{C}$ (oder allgemeiner von $\mathbb{R}^n$). Es gilt sogar eine etwas stärkere Formulierung:

Satz 1.2.29 *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_1, z_2 \in G$. Dann gibt es einen endlichen Polygonzug, der z_1 und z_2 verbindet. Der Polygonzug kann sogar achsenparallel gewählt werden.*

Beweis: Als Gebiet ist X offen und zusammenhängend. Offenbar ist die Relation, durch einen endlichen Polygonzug verbunden werden zu können, eine Äquivalenzrelation. Da sich (wegen offen) um jeden Punkt $x \in X$ eine konvexe Kreisscheibe (bzw. Kugel) innerhalb X legen lässt, sind alle Punkte innere Punkte ihrer Äquivalenzklasse. Also sind die Klassen offen. Sei A eine Klasse aber nicht die einzige, so erhielte man mit der Vereinigung B aller restlichen Klassen eine disjunkte Zerlegung von X in nichtleere offene Mengen. Widerspruch zu zusammenhängend. $\square$

Für Mengen, die keine Gebiete sind, gilt diese Aussage nicht. Das klassische Beispiel dafür ist die Menge $X = G \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, welche aus dem Graphen G der Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ $(0 < x \leq 1)$ plus dem Ursprung besteht.

Satz 1.2.30 *Dieser Raum X ist zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend.*

Beweis: Als stetiges Bild eines Intervalls ist G zusammenhängend, damit nach einem Übungsbeispiel auch der Abschluss $\overline{G} = X$. Es gibt aber keinen Weg, der den Ursprung mit dem Punkt $(1, \sin 1) \in X$ verbindet. Ein solcher müsste nämlich nach dem Zwischenwertsatz alle möglichen x-Werte durchlaufen, was nur bei Surjektivität möglich wäre. Aber dann müsste X als stetiges Bild von $[0,1]$ auch kompakt, insbesondere also abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ sein. Die Punkte $(0, y)$ mit $y \in [-1,1] \setminus \{0\}$ liegen aber in $\overline{X} \setminus X$, Widerspruch. $\square$

1.2.4 Die Riemannsche Zahlenkugel

Oft ist es sinnvoll, zu den komplexen Zahlen einen Punkt ∞ hinzuzufügen. Man kann sich vorstellen, dass man sich diesem unendlich fernen Punkt auf viele Arten annähern kann, wobei es nur darauf ankommt, dass man dabei jede vorgegebene beschränkte (oder auch jede kompakte) Teilmenge von $\mathbb{C}$ irgendwann verlässt. Das ist z.B. der Fall, wenn man irgendeine Gerade in der komplexen Zahlenebene unbeschränkt in eine Richtung entlanggeht. Am besten kann man sich dies durch eine Kugel veranschaulichen, deren Südpol im Koordinatenursprung liegt und deren Achse normal auf die Grundebene steht. Einer komplexen Zahl z entspricht zunächst ein Punkt P in der Grundebene. Die Verbindungslinie zwischen P und dem Nordpol der Kugel schneidet die Kugel genau in einem weiteren Punkt P', welcher der Zahl z zugeordnet ist. Der Nordpol kann dann in natürliche Weise als Punkt ∞ interpretiert werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von der **Riemannschen Zahlenkugel**. Diese Sichtweise kann je nach Zeit an späterer Stelle (z.B. im Kontext gebrochen rationaler Funktionen, vgl. [L], p. 171/172) noch besser beleuchtet werden.

Die Riemannsche Zahlenkugel ist ein Beispiel für eine Einpunktkompaktifizierung (in diesem Fall von $\mathbb{C}$) vor. Generell heißt ein topologischer Raum X' **Einpunktkompaktifizierung** des Raumes X, wenn sich X als Unterraum eines Raumes $X' := X \cup \infty$ mit $\infty \notin X$ deuten lässt.

Sind X und $\infty \notin X$ vorgegeben, so heiße eine Teilmenge O von $X' := X \cup \{\infty\}$ offen nimmt, wenn entweder O schon eine offene Teilmengen im Raum X ist, oder wenn $X' \setminus O$ eine kompakte Teilmenge von X ist.

Übungsaufgabe 1.2.31 *Untersuchen Sie, ob bzw. unter welchen Bedingungen auf diese Weise eine Einpunktkompaktifizierung von X entsteht (die man dann die Alexandroff-Kompaktifizierung von X nennt).*

1.3 Differenzierbarkeit reell-komplex

Wir nähern uns dem Hauptgegenstand der Funktionentheorie: **komplexe Funktionen** $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$, die zusätzlich noch im komplexen Sinne differenzierbar sind. Zunächst gibt es offenbar eindeutig bestimmte reellwertige Funktionen $u, v : U \to \mathbb{R}$ (welche wir für $z = x + iy \in U$ oft auch als Funktionen in den beiden reellen Variablen x und y auffassen wollen), sodass

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

gilt.

Differenzierbarkeit ist formal genauso definiert wie im reellen: Die komplexe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, heißt **differenzierbar** in $z \in U^o$, falls der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h},$$

genannt die **Ableitung** von f an der Stelle z, existiert. Ist U offen und f differenzierbar in allen $z \in U$, so heißt f auf U **holomorph**. Ist $V = f(U)$ offen und $f : U \to V$ bijektiv mit einer holomorphen Umkehrfunktion, so nennt man f auch einen **holomorphen Isomorphismus**, im Falle von $U = V$ einen **holomorphen Automorphismus**.

Die formale Ähnlichkeit spiegelt sich wieder in zur reellen Analysis völlig analogen Eigenschaften:

Seien f, g, h komplexe Funktionen. Dann gilt:

1. Ist f differenzierbar in z, so auch stetig in z.

2. Sind f und g differenzierbar in z, so auch $f + g$, $f - g$, fg und, sofern $g(z) \neq 0$, auch $\frac{f}{g}$. Es gilt $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$, $(f - g)'(z) = f'(z) - g'(z)$, $(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$ und $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{1}{g^2(z)}(g(z)f'(z) - f(z)g'(z))$.

3. Für $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, gilt $f'(z) = nz^{n-1}$.
4. Ist f differenzierbar in z und g differenzierbar in $f(z)$, so ist die Komposition $h = g \circ f$ differenzierbar in z mit $h'(z) = f'(z)g'(f(z))$.

Übungsaufgabe 1.3.1 *Beweisen Sie die angegebenen Differentiationsregeln. (Anleitung: Die Beweise können unmittelbar vom reellen Fall auf den komplexen übertragen werden.)*

Übungsaufgabe 1.3.2 *Illustrieren Sie für einige Werte von n (etwa für $n = -1, 0, 1, 2$) die Potenzfunktionen $f : z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, indem Sie die Transformation des Gitters $\{z = a + ib : \ a \in \mathbb{Z} \text{ oder } b \in \mathbb{Z}\}$ unter f skizzieren.*

Übungsaufgabe 1.3.3 *Welche Möglichkeiten, eine komplexe Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ zu definieren, erscheinen Ihnen sinnvoll? Illustrieren Sie eine solche Funktion ähnlich wie zuvor die Potenzfunktionen.*

Komplexe Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist eine wesentlich stärkere Bedingung als Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Sinne der reellen Analysis.

Übungsaufgabe 1.3.4 *Illustrieren Sie das am Beispiel der Konjugation $f : z \mapsto \overline{z}$.*

Wir werden dieses Phänomen im Kontext der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen noch deutlicher beleuchten.

1.4 Potenzreihen

(vgl. [L] II §1-5.) Die Theorie der Potenzreihen unterscheidet sich im Komplexen kaum vom (aus der Analysis bereits bekannten) reellen Fall. Deshalb stellt auch dieser Abschnitt weitgehend nur eine Wiederholung dar, und wir können entsprechend rasch voranschreiten. Dennoch lohnt es sich, einige Aspekte etwas deutlicher hervorzuheben. Vieles aus der Theorie der reellen Funktionen lässt sich nämlich im Kontext des Komplexen wesentlich besser verstehen. Darin besteht eine der Hauptbedeutungen der Funktionentheorie schlechthin, und erst recht im Hinblick auf den Schulunterricht.

1.4.1 Formale Potenzreihen

(vgl. [L] II §1.) Zunächst wollen wir Potenzreihen als formale Ausdrücke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, in einem Symbol x betrachten und den algebraischen Hintergrund der sich ergebenden algebraischen Struktur $\mathbb{C}[[x]]$ beleuchten. Da wir statt x auch T (vgl. [L]) oder irgendein anderes Symbol hätten wählen können, kommt es nur auf die Folge der Koeffizienten a_n an. Eine formale Potenzreihe lässt sich also schlicht als Folge auffassen, d.h. als Abbildung $n \mapsto a_n$. Die Polynome bilden eine Teilmenge $\mathbb{C}[x]$, nämlich all jener Folgen $(a_n)_{0 \leq n < \infty}$, wo ab einem geeigneten Index alle Koeffizienten verschwinden, d.h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 0$ für alle $n > N$.

Auf der Menge der Polynome sind Addition und Subtraktion gliedweise definiert und die Multiplikation so, dass mit der Unbestimmten x unter Beibehaltung aller gewohnten Rechengesetze, insbesondere also nach der Rechenregel $x^k x^l = x^{k+l}$ gerechnet werden kann. Explizit bedeutet das für zwei Polynome $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (wir schreiben die Polynome hier bereits als unendliche Reihen): $(p+q)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$, $(p-q)(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)x^n$ und $(p \cdot q)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. (Bei dieser Definition der c_n spricht man bekanntlaich auch vom Cauchyprodukt.)

Auf diese Art erhält die Menge der Polynome die algebraische Struktur eines Integritätsbereichs (eines kommutativen Rings mit Einselement ohne Nullteiler). Für uns ist von besonderem Interesse, dass sich diese Operationen in *natürlicher* Weise auf die Menge der formalen Potenzreihen fortsetzen lassen. Obige Formeln sind nämlich auch für nicht abbrechende Potenzreihen sinnvoll.

Hier sei das Wort *natürlich* in diesem Zusammenhang aber noch auf eine weitere Art erläutert, indem wir auf die Begriffe der Topologie zurückgreifen. Man kann auf der Menge der formalen Potenzreihen nämlich eine Metrik und damit eine Topologie definieren. Zunächst definieren wir die Ordnung $\mathrm{ord}(f)$ einer Potenzreihe $f = \sum_n a_n x^n$ als den minimalen Index n mit $a_n \neq 0$. Für $f = 0$ schreiben wir $\mathrm{ord}(f) = \infty$. Der Abstand $d(f,g)$ zweier Potenzreihen f und g lässt sich damit als $d(f,g) = 2^{-\mathrm{ord}(f-g)}$ schreiben.

Übungsaufgabe 1.4.1

1. *Zeigen Sie $\mathit{ord}(-f) = \mathit{ord}(f)$, $\mathit{ord}(f+g) \geq \min\{\mathit{ord}(f), \mathit{ord}(g)\}$ und $\mathit{ord}(fg) = \mathit{ord}(f) + \mathit{ord}(g)$.*

2. *Zeigen Sie, dass d wirklich eine Metrik auf $\mathbb{C}[[x]]$ ist.*

3. *Zeigen Sie, dass Addition, Subtraktion und Multiplikation stetig bezüglich dieser Metrik sind.*

4. *Erklären Sie, wie sich $\mathbb{C}[[x]]$ als Vervollständigung von $\mathbb{C}[x]$ bezüglich dieser Metrik auffassen lässt.*

5. *Ersetzt man den Körper der komplexen Zahlen durch einen beliebigen anderen Körper, so sind offenbar die gleichen Konstruktionen möglich. Zeigen Sie, dass im Falle eines endlichen Körpers K der Ring $K[[x]]$ sogar kompakt ist.*

Wie verhält es sich mit der Division von Potenzreihen? Wir haben uns dazu zunächst zu überlegen, welche $f \in \mathbb{C}[[x]]$ ein Inverses besitzen, d.h. ein $g \in \mathbb{C}[[x]]$ mit $fg = 1$. Wegen $\mathrm{ord}(1) = 0 \geq \max\{\mathrm{ord}(f), \mathrm{ord}(g)\} \geq \mathrm{ord}(f)$ ist das nur möglich, sofern $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_0 \neq 0$. Tatsächlich ist diese notwendige Bedingung aber auch hinreichend.

Übungsaufgabe 1.4.2 *Zeigen Sie, dass jede formale Potenzreihe $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit nicht verschwindendem konstanten Glied $a_0 \neq 0$ ein Inverses besitzt. (Anleitung: Setzen Sie $g = f^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ unbestimmt an und zeigen*

Sie induktiv, dass sich aus der Definition des Cauchyproduktes alle Koeffizienten b_n eindeutig bestimmen lassen. In [L] befindet sich übrigens auf Seite 40 ein interessanter Beweis, der die geometrische Reihe als Inverses von $f(x) = 1 - x$ ins Spiel bringt.)

Mittels Erweiterung des Bereichs der formalen Potenzreihen ist es sogar möglich, Inverse von Elementen $f \neq 0$ mit $\mathrm{ord} f > 0$ zu finden. Für $f(x) = x^n$ z.B. muss man lediglich Elemente x^{-n} zulassen. Man braucht also sicher Elemente, in denen endlich viele Summanden erlaubt sind, in denen negative Exponenten vorkommen, also Objekte der Form $f(x) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n x^n$, $N \in \mathbb{N}$.

Übungsaufgabe 1.4.3 *Zeigen Sie, dass diese erweiterten Potenzreihen einen Körper bilden, der als Quotientenkörper von $\mathbb{C}[[x]]$ aufgefasst werden kann.*

Machten die Elemente mit $a_0 = 0$ Probleme bei der Inversenbildung, so erlauben sie dafür eine andere Operation. Sie können nämlich in beliebige andere Potenzreihen eingesetzt werden. Sei also wieder $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, wobei allerdings $b_0 = 0$ vorausgesetzt sei. Handelt es sich um Polynome, so ist klar, was unter $h = f \circ g$ zu verstehen ist, nämlich $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)^n$, wobei in diesem Fall nur endliche viele Terme auftreten.

Übungsaufgabe 1.4.4 *Wie lässt sich die Komposition von Polynomen in natürlicher Weise (was heißt das?) auf formale Potenzreihen $f \circ g$ mit ord$(g) > 0$ fortsetzen. Warum gibt es bei ord$(g) = 0$ Probleme?*

Übungsaufgabe 1.4.5

1. *Rekapitulieren Sie diesen Unterabschnitt nochmals unter dem Gesichtspunkt, was auch dann noch gilt, wenn bei Potenzreihen und Polynomen von den Koeffizienten lediglich vorausgesetzt wird, dass sie aus einem kommutativen Ring mit Einselement stammen.*

2. *Was ändert sich alles, wenn sogar auf Kommutativität des Ringes verzichtet wird?*

1.4.2 Konvergenz von Potenzreihen

(vgl. [L] §2.) Die nachfolgend aufgelisteten Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen stellen Wiederholungen bzw. unmittelbare Übertragungen aus der reellen Analysis dar und werden deshalb nur in sehr knapper Form rekapituliert.

Definitionsgemäß ist der **Wert einer unendlichen Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \in \mathbb{C}$, der Grenzwert der Folge der Partialsummen $s_N = \sum_{n=0}^{N} x_n = x_0 + \ldots + x_N$, sofern diese Folge konvergiert. In diesem Fall heißt die Reihe **konvergent**. Ersetzt man die Glieder x_n durch ihre Absolutbeträge $|x_n|$ und liegt immer noch Konvergenz vor, so spricht man von **absoluter Konvergenz**.

Die Glieder x_n können von einer Variablen z abhängen. In diesem Fall spricht man von einer **Funktionenreihe**, im Falle der speziellen Gestalt $x_n = a_n z^n$ (oder, bei einer von 0 verschiedenen **Entwicklungsstelle** z_0, $x_n = a_n(z - z_0)^n$)

mit Konstanten $a_n \in \mathbb{C}$ von einer **Potenzreihe**. Das wichtigste Beispiel ist die **geometrische Reihe**, wo $a_n = 1$ für alle n gilt. Sie konvergiert genau für $|z| < 1$, und zwar gegen den Wert $\frac{1}{1-z}$.

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist stets kreisförmig, genauer: Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ besitzt einen eindeutig bestimmten **Konvergenzradius** $r \in [0, \infty]$ mit folgender Eigenschaft: f konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < r$ absolut und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > r$. Fixiert man ein beliebiges $r' < r$, so herrscht auf $\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| \leq r'\}$ sogar **gleichmäßige Konvergenz**. Dies bedeutet, dass in der Grenzwertdefinition das $N(\varepsilon)$ unabhängig vom speziellen z aus diesem Bereich gewählt werden kann. Für $|z - z_0| = r$ kann keine allgemeingültige Aussage gemacht werden. Der Konvergenzradius ist durch die Formel

$$r = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|^{-1}}$$

gegeben. Da die Grenzfunktion gleichmäßig konvergenter stetiger Funktionen selbst wieder stetig ist, folgt dass **Potenzreihen** im Inneren ihres Konvergenzbereiches **stetige Funktionen** darstellen. Der **Abelsche Grenzwertsatz** zeigt, dass dies sogar and Randpunkten des Konvergenzbereiches gilt, sofern es sich um Konvergenzpunkte handelt. Der **Riemannsche Umordnungssatz** besagt, dass genau in absolut konvergenten Reihen die Reihenfolge der Summation beliebig vertauscht werden darf, ohne Konvergenzverhalten und Wert der Reihe zu verändern. Verwandt dazu: In absolut konvergenten **Doppelreihen**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

darf die Summationsreihenfolge vertauscht werden.

Übungsaufgabe 1.4.6 *Wiederholen Sie die Beweise obiger Behauptungen aus der reellen Analysis.*

Übungsaufgabe 1.4.7 *Was wissen Sie über die geometrische Reihe? (Definition, Formel für die Partialsummen, Konvergenzbereich etc. inklusive Beweise)*

1.4.3 Beziehungen zwischen formalen und konvergenten Potenzreihen

(vgl. [L] II §3.) In diesem Unterabschnitt geht es um die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Operationen für formale Potenzreihen mit den Werten der durch sie dargestellten Funktionen zusammenpassen. Wir wollen annehmen, dass alle vorkommenden Potenzreihen $f, g, \ldots$ um die selbe Anschlussstelle z_0 entwickelt sind.

Das **skalare Vielfache** αf einer Funktion ist definiert durch $(\alpha f)(z) = \alpha f(z)$. Hier gibt es keine Probleme: Wird f durch eine Potenzreihe mit den Gliedern a_n dargestellt, so αf durch jene mit den Gliedern $b_n = \alpha a_n$ $n \in \mathbb{N}$. Am Konvergenzbereich ändert sich nichts.

Analog die **Summe** $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$ (und natürlich auch Differenz). Hat f eine Potenzreihendarstellung mit den Gliedern a_n, g mit den Gliedern b_n, so besitzt $f+g$ eine Potenzreihendarstellung mit den Gliedern a_n+b_n. Der Konvergenzbereich enthält zumindest den Durchschnitt der Konvergenzbereiche von f und g. Der Beweis ist hier, ebenso wie für αf unmittelbar klar.

Weniger selbverständlich ist, dass auch das **Produkt** $(fg)(z) = f(z)g(z)$ der beiden Konvergenzreihen f und g eine Potenzreihendarstellung besitzt, und zwar als Cauchyprodukt der beiden formalen Potenzreihen.

Übungsaufgabe 1.4.8 *Erklären Sie, wie dies aus den bisherigen Behauptungen folgt.*

Bevor wir uns den etwas anspruchsvolleren Fragen betreffend Quotient und Komposition von Potenzreihen zuwenden, erinnern wir noch an den wichtigen **Identitätssatz** für Potenzreihen: Seien zwei Potenzreihen mit Gliedern a_n und b_n und positivem Konvergenzradius gegeben. Gibt es eine unendliche Menge von Werten z_n, $n \in \mathbb{N}$, die sich am Entwicklungspunkt z_0 häuft, wo $f(z_n) = g(z_n)$ gilt, so folgt $a_n = b_n$ für alle n. Zum Beweis betrachtet man die Differenz $f-g$. Dann bleibt zu zeigen, dass eine Potenzreihe mit Gliedern c_n, die nicht alle verschwinden, für alle $z \neq z_0$ aus einer geeigneten Umgebung von z_0 Werte $f(z) \neq f(z_0)$ annimmt. O.B.d.A. sei $z_0 = f(z_0) = 0$. Weiters sei m minimal mit $c_m \neq 0$. Dann gilt

$$f(z) = c_m z^m (1 + h(z))$$

mit einer Potenzreihe h, welche $h(0) = 0$ erfüllt und, als in einer Umgebung konvergente Potenzreihe, stetig bei 0 ist. Hieraus folgt die gewünschte Eigenschaft.

Wir wenden uns nun der **Inversen** $\frac{1}{f}$ einer Funktionen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Potenzreihendarstellung zu. Klarerweise muss $f(z_0) = a_0 \neq 0$ vorausgesetzt werden. Dann gibt es eine formale Potenzreihe g, welche bezüglich des Cauchyproduktes invers zu f ist. Wir müssen uns also lediglich davon überzeugen, dass diese inverse Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius besitzt. Für die Durchführung dieser Rechnung sei auf [L] verwiesen, Seite 65. Klarerweise ergibt sich daraus auch die Möglichkeit **Quotienten** $\frac{f}{g} = f \cdot (\frac{1}{g})$ von Potenzreihen zu bilden, sofern das konstante Glied des Nenners nicht verschwindet. Beliebige Potenzreihen g im Nenner (außer natürlich die Nullreihe) kann man als $g(z) = (z-z_0)^m(b_m + b_{m+1}x + \ldots) = (z-z_0)^m g_0(z)$ mit $g_0(z_0) = b_m \neq 0$ darstellen. Also lässt sich der Quotient in der Form $\frac{f}{g} = (z-z_0)^{-m}\frac{f}{g_0} = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ bilden, sofern man endlich viele Glieder mit negativen Potenzen zulässt, wie das auch schon bei formalen Potenzreihen geschehen ist.

Abschließend beschäftigen wir uns noch mit der **Komposition** von Potenzreihen. Zwecks notationeller Einfachheit betrachten wir die Entwicklungsstelle $z_0 = 0$. Seien die Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ gegeben. Unter welchen Bedingungen kann

$$f(g(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)^n$$

für z hinreichend nahe bei $z_0 = 0$ konvergieren? Offenbar ist $b_0 = 0$, also jene Voraussetzung, die schon bei den formalen Potenzreihen eine wichtige Rolle gespielt hat, auch hier sinnvoll. Konvergiert die Reihe für f für alle z mit $|z| < r$, so sind keine Probleme zu erwarten, sofern die Ausdrücke innerhalb der großen Klammer durch r beschränkt werden können. Für hinreichend kleines s kann aber, da die Reihe von g einen positiven Konvergenzradius besitzt, sicher $\sum_{k=1}^{\infty} |b_n| s^n \leq r$ garantiert werden. Für $b_0 = 0$ ist also die Komposition von Potenzreihen tatsächlich möglich und entspricht jener von formalen Potenzreihen. In [L] werden auf Seite 66 auch die rechnerischen Details durchgeführt.

Übungsaufgabe 1.4.9 *Überlegen Sie sich, inwieweit obige Überlegungen auch noch unter der schwächeren Bedingung $|b_0| < r$ sinnvoll sind.*

1.4.4 Analytische Funktionen

(vgl. [L] II §4.)

Eine komplexe Funktion f heißt **analytisch** im Punkt z_0, falls es eine Umgebung von z_0 gibt, auf der f eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ besitzt. f heißt analytisch auf einer offenen Menge U, wenn f an jeder Stelle $z_0 \in U$ analytisch ist.

Die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts lassen sich also so formulieren, dass sich unter den jeweils angegebenen Voraussetzungen die Eigenschaft *analytisch* auf Summen, Produkte, Quotienten und Kompositionen analytischer Funktionen vererbt.

Der wichtigste darüber hinausgehende Satz besagt, dass **jede Potenzreihe** auf dem Inneren ihres Konvergenzbereiches **analytisch** ist, d.h. nicht nur (nach Definition) an der Anschlussstelle eine Potenzreihendarstellung hat, sondern in jedem Punkt einer offenen Kreisscheibe. Da auch dieser Satz (genannt auch **Transformationssatz**) aus der reellen Analysis bekannt sein sollte, sei für den Beweis, der im Wesentlichen lediglich eine recht naheliegende Anwendung des binomischen Lehrsatzes verwendet, auf [L] p.69/70 verwiesen.

1.4.5 Differentiation von Potenzreihen

(vgl. [L] II §5.) Die letzte Wiederholung von Standardstoff aus der reellen Analysis betrifft das Differenzieren von Potenzreihen. Kurz: Alles, was man gerne tun möchte, ist hier erlaubt. Etwas ausführlicher:

Man möchte gerne **gliedweise differenzieren**. Zu diesem Zweck muss die im gesamten Inneren des Konvergenzbereichs von f gültige Darstellung

$$f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (n+1) z^n$$

für die Ableitung f' bewiesen werden.

Dazu zeigt man zunächst mit Hilfe der Formel für den Konvergenzradius, dass die oben auftretende Potenzreihe mit den Gliedern $(n+1)a_{n+1}$ denselben Konvergenzradius hat wie die ursprüngliche Reihe für f. Sodann beweist man mittels binomischen Lehrsatzes und diversen Abschätzungen nach einiger Rechnung, dass die Differenzenquotienten von f tatsächlich gegen diese Reihe konvergieren.

Übungsaufgabe 1.4.10 *Führen Sie diesen Beweis durch. (Anleitung: Konsultieren Sie [L] auf den Seiten 72 und 73.)*

Insbesondere gilt $a_1 = f'(z_0)$ und nach Iteration

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Entsprechendes gilt natürlich auch für Stammfunktionen: Zu jeder Potenzreihe erhält man durch gliedweises Integrieren eine Potenzreihendarstellung einer Stammfunktion mit dem gleichen Konvergenzradius.

Beachten Sie in den folgenden Übungsbeispielen, dass die teilweise aus der reellen Analysis bekannten Tatsachen auch im Komplexen gelten.

Übungsaufgabe 1.4.11 *Leiten Sie die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ aus der Gültigkeit der Differentialgleichung $f' = f$ und der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ ab.*

Übungsaufgabe 1.4.12 *Leiten Sie mittels Berechnung von Cauchyprodukten die Funktionalgleichung $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ her.*

Übungsaufgabe 1.4.13 *Leiten Sie die Potenzreihendarstellungen von $f(z) = \sin z$ und $g(z) = \cos z$ aus der Gültigkeit folgender Gleichungen her: $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f' = g$ und $g' = -f$.*

Übungsaufgabe 1.4.14 *Beweisen Sie mit Hilfe der Potenzreihendarstellungen die Formel $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$.*

Übungsaufgabe 1.4.15 *Wie lassen sich die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ausdrücken? (Beweis)*

Übungsaufgabe 1.4.16 *Wiederholen Sie aus der reellen Analysis die Reihendarstellungen für Exponentialfunktion und Logarithmus, übertragen Sie diese auf den komplexen Fall und zeigen Sie damit $\exp(\log z) = z$. Für welche z gilt Ihre Argumentation?*

Übungsaufgabe 1.4.17 *Wiederholen Sie aus der reellen Analysis die Binomialreihe und diskutieren Sie ihr Konvergenzverhalten im Komplexen.*

Kapitel 2

Einfache Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Kapitel sammeln wir jene grundlegenden Eigenschaften holomorpher Funktionen, die ohne komplexe Wegintegrale behandelt werden können.

2.1 Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

(Dieser Abschnitt entspricht [L] I, §6.) Wie bereits anlässlich der Definition der komplexen Ableitung angedeutet wurde, ist die komplexe Differenzierbarkeit eine wesentlich stärkere Eigenschaft als die Differenzierbarkeit des entsprechenden zweidimensionalen Vektorfeldes.

Etwas präziser lässt sich das fassen, indem man die Zerlegung

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

von f in Real- und Imaginärteil betrachtet. Das zugehörige zweidimensionale reelle Vektorfeld F ist definiert durch

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Anstatt formal vorzugehen, versuchen wir in den nachfolgenden Überlegungen die Grundidee herauszuarbeiten. Differenzierbarkeit von F in einem Punkt heißt Approximierbarkeit durch irgendeine über $\mathbb{R}$ lineare Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Die zugehörige Jacobi'sche Martix lautet

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

Komplexe Differenzierbarkeit hingegen bedeutet lineare Approximierbarkeit durch eine über $\mathbb{C}$ lineare Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Lokal gilt also

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z)$$

mit einem für $z \to z_0$ hinreichend kleinen Fehlerterm $\phi(z)$. Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$ entspricht, wie wir wissen, einer Drehstreckung. Matrizen von Drehstreckungen haben die spezielle Bauart

$$A = A(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Vergleichen wir die beiden Matrizen, erhalten wir aus der Forderung $A = J_F(x,y)$ die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Die Überlegungen lassen sich auch leicht umkehren, also sind die holomorphen Funktionen durch die Gültigkeit der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen charakterisiert.

Übungsaufgabe 2.1.1 *Führen Sie einen formal vollständigen Beweis dafür, dass eine komplexe Funktion in z_0 genau dann differenzierbar ist, wenn die Cauch-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.*

Übungsaufgabe 2.1.2 *Welche Beziehung besteht zwischen der Ableitung einer holomorphen Funktion und der Jacobi-Determinante des zugehörigen Vektorfeldes?*

2.2 Winkeltreue Abbildungen

(Dieser Abschnitt entspricht [L] I, §7.) Holomorphe Funktionen sind definitionsgemäß komplex differenzierbare Abbildungen. Sie lassen sich deshalb lokal durch Drehstreckungen approximieren. Drehstreckungen verändern aber keine Winkel. (Man nennt solche Abbildungen **konform**). Wir erwarten daher, dass auch holomorphe Funktionen konform sind. Eine Ausnahme ist jedoch zu beachten.

Als Beispiel wählen wir die Quadratfunktion $f : z \mapsto z^2$ und betrachten den rechten Winkel, der von der positiven reellen und positiven imaginären Achse eingeschlossen wird. Durch Quadrieren bleibt die erste dieser beiden Halbgeraden fest, die zweite wird zur negativen reelen Achse. Also hat sich der Winkel verdoppelt. Die Ursache liegt darin, dass die Ableitung $2z$ an der betrachteten Stelle $z = 0$ verschwindet. Ist jedoch $f'(z) \neq 0$ für eine in einer Umgebung von z holomorphe Funktion f, so werden von ihr erwartungsgemäß Winkel nicht nur von Geraden, sondern allgemeiner von differenzierbaren Kurven nicht verändert. Dies ist der Inhalt von Theorem 7.1 in [L], wo auch ein etwas formalerer Beweis gegeben wird.

Übungsaufgabe 2.2.1 *Ist $f : z \mapsto \overline{z}$ konform?*

2.3 Invertierbare und offene Abbildungen

(vgl. [L] II, §6.) In diesem Abschnitt interessieren wir uns für die Frage, unter welchen Bedingungen analytische Funktionen analytische Umkehrfunktionen besitzen. Da konstante Funktionen hierfür nicht in Frage kommen, wollen wir sie in diesem Abschnitt der Einfachheit halber von vornherein ausschließen.

Wir erinnern uns an den Hauptsatz über Umkehrfunktionen im reellen Fall. Er trifft die entsprechende Aussage für stetig differenzierbare Funktionen: Ist $f : U \to \mathbb{R}^k$ ($U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen) stetig differenzierbar und $f'(x_0)$, $x_0 \in U$, regulär (d.h. mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante), so gibt es lokal (d.h. zwischen geeigneten offenen Umgebungen von x_0 und $f(x_0)$) eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion. Insbesondere ist f ein lokaler **Homöomorphismus** (d.h. stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrfunktion) und somit auch lokal eine **offene Abbildung**. (Dies bedeutet, dass offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden.)

Im Wesentlichen wollen wir also *stetig differenzierbar* durch *analytisch* ersetzen sowie $\mathbb{R}^k$ durch $\mathbb{C}$. Dies (und noch etwas mehr) gelingt tatsächlich unter den natürlichen Voraussetzungen. Die Resultate sind die ersten tieferen Sätze der Vorlesung.

In [L] sind noch alternative Beweismöglichkeiten angedeutet. Wir orientieren uns aber an der ausführlich behandelten. Wir wollen die Strategie erläutern, indem wir die Überlegungen in mehrere Schritte aufteilen und im Zuge dessen die wichtigsten Aussagen in der entsprechenden Reihenfolge zusammenstellen. Für detaillierte Rechnungen verweisen wir wieder auf [L] bzw. auf Übungsaufgaben.

1. **Umkehrfunktion als formale Potenzreihe:** Wir wissen bereits aus einem früheren Abschnitt, dass das Rechnen mit formalen Potenzreihen weitgehend jenem mit den dargestellten Funktionen entspricht. Es liegt also nahe, bei einer vorgegebenen Potenzreihe $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ nach einer zunächst formalen Potenzreihe $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ mit $f \circ g = g \circ f = x$ zu suchen. Da die Komposition formaler Potenzreihen nur für verschwindendes konstantes Glied definiert ist, müssen wir uns auf diesen Fall beschränken. Geht man zunächst von der Forderung

$$f(g(x)) = a_1 g(x) + a_2 g(x)^2 + \ldots = x$$

aus, ist es nicht schwer einzusehen (Details Übung), dass sich die durch Koeffizientenvergleich ergebenden Gleichungen für die b_n induktiv lösen lassen, sofern $a_1 \neq 0$. Insbesondere erhält man $b_1 = a_1^{-1} \neq 0$, also lässt sich mit demselben Argument eine formale Potenzreihe h mit $g(h(x)) = x$ finden. Damit folgt auch

$$g(f(x)) = g(f(g(h(x))) = g(h(x)) = x.$$

Damit ist g tatsächlich Invers zu f bezüglich der Komposition. (Vgl. nachfolgendes Übungsbeispiel.) Also gilt der **Satz von der kompositionsinversen formalen Potenzreihe:** *Formale Potenzreihen der Form $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_1 \neq 0$ besitzen Inverse bezüglich der Komposition.*

2. **Konvergenz dieser formalen Inversen:** Der Beweis der Konvergenz der im vorigen Schritt erhaltenen formalen Potenzreihe erfordert einigen Einfallsreichtum. Eine wesentliche Idee besteht darin, f zunächst durch eine geeignete einfachere Reihe f^* mit reellen Koeffizienten $a_n^* \geq |a_n|$ zu ersetzen und deren formale Inverse φ zu betrachten. (Als geeignet erweist sich eine leicht modifizierte geometrische Reihe.) Für die Koeffizienten c_n von φ zeigt man $|b_n| \leq c_n$. Damit erzwingt die Konvergenz von φ auch jene von g. Um erstere zu zeigen, verwendet man die Formel für die geometrische Reihe. Man erhält für φ eine quadratische Gleichung, in deren Lösung eine Wurzel auftritt. Diese kann man schließlich mittels der binomischen Reihe für den Exponenten $\frac{1}{2}$ als Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius darstellen.

3. **$f'(z_0) \neq 0$ impliziert lokale analytische Isomorphie:** Zum analytischen Analogon des weiter oben zitierten Satzes über lokale Umkehrfunktionen stetig differenzierbarer reeller Funktionen ist jetzt nur mehr ein kleiner Schritt: **Satz von der lokalen analytischen Isomorphie:** *Ist f auf der offenen Menge U analytisch und $f'(z_0) \neq 0$ für $z_0 \in U$, so ist f ein lokaler analytischer Isomorphismus bei z_0.* Sei zunächst die Entwicklungsstelle $z_0 = 0$ und auch $f(0) = 0$. Mit Hilfe des Satzes über die Konvergenz der Komposition formaler Potenzreihen und wegen der im vorigen Schritt bewiesenen Konvergenz von g lassen sich Umgebungen der 0 finden, wo $f(g(x)) = x$ gilt. Also ist die Behauptung für diesen Fall gezeigt. Den allgemeinen Fall (z_0 und $f(z_0)$ beliebig) führt man durch Variablensubstitution auf den spezielleren zurück.

4. **Analytisch und nicht konstant impliziert offen:** Es ist klar, dass jede lokale analytische Isomorphie eine offene Abbildung ist. Oben mussten wir aber $a_1 = f'(z_0) \neq 0$ voraussetzen. Um den **Satz von der offenen Abbildung** für beliebige nichtkonstante analytische Funktionen zu beweisen, ist also (o.B.d.A. sei $z_0 = 0$) der Fall

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n = a_m z^m (1 + h(z))$$

mit $a_m \neq 0$ für beliebiges m zu untersuchen. Wir werden ihn auf den bereits bewiesenen Fall zurückführen. Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^m = a_m$ gewählt. Unter Verwendung der binomischen Reihe erhält man

$$f(z) = (az(1 + h_1(z)))^m.$$

Die Funktion $f_1(z) = az(1 + h_1(z))$ hat eine Potenzreihendarstellung mit linearem Glied $\neq 0$ und ist daher lokal offen bei 0, was sich auf $f(z) = f_1(z)^m$ überträgt.

5. **Analytische Funktionen und analytische Isomorphismen:** Eine genauere Analyse der vorgebrachten Argumente ergibt folgenden Satz: Sei

f analytisch um z_0 mit der Darstellung

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei $m \geq 1$ und $a_m \neq 0$. Dann gibt es einen lokal analytischen Isomorphismus φ bei 0 mit

$$f(z) = a_0 + \varphi(z - z_0)^m.$$

6. Analytisch und injektiv impliziert analytischer Isomorphismus: Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass f auf einer offenen Menge U analytisch und außerdem injektiv ist, so folgt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Wäre nämlich $f'(z) = 0$, müsste in der Darstellung aus dem vorigen Schritt $m \geq 2$ gewählt werden, woraus sich ein Widerspruch dazu ableiten ließe, dass die m-te Potenz in keiner Umgebung der 0 injektiv ist.

Übungsaufgabe 2.3.1 *Im Beweis des ersten Teils wurde vom Assoziativgesetz für die Komposition formaler Potenzreihen Gebrauch gemacht. Wo?*

Übungsaufgabe 2.3.2 *Beweisen Sie das Assoziativgesetz für die Komposition formaler Potenzreihen.*

Übungsaufgabe 2.3.3 *Für welche $m \in \mathbb{Z}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $f : z \mapsto z^m$ in z_0 lokal analytisch invertierbar?*

2.4 Maximumprinzip, Fundamentalsatz der Algebra, analytische Fortsetzung

(vgl. [L] II §7 und III §1.) Wir können den Satz von der offenen Abbildung so lesen: Ist f analytisch und nicht konstant bei z_0, so wird jede Umgebung U von z_0 surjektiv auf eine Umgebung $f(U)$ von $f(z_0)$ abgebildet. Insbesondere gibt es also Punkte $z \in U$ mit $|f(z)| > f(z_0)$. Umgekehrt formuliert:

Ist f analytisch auf der offenen Menge U und nimmt $|f|$ in $z_0 \in U$ ein lokales Maximum an, so ist f_0 in einer Umgebung von z_0 konstant (man nennt das *lokal konstant* um z_0). Auf lokale Konstanz kann auch unter der Voraussetzung geschlossen werden, dass der Realteil von f an z_0 ein Maximum besitzt. (Man hat dazu lediglich die erste Aussage auf $e^{f(z)}$ anzuwenden.)

Bevor wir den geraden Weg weitergehen, wollen wir aus dieser einfachen Variante des Maximumprinzips noch den **Fundamentalsatz der Algebra** folgern: Jedes nichtkonstante komplexe Polynom $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_d z^d$, $d \geq 1$, $a_d \neq 0$, besitzt eine Nullstelle.

Beweis: Man stellt zunächst fest, dass $\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0$. Daraus folgt, dass es ein R gibt mit $|f(z)| > |f(0)|$ für alle z außerhalb der Kreisscheibe $D = D(0, R)$. Auf dem kompakten Abschluss von D muss die stetige Funktion

$|f|$ ein Minimum annehmen, welches daher sogar globales Minimum ist und im Inneren von D liegt. Wir bezeichnen es mit z_0. f ist als offene Abbildung surjektiv auf eine Umgebung von $f(z_0)$. Also gäbe es im Falle $f(z_0) \neq 0$ auch eine Stelle z_1 mit $|f(z_1)| < |f(z_0)|$, Widerspruch. □

Wir wollen noch Folgerungen über lokal konstante Funktionen ziehen. Zunächst die Übertragung eines bekannten **Lemmas** aus der reellen Analysis: Ist f auf der offenen und zusammenhängenden Menge (dem Gebiet) $U \subseteq \mathbb{C}$ holomorph mit $f'(z) = 0$ für alle $z \in U$, so ist f konstant.

Beweis: Wir betrachten zunächst zwei Punkte $z_1, z_2 \in U$, welche durch ein Geradenstück verbunden werden können. Es folgt, dass die Abbildung $t \mapsto f(z_1 + t(z_2 - z_1))$ von $[0, 1]$ nach $\mathbb{C}$ nach der Kettenregel differenzierbar mit Ableitung $(z_2 - z_1)f' = 0$, also konstant ist. f ist also konstant auf jeder Teilmenge von U, in der je zwei Punkte durch ein endliches Polygon verbunden werden können. Wir wissen aber bereits aus Satz 1.2.29, dass jedes Gebiet diese Eigenschaft hat. □

Als nächstes zeigen wir das **Lemma von den diskret liegenden Nullstellen**: Sei f auf dem Gebiet U analytisch und nicht konstant. Dann haben die Nullstellen von f keinen Häufungspunkt in U.

Beweis: Gäbe es nämlich so einen Häufungspunkt in U, so wäre nach dem Identitätssatz für Potenzreihen f in einer Umgebung dieses Punktes die Nullreihe. Insbesondere wäre die Menge S aller $z \in U$, wo f lokal (d.h. in einer Umgebung) konstant 0 ist, nicht leer. In der Umgebung all dieser Punkte wird f durch die Nullreihe dargestellt. Es folgt, dass S offen ist. Aus Stetigkeitsgründen ist f aber auch auf dem Abschluss $\overline{S}$ in U die Nullfunktion, also ist $S = \overline{S}$ in U offen und abgeschlossen. Weil in U als zusammenhängender Menge nur die trivialen Teilmengen diese Eigenschaft haben und S nicht leer ist, folgt $S = U$, also $f = 0$ auf ganz U, Widerspruch zur Voraussetzung.□

Es folgt unmittelbar der **Satz von der eindeutigen analytischen Fortsetzung:** Seien f und g analytisch auf dem Gebiet U und besitze die Menge S aller $z \in U$, wo $f(z) = g(z)$ gilt, einen Häufungspunkt in U, so folgt $f = g$. (Für den Beweis ist lediglich das Lemma auf $f - g$ anzuwenden.)

Wir beschließen diesen Abschnitt mit dem **Maximumsprinzip:** Sei f analytisch auf dem Gebiet U. 1. Formulierung: Nimmt $|f|$ in U ein Maximum an, so ist f konstant. 2. Formulierung: Sei f nicht konstant auf U und besitzte f eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\overline{U}$. Dann liegt jede Maximalstelle z_0 von $|\tilde{f}|$ auf dem Rand von U.

Beweis: Es genügt der Beweis der ersten Formulierung: Sei $z_0 \in U$ Maximalstelle von $|f|$. Aus dem ersten Satz dieses Abschnitts folgt, dass f lokal konstant ist, nach dem Satz von der eindeutigen analytischen Fortsetzung sogar konstant auf ganz U.□

Übungsaufgabe 2.4.1 *Sind Häufungspunkte von Nullstellen am Rand eines Gebietes G einer nicht konstanten holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ möglich?*

Kapitel 3

Rund um Integralsatz und -formel von Cauchy

3.1 Komplexe Integrale über glatte Kurven

[L] III 2. Wir haben bereits den Begriff der Ableitung vom reellen Fall auf den komplexen übertragen und sind damit in natürlicher Weise auf die holomorphen, d.h. komplex differenzierbaren Funktionen gestoßen. Analog wollen wir uns nun der Integration komplexer Funktionen $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zuwenden. Zunächst muss eine adäquate Definition eines komplexen Integrals gegeben werden. Wir nehmen uns dabei eher den Riemann'schen Integralbegriff oder, genauer, relle Kurvenintegrale und damit die Integration von Differentialformen zum Vorbild als die Lebesgue'sche Integrationstheorie. Der Unterschied, auf den es uns dabei ankommt, besteht darin, dass das klassische Riemann'sche Integral auf einem Intervall definiert ist, bei welchem – anders als beim Lebesgue'schen Integral – die Orientierung wesentlich ist, weil sich bei einer Vertauschung von Anfangs- und Endpunkt das Vorzeichen ändert. Ähnlich spielt bei der Integration von Differentialformen die Orientierung von Mannigfaltigkeiten (Flächen, Kurven) eine Rolle. Tatsächlich lässt sich die nun zu entwickelnde Theorie der komplexen Kurvenintegrale als Spezialfall der Theorie der Integration von Differentialformen deuten. Betreffend weiter reichende Zusammenhänge begnügen wir uns jedoch mit diesen kurzen Andeutungen.

Hier wollen wir Integrale der Form

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma f$$

definieren, wobei γ einen Weg (Pfad, Kurve) in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ bezeichnet. Besonders befriedigend wäre die Analogie zum Riemannintegral, wenn der Wert des Integrals nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht aber vom speziellen Verlauf von γ. Tatsächlich lässt sich das unter gewissen Voraussetzungen erreichen. Zunächst aber zur Definition.

Für eine komplexwertige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit der Zerlegung $f(t) = u(t) + iv(t)$ in Realteil u und Imaginärteil v, welche auf dem kompakten reellen Intervall $[a, b]$ definiert ist, gibt es keinen Zweifel, wie das Integral zu definieren ist, um alle gewünschten Linearitätseigenschaften zu garantieren:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

So kann alles auf reelle Integrale zurückgeführt werden. Wir wollen nun den Integrationsbereich $[a, b]$ durch eine Kurve γ in der komplexen Ebene ersetzen. Der Weg (oder die Kurve) γ ist aber selbst als Funktion $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert. Somit liegt die Definition des Kurvenintegrals einer komplexen Funktion f über eine Kurve (über einen Integrationsweg) γ mittels der Komposition $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ nahe. Würden wir einfach $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(\gamma(t))\,dt$ setzen, hinge der Wert des Integrals jedoch von der Parametrisierung der Kurve ab. Man kann dies so interpretieren, dass bei unterschiedlichen Parametrisierungen das Parameterintervall mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird.

Übungsaufgabe 3.1.1 *Geben Sie ein Beispiel für die Abhängigkeit des Wertes $\int_{[a,b]} f(\gamma(t))\,dt$ von der Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ der Kurve.*

Dieses unerwünschte Phänomen lässt sich ausschalten, indem man im Sinne der Kettenregel der Differential- bzw. der Substitutionsregel der Integralrechnung

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

setzt. Der zusätzliche Faktor $\gamma'(t)$ in dieser Definition des **komplexen Kurvenintegrals** gewichtet den Integrationsbeitrag je nach Geschwindigkeit und Richtung mit der sich γ durch $\mathbb{C}$ bewegt. Hier wird offenbar vorausgesetzt, dass die Parametrisierung differenzierbar ist. Es erweist sich als sinnvoll, sogar stetige Differenzierbarkeit von γ zu verlangen, wobei die Differenzierbarkeit aber an endlich vielen Stellen verletzt sein darf. (Diese Stellen entsprechen typischerweise Ecken der Kurve.) In diesem Fall nimmt man als Definition die Summe der Integrale über geeignete Teilintervalle.

Es liegt auf der Hand, die **Länge** $L(\gamma)$ der Kurve nun durch

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$$

zu definieren. Kürzen wir außerdem mit

$$||f||_S = \sup_{t\in S} |f(t)| \quad \text{und} \quad ||f||_\gamma = ||f||_{\gamma([a,b])}$$

die Supremumsnorm der Funktion f ab, so gilt die vertraute Ungleichung

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq ||f||_\gamma L(\gamma),$$

wobei $||f||_\gamma$ den betragsmäßig maximalen Wert bezeichnet, den f auf den von γ durchlaufenen Punkten annimmt.

Übungsaufgabe 3.1.2 *Beweisen Sie diese Ungleichung unter Zuhilfenahme entsprechender bekannter Ungleichungen für das Integral komplexwertiger Funktionen über einem reellen Intervall.*

Übungsaufgabe 3.1.3 *Aus obigem Satz folgt sehr schnell der Satz von der Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge. Formulieren Sie diese Aussage für komplexe Kurvenintegrale und führen Sie den Beweis.*

Zur kürzeren Sprechweise wollen wir unter einer **Kurve** einen Weg mit stetig differenzierbarer Parametrisierung verstehen. **Integrationswege** sollen Wege sein, welche sich als endliche Vereinigungen von Kurven schreiben lassen.

Übungsaufgabe 3.1.4 *Berechnen Sie* $\int_\gamma f$ *für die Kurve* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ *und* $f(z) = z^n$. *a)* $n = 0, 1, \ldots,$ *b)* $n = -1,$ *c)* $n = -2, -3, \ldots$.

Dass mit obiger Definition des komplexen Kurvenintegrals tatsächlich das Gewünschte, nämlich Unabhängigkeit von der Parametrisierung erreicht wird, muss natürlich in eine präzise mathematische Aussage gebracht werden:

Satz 3.1.5 *Seien* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *und* $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ *Parametrisierungen welche mit einer stetig differenzierbaren Transformation* $g : [a, b] \to [c, d]$ *der Bedingung* $\gamma = \psi \circ g$ *genügen. Dann gilt*

$$\int_\gamma f = \int_\psi f.$$

Übungsaufgabe 3.1.6 *Aus welchen Differentiations- bzw. Integrationsregeln folgt dieser Satz fast unmittelbar? Führen Sie die Rechnung durch.*

Es gilt aber noch viel mehr. Und darum geht es in diesem Kapitel hauptsächlich.

3.2 Wegunabhängige Kurvenintegrale und Stammfunktionen

[L] III 2. Unter geeigneten Voraussetzungen ist der Wert eines komplexen Kurvenintegrals nicht nur von der Parametrisierung der Kurve unabhängig, sondern sogar von der Kurve selbst. Lediglich Anfangs- und Endpunkt sind entscheidend. Damit ist die Analogie zum Riemannintegral, wo man mit gutem Grund auch nur obere und untere Integrationsgrenze anschreibt, sichtbar. Es drängt sich die Frage nach einer Stammfunktion auf, deren fundamentale Rolle im Reellen durch den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zum Ausdruck gebracht wird. Tatsächlich gilt ganz Ähnliches auch hier.

Satz 3.2.1 *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig auf der offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ und sei g eine holomorphe Stammfunktion von f, d.h. $g' = f$. Sei weiters γ ein beliebiger Integrationsweg in U von α nach β. Dann gilt*

$$\int_\gamma f = g(\beta) - g(\alpha).$$

Ist U ein Gebiet, so unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen von f nur um eine additive Konstante. Der Wert von $\int_\gamma f$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab. Im Fall eines **geschlossenen** *Integrationsweges (d.h. falls Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen) hat das Integral den Wert 0.*

Übungsaufgabe 3.2.2 *Beweisen Sie diesen Satz unter Verwendung von Ketten- bzw. Substitutionsregel und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

Gewissermaßen eine Umkehrung stellt der nachfolgende Satz dar.

Satz 3.2.3 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig derart, dass das Integral entlang jedes geschlossenen Integrationsweges verschwindet. Dann hat f eine (holomorphe) Stammfunktion g auf U.*

Beweis: Man wähle $z_0 \in U$ fest und definiere

$$g(z) := \int_{z_0}^{z} f,$$

wobei diese Schreibweise bedeutet, dass irgendein Integrationsweg von z_0 nach z in U gewählt werden darf. Dass diese Festsetzung nicht von der speziellen Wahl des Weges abhängt, folgt aus der Voraussetzung:

Wählt man nämlich zwei verschiedene solche Wege γ_1 und γ_2, so folgt, dass $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ (wir bezeichnen damit den zusammengesetzten Weg von z_0 via γ_1 nach z und via γ_2 zurück nach z_0) ein geschlossener Weg ist. Nach der Voraussetzung des Satzes ist

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f,$$

also stimmen die beiden Integrale über γ_i, $i = 1, 2$, überein.

Es bleibt $g' = f$ zu zeigen, also

$$g'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(t)\, dt = f(z).$$

Dies geschieht durch Modifikation der Argumente im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der reellen Analysis. Die Ausarbeitung der Details ist deshalb Inhalt eines Übungsbeispiels. □

Übungsaufgabe 3.2.4 *Vervollständigen Sie obigen Beweis.*

Mit Hilfe der bisherigen Sätze können wir bereits bemerkenswerte Folgerungen über Potenzreihen ziehen. Zunächst wollen wir zu diesem Zwecke Potenzfunktionen $f(z) = z^n$ untersuchen. Ist $n \geq 0$, so kennen wir die Stammfunktion $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1} + c$, wobei die Konstante c beliebig sein kann, etwa $c = 0$. Also hat das Integral über einen geschlossenen Integrationsweg den Wert 0. Das gilt auch für $n = -2, -3, -4, \ldots$, wobei lediglich $z = 0$ aus dem Definitionsbereich von f und F ausgenommen werden muss. Eine Sonderrolle spielt jedoch der Fall $n = -1$. z^{-1} besitzt nämlich keine auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte holomorphe Stammfunktion. Unter diesem Gesichtspunkt wird auch die Lösung des früheren Übungsbeispieles 3.1.4 verständlich, wo nur in diesem Fall ein von 0 verschiedener Wert auftrat.

Übungsaufgabe 3.2.5 *Auf welche Probleme stößt man, wenn man den komplexen Logarithmus als Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ auf ganz $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ definieren möchte?*

Was bedeutet dies für Kurvenintegrale analytischer Funktionen? Wir wollen dazu auch Pole zulassen. Sei dazu $f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, o.B.d.A. $z_0 = 0$, auf einer geeigneten Kreisscheibe U, möglicherweise mit Ausnahme des Mittelpunktes konvergent. (Ist dabei $a_{-N} \neq 0$, so heißt z_0 **Pol(stelle)** von f der **Ordnung** N.) Ist γ irgendein Weg in U, so herrscht in diesem kompakten Teil des Konvergenzbereiches der Potenzreihe sogar gleichmäßige Konvergenz. Also dürfen Summation und Integration vertauscht werden, d.h. wir dürfen gliedweise integrieren. Wir erhalten

$$\int_\gamma \sum_{n=-N}^{\infty} a_n z^n = a_{-1} \int_\gamma \frac{1}{z}.$$

Kurvenintegrale über die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ und damit die Frage nach dem komplexen Logarithmus spielen also eine besondere Rolle, auf die wir später noch zurückkommen werden. Im Fall, dass γ der einmal im positiven Sinne umlaufene Einheitskreis ist, erhält man für das letzte Integral den Wert $2\pi i$, vgl. Übungsbeispiel 3.1.4.

3.3 Der Satz von Goursat und lokale Stammfunktionen holomorpher Funktionen

[L] III 3. In diesem Abschnitt geht es vor allem um den Beweis des **Satzes von Goursat**, welcher

$$I = \int_{\partial R} f = 0$$

besagt, sofern ∂R den Rand des achsenparallelen Rechtecks $R \subseteq \mathbb{C}$ bezeichnet und f holomorph auf R ist. Präziser sei damit ein gegen den Uhrzeigersinn verlaufender o.B.d.A. stückweise linearer Integrationsweg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ gemeint. Außerdem ist hier implizit von der folgenden Vereinbarung Gebrauch gemacht worden: Eine komplexe Funktion f heißt **holomorph auf einer abgeschlossenen Menge** $A \subseteq \mathbb{C}$, wenn sie holomorph sogar auf einer offenen Menge O mit $A \subseteq O$ ist.

Beweis: Für den Beweis des Satzes von Goursat zerlegt man das Rechteck R in vier gleich große Rechtecke R_1, R_2, R_3, R_4, deren Seitenlänge die Hälfte jener von R ist, und betrachtet die Integrale $I_j = \int_{\partial R_j} f$ und deren Summe $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Man beachte, dass darin jede der Unterteilungslinien genau zweimal als Integrationsweg auftritt und zwar in entgegengesetzter Richtung. Somit heben sich diese Anteile weg, und es verbleiben lediglich die äußeren Ränder, die, wie schon in I, einmal durchlaufen werden. Es folgt $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, also $|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4|$ und $|I| \leq 4|I_j|$ für mindestens ein $I_j = I_{j_1} = I^{(1)}$. Wie zuvor R, zerlegen wir nun $R^{(1)} = R_{j_1}$ in Teilrechtecke und entsprechend I_1 in Summanden $I_{j_1,1}, I_{j_1,2}, I_{j_1,3}, I_{j_1,4}$ und schließen $|I| \leq 4^2|I^{(2)}|$ mit $I^{(2)} = I_{j_1,j_2}$ für ein geeignetes j_2. Verfährt man so weiter, erhält man eine unendliche Folge immer kleiner werdender Rechtecke $R^{(n)}$, welche einen eindeutigen Schnittpunkt $z_0 \in R$ gemeinsam haben und $\frac{1}{4^n}|I| \leq |I^{(n)}|$ erfüllen. Nach Voraussetzung ist f in z_0 holomorph (auch wenn z_0 am Rand von R liegt!) und lässt sich daher in einer Umgebung von z_0 als

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)h(z)$$

schreiben mit $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. In der entsprechenden Zerlegung

$$\begin{aligned} I^{(n)} &= \int_{\partial R^{(n)}} f\, dz = \\ &= \int_{\partial R^{(n)}} f(z_0)\, dz \; + \; f'(z_0) \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0)\, dz \; + \; \int_{\partial R^{(n)}} (z - z_0) h(z)\, dz \end{aligned}$$

verschwinden die beiden ersten Terme. (Konstante und lineare Funktionen sind Polynome und besitzen daher Stammfunktionen. Also ist Satz 3.2.1 anwendbar.) Es verbleibt der letzte Term, und wir schließen

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right| \leq \int_{\partial R^{(n)}} |(z - z_0)h(z)|\, dz.$$

Das Integral rechts lässt sich durch das Produkt der Weglänge mal Maximum des Integranden abschätzen. Ist r der Umfang von R, so beträgt die Weglänge $\frac{r}{2^n}$, $|z - z_0|$ lässt sich ebenfalls durch $\frac{r}{2^n}$ abschätzen, also gilt $|I| \leq r^2|h(z)|$. Mit $n \to \infty$ gilt aber $z \to z_0$ und damit $h(z) \to 0$. Also ist $I = 0$ bewiesen. □

Übungsaufgabe 3.3.1 *Formulieren und beweisen Sie den Satz von Goursat für Dreiecke.*

Ist f eine Funktion, welche auf einer offenen Kreisscheibe U die Schlussfolgerung im Satz von Goursat erfüllt (nämlich dass Integrale über Rechtecke verschwinden), so lässt sich auf dieselbe Art wie im Beweis von Satz 3.2.3 zeigen, dass bei festgehaltenem $z_0 \in U$ durch

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f$$

eine Stammfunktion g von f definiert wird. Der Intergrationsweg von z_0 nach z soll dabei zwei Rechteckseiten durchlaufen. Zusammen mit Satz 3.2.1 schließen wir daraus:

Satz 3.3.2 *Ist f auf einer offenen Kreisscheibe holomorph, so besitzt f eine Stammfunktion, und jedes Integral über einen geschlossenen Integrationsweg verschwindet.*

3.4 Integrale holomorpher Funktionen über stetige Kurven

[L] III 4. Die bisherigen Ergebnisse zeigen, dass, sofern f eine Stammfunktion g besitzt, Kurvenintegrale über f nur von Anfangs- und Endpunkt, nicht jedoch von der speziellen Wahl des Weges abhängen. Unter dieser Voraussetzung liegt also kein Grund vor, sich auf (stückweise) stetig differenzierbare Kurven zu beschränken. Wir wollen daher beliebige stetige Kurven zulassen. Aber auch die Voraussetzung der Stammfunktion wollen wir abschwächen auf eine lokale Variante, d.h. jeder Punkt des Definitionsbereichs von f besitze eine (o.B.d.A. kreisförmige) Umgebung, in welcher eine Stammfunktion von f existiere. Die Stammfunktionen müssen aber nicht notwendig auf dem gesamten Definitionsbereich zusammenpassen. (Man erinnere sich an dieser Stelle an das Problem, den Logarithmus als Stammfunktion von $\frac{1}{z}$ zu definieren.) Dieser Ansatz lässt sich tatsächlich rigoros durchführen. Wir wollen nicht auf alle Details eingehen, sondern die wesentliche Idee beschreiben:

Jede stetige Kurve γ durch eine offene Menge U hat einen positiven Abstand ρ von $\mathbb{C} \setminus U$. (Beweis: Der Wertebereich von γ ist kompakt und $\mathbb{C} \setminus U$ ist abgeschlossen. Ein früheres Übungsbeispiel garantiert, dass zwei solche disjunkte Mengen einen positiven Abstand haben.)

Legt man um jeden Punkt auf γ eine kreisförmige Umgebung, in welcher f holomorph ist, so genügen wegen der Kompaktheit endlich viele solche Umgebungen D_i, um γ durch deren Vereinigung U zu überdecken. Innerhalb der Kreisscheiben herrscht für Kurvenintegrale Wegunabhängigkeit. Deshalb muss ein Weg γ_1, der sich innerhalb des überdeckten Bereiches bewegt und denselben Anfangs- und Endpunkt wie γ hat, auch zum selben Wert des Integrals führen. Wir wollen zwei solche Wege **benachbart** (bezüglich f) nennen. Anschaulich gesprochen liegt diese Situation vor, wenn γ_1 nicht weiter als ρ von γ entfernt verläuft.

Man beachte, dass innerhalb der Kreisscheiben D_i lokale Stammfunktionen g_i von f vorliegen, sodass auch für ein nicht stetig differenzierbares γ_1 (lediglich Stetigkeit muss vorausgesetzt werden) das Integral $\int_{\gamma_1} f$ durch Zusammensetzen eindeutig definiert werden kann.

Außerdem folgt für zwei benachbarte geschlossene Wege auch bei unterschiedlichen Anfangspunkten, dass sie zu denselben Integralen führen. Allerdings muss der Wert nicht 0 sein. (Für $f(z) = \frac{1}{z}$ beispielsweise muss er jedoch, wie wir bald sehen werden, stets ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ sein; Vgl. auch das Übungsbeispiel 3.5.6.)

Übungsaufgabe 3.4.1 *Geben Sie dafür ein Beispiel.*

3.5 Der lokale Satz von Cauchy (Homotopievariante)

[L] III 5. Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass sich der Wert komplexer Kurvenintegrale nicht ändert, wenn man den Integrationsweg zwischen zwei Punkten leicht verschiebt. Wir wollen dieses Phänomen weiter ausbeuten, indem wir den wichtigen Begriff der Homotopie einführen. Anschaulich gesprochen heißen zwei Wege in einer offenen Menge U homotop, wenn sie, ohne Anfangs- und Endpunkt zu bewegen, stetig ineinander übergeführt werden können.

Definition 3.5.1 *Seien γ und η zwei Wege in der offenen Menge U, o.B.d.A. mit dem gleichen Parameterintervall $[a,b]$. Unter einer* **Homotopie** *(in U) zwischen γ und η versteht man eine stetige Abbildung $\psi : [a,b] \times [c,d] \to U$ mit $\psi(t,c) = \gamma(t)$ und $\psi(t,d) = \eta(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Gilt $\psi(a,s) = \gamma(a)$ und $\psi(b,s) = \gamma(b)$ für alle $s \in [c,d]$ (insbesondere also $\gamma(a) = \psi(a,c) = \psi(a,d) = \eta(a)$ und $\gamma(b) = \psi(b,c) = \psi(b,d) = \eta(b)$), so sagen wir, ψ lasse Anfangs- und Endpunkte fest. Gilt schließlich auch $\gamma(a) = \eta(a) = \gamma(b) = \eta(b)$, so sprechen wir von einer Homotopie geschlossener Kurven. Die Wege γ und η heißen* **homotop** *wenn es eine Homotopie ψ zwischen γ und η gibt. Besitzen γ und η den gleichen Anfangs- und Endpunkt, so sei stets vorausgesetzt, dass ψ diese festlasse; sind γ und η überdies geschlossen, sei ψ als Homotopie geschlossener Wege vorausgesetzt. Außerdem wollen wir, wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, stets $[a,b] = [c,d] = [0,1]$ voraussetzen. Ein Weg heißt* **nullhomotop** *in U, falls er homotop zu einem konstanten Weg ist. Eine wegzusammenhängende Menge heißt* **einfach zusammenhängend**, *falls alle geschlossenen Wege nullhomotop sind.*

Übungsaufgabe 3.5.2

1. *Definieren Sie eine Homotopie zwischen dem Einheitsquadrat und dem Einheitskreis (mit natürlicher Parametrisierung).*

2. *Zeigen Sie, dass in $U = \mathbb{C}$ je zwei Wege mit demselben Parameterintervall homotop sind. Führen Sie den Beweis sowohl für beliebige Wege als auch für geschlossene mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. (Also ist $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend.)*

3. *Zeigen Sie, dass konvexe und sternfömige (Definition?) Gebiete in $\mathbb{C}$ stets einfach zusammenhängend sind.*

Nach Aufgabe 3.5.2 kann man sich leicht vorstellen, dass es meist nicht allzu schwierig ist, für einfach zusammenhängende Gebiete den Nachweis dieser Eigenschaft zu bringen. Im Gegensatz dazu ist zunächst überhaupt nicht klar, wie man für ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet, die entsprechende negative Aussage zu beweisen. So scheint es anschaulich offensichtlich, dass beispielsweise $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist, weil ja Schlaufen um den Nullpunkt nicht zusammengezogen werden können, ohne den Nullpunkt zu überstreichen.

Übungsaufgabe 3.5.3 *Geben Sie jeweils drei neue Beispiele von einfach zusammenhängenden (mit Beweis) und nicht einfach zusammenhängenden (mit anschaulicher Erklärung) Gebieten in* $\mathbb{C}$.

Die folgenden Übungsaufgaben deuten die Konstruktion der Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes an, einer wichtigen **topologischen Invariante**. Im konkreten Fall bedeutet dies, dass homöomorphe Räume isomorphe Fundamentalgruppen haben. Damit befinden wir uns am Anfangspunkt der **algebraischen Topologie**, die wir im Rahmen der Funktionentheorie leider kaum vertiefen können.

Übungsaufgabe 3.5.4 *In dieser Aufgabe sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *wegzusammenhängend.*

1. *Zeigen Sie, dass die Relation* homotop *eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geschlossenen Wege in* U *ist mit festem Anfangs- = Endpunkt.*

2. *Durch Hintereinanderstückeln von Wegen kann eine binäre Operation* $\circ$ *definiert werden. Präzisieren Sie dies.*

3. *Homotopie ist mit* $\circ$ *verträglich. Präzisieren Sie diese Aussage.*

4. *Damit kann* $\circ$ *als binäre Operation auf der Menge der Homotopieklassen (der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Homotopierelation) geschlossener Wege mit festem Basispunkt (= Anfangs- = Endpunkt) aufgefasst werden. Zeigen Sie, dass es sich dabei sogar um eine Gruppenoperation handelt. Die so definierte Gruppe heißt die* **Fundamentalgruppe** *von* U. *Diese ist trivial (d.h. einelementig) offenbar genau dann, wenn* U *einfach zusammenhängend ist.*

5. *Argumentieren Sie anschaulich, warum die Fundamentalgruppe* G *von* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *und der Kreislinie isomorph sind.*

6. *Skizzieren Sie für die gleiche Aussage einen exakten Beweis.*

7. *Argumentieren Sie anschaulich, warum diese Gruppe* G *isomorph zur Gruppe* $\mathbb{Z}$ *der ganzen Zahlen mit Addition ist.*

8. *Schätzen Sie: Wie sieht die Fundamentalgruppe von* $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ *oder, isomorph dazu, die einer Achterschleife aus?*

Nach diesem kurzen algebraisch-topologischen Exkurs wenden wir uns wieder unserem Hauptanliegen zu, dem **Cauchyschen Integralsatz** in seiner (lokalen) Homotopiefassung.

Satz 3.5.5 *Seien die beiden Wege γ und η im Gebiet U durch eine Homotopie mit festem Anfangs- und Endpunkt verbunden, und sei f in U holomorph. Dann gilt*

$$\int_\gamma f = \int_\eta f.$$

Ist γ zusätzlich nullhomotop in U, so gilt

$$\int_\gamma f = 0.$$

Beweis: Sei $\psi : [0,1]^2 \to U$ eine Homotopie zwischen γ und η. Wir unterteilen den Parameterbereich $[0,1]^2$ in hinreichend kleine Teilquadrate $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]$ $(i,j = 1,\ldots,n)$ so, dass ψ jedes dieser Quadrate in eine Kreisscheibe abbildet, welche ihrerseits ganz in U enthalten ist. (Dies ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von ψ auf der kompakten Menge $[0,1]^2$ und wegen des positiven Abstandes zwischen $\psi([0,1]^2)$ und $\mathbb{C} \setminus U$ möglich.) Es folgt, dass in der endlichen Folge $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$, $\psi_j(t) = \psi(t, \frac{j}{n})$, aufeinanderfolgende Wege jeweils zueinander benachbart sind, vgl. Abschnitt 3.4. Also gilt nach den dortigen Überlegungen

$$\int_{\gamma=\psi_0} f = \int_{\psi_1} f = \ldots = \int_{\psi_n=\eta} f.$$

Also ist die erste der beiden Behauptungen bewiesen. Da das Integral über einen konstanten Weg den Wert 0 hat, folgt daraus auch die Aussage über nullhomotope Wege. □

Übungsaufgabe 3.5.6 *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ fest. Welche Werte kann $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}$ für verschiedene geschlossene Wege γ annehmen? (Anleitung: Betrachten Sie zunächst Kreise. Versuchen Sie dann, den allgemeinen Fall durch Homotopien auf den einfacheren zurückzuführen.)*

3.6 Globale Stammfunktionen und der komplexe Logarithmus

[L] III 6. Ist U einfach zusammenhängend, so hängt nach dem Cauchy'schen Integralsatz der Wert eines Integrals einer auf U holomorphen Funktion nur von Anfangs- und Endpunkt ab. Damit lassen sich dieselben Überlegungen, die wir in Abschnitt 3.3 für den Fall, dass U eine Kreisscheibe ist, auch auf diese Situation übertragen. Insbesondere gilt die Verallgemeinerung von Satz 3.3.2.

Satz 3.6.1 *Sei f auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet U holomorph und $z_0 \in U$ fest gewählt. Dann hängt die Definition*

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} f$$

nicht von der speziellen Wahl eines Weges in U von z_0 nach z ab. Die so definierte Funktion g ist eine Stammfunktion von f.

Wir wollen den Logarithmus als Stammfunktion von $f(z) = \frac{1}{z}$ auf einem möglichst großen Gebiet $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren. Aus dem Übungsbeispiel 3.1.4 wissen wir schon

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i,$$

sofern γ den einmal positiv durchlaufenen Einheitskreis bezeichnet.

Übungsaufgabe 3.6.2 *An dieser Stelle lässt sich aus früheren Ergebnissen rigoros schließen, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Wie?*

Als Definitionsbereich des komplexen Logarithmus eignet sich also sicher nicht $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sehr wohl aber etwa die Menge U, welche sich ergibt, indem man daraus eine von 0 ausgehende Halbgerade, etwa die negative reelle Achse entfernt. In diesem Fall spricht man vom **Hauptwert des Logarithmus**. Hier gilt für $-\pi < \theta < \pi$

$$\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta.$$

Übungsaufgabe 3.6.3 *Zeigen Sie $\log' z = \frac{1}{z}$ für den durch die Formel $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ definierten Hauptwert des Logarithmus. (Anleitung: Verwenden Sie Ihr Wissen über analytische Isomorphismen und über die Exponentialfunktion.)*

Wir können den Logarithmus aber auch in der aus der reellen Analysis bekannten Weise unter Verwendung der geometrischen Reihe als Potenzreihe definieren:

$$\log(1+z) = \int \frac{1}{1+z} = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

Obwohl diese Potenzreihe nur in einer Kreisscheibe vom Radius 1 konvergiert, lässt sich die dargestellte Funktion als Stammfunktion g von f für alle $1+z \in U$ ausdehnen, sofern $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend ist. Wie wir aus der reellen Analysis wissen, gilt $e^{\log z} = z$ für alle $z > 0$. Wegen der eindeutigen analytischen Fortsetzung gilt diese Beziehung also auf ganz U.

Übungsaufgabe 3.6.4 *Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen, wobei stets der Hauptwert des Logarithmus zugrundegelegt sei. a) $\log i$, b) $\log(-i)$, c) $\log(-1+i)$, d) i^i.*

Übungsaufgabe 3.6.5 *Untersuchen Sie, wie weit durch*

$$z^\alpha := e^{\alpha \log z}$$

allgemeine Potenzfunktionen mit komplexen Exponenten $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ *definiert werden können.*

3.7 Die lokale Cauchy'sche Formel und die Analytizität holomorpher Funktionen

[L] III 7. In diesem Abschnitt ist unser wichtigstes Ziel der Nachweis, dass nicht nur jede analytische Funktion holomorph ist, sondern dass auch die Umkehrung gilt. Damit sind holomorphe Funktionen als die zentrale Funktionenklasse der komplexen Analysis (daher auch die traditionelle deutsche Bezeichnung *Funktionentheorie*) durch mehrere Eigenschaften (Analytizität, Differenzierbarkeit, Existenz lokaler Stammfunktionen) ausgezeichnet. In der reellen Analysis ist die Situation völlig anders, denn dort definieren diese Eigenschaften sehr unterschiedliche Klassen von Funktionen.

Man beweist zunächst die **lokale Cauchy'sche Formel:**

Satz 3.7.1 *Sei f auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D}$ holomorph. D sei vom (positive orientierten) Weg γ umrandet. Dann gilt für jedes $z_0 \in D$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis: Man betrachtet den Differenzenquotienten von f bei z_0, d.h. die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

außerdem einen kleinen Kreis γ_r innerhalb D vom Radius r um z_0. Die Funktion g ist mit der Ausnahme des Punktes $z = z_0$ holomorph. Man überzeugt sich leicht davon, dass γ und γ_r homotop in jeder $\overline{D}$ umfassenden offenen Menge U sind. Es folgt

$$\int_\gamma g = \int_{\gamma_r} g.$$

Wegen $\lim_{z \to z_0} g(z) = f'(z_0)$ ist $|g|$ in einer Umgebung von z_0 beschränkt durch eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, z.B. $C = |f'(z_0)| + 1$. Also lässt sich das rechte Integral betragsmäßig durch $2r\pi C$ abschätzen. Im Grenzwert $r \to 0$ liefert dies auch für das linke Integral den Wert 0, was wir zu

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}$$

umschreiben können. Dies führt zu

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) 2\pi i.$$

□

Übungsaufgabe 3.7.2 *Man gebe explizit eine Homotopie zwischen γ und γ_r an, wie sie im obigen Beweis verwendet wurde.*

Wir verwenden nun einen Trick mit weitreichenden Folgen. Und zwar interpretieren wir den Integranden in der Cauchy'schen Formel als geometrische Reihe. Zunächst führen wir jedoch die Variablensubstitution $z \mapsto \zeta$, $z_0 \mapsto z$ durch und bezeichnen mit $\gamma_R = \gamma$ den kreisförmigen Weg um den Mittelpunkt z_0 und Radius R. Außerdem ersetzen wir f im Integranden vorerst durch irgendeine auf γ_R stetige Funktion g. Für alle z, die nicht auf γ liegen, definieren wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nach der Cauchy'schen Formel kann für holomorphes f also $f = g$ gewählt werden. Schreiben wir außerdem $q = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$, so gilt für die zugehörige geometrischen Reihe

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

welche für $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ konvergiert. Setzen wir dies alles ein, erhalten wir nach gliedweiser Integration die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Wir schreiben für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

Man beachte, dass weiterhin g durch f ersetzt werden darf, sofern f holomorph ist. Also haben wir folgenden Satz (**Cauchy'sche Formel**) bewiesen:

Satz 3.7.3 *Sei γ die Kreislinie mit Mittelpunkt z_0 und Radius R und U eine offene Menge, welche die zugehörige abgeschlossene Kreisscheibe umfasst. Weiters sei g stetig auf γ und f für alle z, die nicht auf γ liegen, definiert durch*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dann ist f auf seinem Definitionsbereich analytisch mit den Ableitungen

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Ist außerdem g holomorph auf der ganzen abgeschlossenen Kreisscheibe, so gilt (wegen der lokalen Cauchy'schen Formel) auf dem gemeinsamen Definitionsbereich $f = g$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Insbesondere haben wir nun bewiesen, dass holomorphe (d.h. einmal komplex differenzierbare) Funktionen automatisch sogar analytisch (insbesondere also unendlich oft komplex differenzierbar) sind. Damit ist unser wichtigstes Ziel in diesem Kapitel erreicht. Wir fassen dieses und noch weitere wichtige Folgerungen aus der Cauchy'schen Formel zusammen.

Folgerung 3.7.4 *1. Jede holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, ist analytisch. (Die Umkehrung haben wir schon im Abschnitt über Potenzreihen behandelt.)*

2. Sei f auf einer abgeschlossenen Kreisscheibe holomorph und bezeichne $||f||_R$ die Supremumsnorm von f auf dem Rand γ_R dieser Kreisscheibe, so gelten die sogenannten **Cauchy'schen Abschätzungen**

$$|a_n| \leq \frac{||f||_R}{R^n}.$$

Insbesondere konvergiert die Potenzreihe auf ganz D.

3. Ist f analytisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $D = \overline{D(z_0, R)}$ um z_0 mit Radius R, sei $0 < R_1 < R$, und bezeichne $||f||_R$ die Supremumsnorm von f auf dem Rand von D. Dann gilt für alle $z \in \overline{D(z_0, R_1)}$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! R}{(R - R_1)^{n+1}} ||f||_R.$$

(Man beachte, dass ähnliche Abschätzungen im reellen Fall nicht gelten können. Denn dort liefern Schranken für f keinerlei Information über die Ableitungen.)

4. Sei f eine **ganze** *Funktion. (Per definitionem heißt eine komplexe Funktion ganz, wenn sie holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.) Bezeichne $||f||_R$ die Supremumsnorm von f auf dem Kreis um 0 mit Radius R. Gibt es eine positive Konstante C und eine natürliche Zahl k derart, dass für beliebig große $R > 0$ die Ungleichung*

$$||f||_R \leq C R^k$$

erfüllt ist, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq k$.

5. **Satz von Liouville:** *Eine ganze und beschränkte Funktion ist konstant.*

6. **Fundamentalsatz der Algebra:** *Jedes nichtkonstante komplexe Polynom besitzt eine Nullstelle.*

7. **Satz von Morera:** *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und f stetig auf U. Angenommen, das Integral von f über jedes abgeschlossene Rechteck in U verschwinde. Dann ist f holomorph.*

Beweis:

1. Siehe Diskussion unmittelbar nach Satz 3.7.3.

2. Unmittelbare Abschätzung der Koeffizienten mittels der Integraldarstellung aus Satz 3.7.3.

3. Standardabschätzung der Integraldarstellung für $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, welche sich aus Satz 3.7.3 ergibt.

4. Mit 2.) ergibt sich für hinreichend großes R die Abschätzung
$$|a_n| \leq \frac{||f||_R}{R^n} \leq CR^{k-n}.$$
Für $R \to \infty$ zeigt dies $a_n = 0$ für beliebiges $n > k$.

5. Aus der Voraussetzung folgt, dass im vorangegangenen Teil $k = 0$ gewählt werden kann.

6. Hätte das Polynom $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, keine komplexe Nullstelle, so wäre $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ eine ganze Funktion mit $\lim_{|z|\to\infty} g(z) = 0$. Demnach wäre g beschränkt, müsste nach dem vorangegangenen Teil also sogar konstant sein. Damit wäre aber auch f konstant, Widerspruch. Also besitzt f eine Nullstelle.

7. Aus der Voraussetzung und den Bemerkungen nach dem Beweis des Satzes von Goursat in Abschnitt 3.3 folgt, dass f an einem beliebigen Punkt eine lokale Stammfunktion g besitzt. Als holomorphe Funktion ist g nach Folgerung 3.7.4, Aussage 1, analytisch. Somit ist schließlich auch $f = g'$ analytisch, d.h. holomorph. □

3.8 Windungszahlen

[L] IV 1. Sei γ der positiv durchlaufene Einheitskreis. Schon mehrmals (etwa im Übungsbeispiel 3.1.4) haben wir die besondere Rolle des Integrals
$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i,$$

kennengelernt, auch für beliebige holomorphe Funktionen $f(z)$ statt $\frac{1}{z}$ mit einem Pol. Wird γ mehrmals durchlaufen, erhalten wir als Wert des Integrals natürlich ein entsprechendes Vielfaches von $2\pi i$. Damit ist die folgende Definition motiviert:

Definition 3.8.1 *Die* **Windungszahl** $W(\gamma, \alpha)$ *eines geschlossenen Weges* γ *bezüglich des Punktes* α*, der nicht auf* γ *liegt, ist definiert durch*

$$W(\gamma, \alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \alpha} dz.$$

Anschaulich gesprochen besagt die Windungszahl $W(\gamma, \alpha)$, wie oft sich der Weg γ vom Punkt α aus betrachtet insgesamt um diesen herumwindet. Tasächlich gilt:

Satz 3.8.2 $W(\gamma, \alpha)$ *ist stets eine ganze Zahl.*

Beweis: Im Beweis dürfen wir uns (vgl. Abschnitt 3.4) auf Wege mit stückweise glatter (d.h. stetig differenzierbarer) Parametrisierung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ beschränken. Wir betrachten die auf $[a, b]$ definierte Funktion

$$F(t_0) = \int_a^{t_0} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \alpha} dt.$$

F ist stetig auf $[a, b]$ und stückweise differenzierbar mit

$$F'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \alpha}.$$

(Im Hinterkopf haben wir natürlich $F(t) = \log(\gamma(t) - \alpha)$). Wegen der mit dem komplexen Logarithmus verbundenen Schwierigkeiten dürfen wir F aber nicht einfach so anschreiben.) Die Funktion $G(t) = e^{-F(t)}(\gamma(t) - \alpha)$ hat die Ableitung

$$G'(t) = e^{-F(t)}\gamma'(t) - F'(t)e^{-F(t)}(\gamma(t) - \alpha) = 0.$$

G muss daher konstant mit einem Wert $G \equiv C \in \mathbb{C}$ sein. Es folgt $\gamma(t) - \alpha = Ce^{F(t)}$ und, da γ ein geschlossener Weg ist,

$$Ce^{F(b)} = \gamma(b) - \alpha = \gamma(a) - \alpha = Ce^{F(a)}.$$

Da α nicht auf γ liegt, muss C von 0 verschieden sei, sodass wir $e^{F(a)} = e^{F(b)}$ schließen. Daraus folgt $F(b) = F(a) + 2\pi i k$ mit einer ganzen Zahl k. Wegen $F(a) = 0$ ist damit der Satz bewiesen. □

Eine wichtige Information über die Abhängigkeit der Windungszahl $W(\gamma, \alpha)$ von α ist in folgender Aussage enthalten:

Satz 3.8.3 *Sei ein geschlossener Weg* γ *gegeben und* S *eine Gebiet, welches* γ *nicht schneidet. Dann ist* $W(\gamma, \alpha)$ *für alle* $\alpha \in S$ *konstant.*

Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass die Abbildung

$$\varphi : \alpha \mapsto W(\gamma, \alpha)$$

auf S stetig ist (vgl. nachfolgendes Übungsbeispiel). Der Wertebereich einer stetigen Abbildung auf einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Es kommen aber nur ganzzahlige Werte in Frage, und die einzigen nichtleeren zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind die einpunktigen. Also nimmt $W(\gamma, \alpha)$ für alle $\alpha \in S$ nur einen einzigen Wert an. $\square$

Übungsaufgabe 3.8.4 *Führen Sie einen strengen Beweis für die Stetigkeit obiger Abbildung φ. (Anleitung: Verwenden Sie, dass jeder Punkt in S einen positiven Abstand zu γ hat. Daraus lassen sich schnell die notwendigen Abschätzungen ableiten.)*

Offenbar spielt hier die Frage eine Rolle, wie die Zusammenhangskomponenten von Mengen der Form $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ aussehen. Als klassisches Resultat hierzu sei ohne Beweis erwähnt:

Satz 3.8.5 (Jordan'scher Kurvensatz) *Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein einfacher geschlossener Weg (d.h. die Injektivität von γ ist nur bei $\gamma(a) = \gamma(b)$ verletzt), von dem wir nur Stetigkeit voraussetzen. Dann zerfällt $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ in genau zwei Zusammenhangskomponenten, eine beschränkte (das Innere der Kurve) und eine unbeschränkte (das Äußere der Kurve).*

Aufgrund unserer Anschauung scheint dieser topologische Satz vollkommen klar und beinahe trivial. Ein strenger Beweis fordert aber einen überraschend großen technischen Aufwand, den wir innerhalb der Vorlesung zur Funktionentheorie allerdings nicht treiben können.

3.9 Der globale Satz von Cauchy (Homologievariante)

[L] IV 2. Wir wollen in diesem Abschnitt eine andere Fassung des Cauchy'schen Integralsatzes und einiger seiner Folgerungen geben. Ziel dabei ist ein besseres Verständnis für die topologischen Hintergründe komplexer Kurvenintegrale. Offenbar hängen diese ja nur relativ schwach vom gewählten Integrationsweg ab, wobei es bei dieser Abhängigkeit vor allem darum geht, ob sich der Integrationsweg um Polstellen, d.h. um Löcher des Definitionsbereichs holomorpher Funktionen windet. Als grundlegender Begriff kristallisiert sich jener der Homologie heraus. Die Idee besteht darin, zwei Wege homolog in einer Menge U zu nennen, wenn sie sich bezüglich der Integration von Funktionen, die in U holomorph sind, nicht unterscheiden. Es erweist sich als praktisch, nicht nur mehrmals durchlaufene Wege in Betracht zu ziehen, sondern auch Vereinigungen von Wegen, welche man als formale Summen schreibt und als Ketten bezeichnet. Damit ist es nicht mehr überraschend, dass sich die folgende Definition als für diesen Zweck geeignet erweist.

Definition 3.9.1 *Unter der* **geschlossenen Kette** γ *der geschlossenen Wege* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *in* U *(die* γ_i *seien alle in der offenen Menge* U *enthalten) mit den Vielfachheiten* $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ *verstehen wir die formale Summe*

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i.$$

Wir definieren Integrale über γ *entsprechend durch*

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{\gamma_i} f$$

für alle f*, welche auf* U *holomorph sind. Insbesondere zeigt die Wahl* $n = m_1 = 1$*, dass jeder geschlossene Weg selbst als Kette aufgefasst werden kann. Die* **Windungszahl** *einer Kette* γ *ist entsprechend durch*

$$W(\gamma, \alpha) = W(\sum_{i=1}^{n} m_i \gamma_i, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i W(\gamma_i, \alpha)$$

definiert. Zwei geschlossene Ketten γ, η *in der offenen Menge* $U \subseteq \mathbb{C}$ *heißen* **homolog in** U*, in Zeichen* $\gamma \sim_U \eta$ *oder* $\gamma \sim \eta$*, wenn*

$$W(\gamma, \alpha) = W(\eta, \alpha)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C} \setminus U$ *gilt. Eine Kette* γ *heißt* **nullhomolog***, falls* $W(\gamma, \alpha) = 0$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus U$ *gilt, d.h. wenn* γ *homolog zum konstanten Weg ist.*

Übungsaufgabe 3.9.2 *Zeigen Sie, dass Ketten zusammen mit der oben auftretenden Addition eine abelsche Gruppe* A *bilden und (bei festem* α*) die Abbildung* $W : A \to \mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto W(\gamma, \alpha)$ *ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Übungsaufgabe 3.9.3 *Zeigen Sie: Für eine gegebene offene Menge* U *ist die Homologie von geschlossenen Ketten nicht nur eine Äquivalenzrelation, sondern bezüglich der Summe sogar eine Kongruenzrelation, d.h.* $\gamma_1 \sim \gamma_2$ *und* $\eta_1 \sim \eta_2$ *impiziert* $\gamma_1 + \eta_1 \sim \gamma_2 + \eta_2$*. Damit ist auf der Faktormenge eine binäre Operation definiert, welche sogar eine Gruppenoperation ist.*

Beschränkt man sich auf geschlossene Wege, so erhält man die sogenannte (erste) **Homologiegruppe** von U. In modernen Lehrbüchern der algebraischen Topologie wird die Homologiegruppe meist nicht mit besonderem Augenmerk für Teilmengen der komplexen Ebene definiert, sondern in wesentlich allgemeinerem Kontext. Unser Zugang ist dafür näher am historischen Ursprung dieses wichtigen Teilgebietes der Mathematik.

Beispiele homologer Wege ergeben sich direkt aus der Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes:

Satz 3.9.4 *Sind zwei geschlossene Wege* γ, η *homotop in* U *(z.B. benachbart), so sind sie auch homolog in* U*.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus den Ergebnissen der Abschnitte 3.4 und 3.5 angewandt auf die Funktion $\frac{1}{z-\alpha}$, welche für $\alpha \notin U$ analytisch ist. □

Wir wenden uns nun dem Hauptergebnis dieses Abschnitts zu, dem **Cauchy'schen Integralsatz** in seiner Homologievariante. Er bringt zum Ausdruck, dass die Konzepte rund um die Homologie tatsächlich zweckmäßig definiert wurden.

Satz 3.9.5 *Seien $\gamma \sim \eta$ homolog in U und f auf U holomorph, so gilt*

$$\int_\gamma f = \int_\eta f.$$

Insbesondere gilt für nullhomologe Ketten γ

$$\int_\gamma f = 0.$$

Beweis: (Idee) Zunächst ist klar, dass der allgemeine Fall aus dem nullhomologen folgt, wenn man die Differenz $\gamma - \eta$ betrachtet. Sodann wendet man Überlegungen wie in Abschnitt 3.4 an, um sicherzustellen, dass man die vorgegebene nullhomologe Kette γ durch einen geschlossenen Rechteckspfad ersetzen kann, d.h. wo die Kette als Summe achsenparalleler Wege geschrieben werden kann. Durch unbeschränkte Verlängerung all dieser Kanten ist eine Zerlegung von $\mathbb{C}$ in endlich viele beschränkte sowie unbeschränkte Rechtecke definiert. Auf dem Inneren jedes der so definierten Rechtecke R_i hat die Windungszahl $W(\gamma, .)$ einen konstanten Wert m_i. Da γ nullhomolog ist, sind alle R_i mit $m_i \neq 0$ in U enthalten. Nach dem Satz von Goursat gilt für die Kette $\eta = \sum m_i \partial R_i$ daher $\int_\eta f = 0$. Gelingt es zu zeigen, dass sich η als Verfeinerung von γ interpretieren lässt (d.h. durch Unterteilung der Parameterintervalle der in der Kette γ vorkommenden Wege), so ist der Satz bewiesen. Darin besteht nun der technische Kern des Beweises, der elementargeometrisch kombinatorischen Charakter hat und natürlich sehr stark mit Windungszahlen argumentiert. Wir verweisen dazu auf die letzten beiden Seiten (ab Seite 153 unten) in [L], Abschnitt IV 3. □

Sei U einfach zusammenhängend. Wir wissen bereits, dass dann jeder geschlossene Weg in U nullhomotop ist, damit auch nullhomolog. Also sind Fundamentalgruppe und Homologiegruppe trivial, d.h. einelementig. Betrachten Sie nun jene offene Menge U^*, die entsteht, wenn aus U endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_n$ entfernt werden.

Übungsaufgabe 3.9.6 *Begründen Sie, warum dann die Homologiegruppe isomorph ist zur n-fachen direkten Summe $\mathbb{Z}^n$ der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.*

Wir wiederholen einige Begriffe aus der Algebra: Sei G eine beliebige Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann ist die Faktorgruppe G/N genau dann abelsch, wenn N alle sogenannten Kommutatoren, das sind Elemente der Gestalt $aba^{-1}b^{-1}$, enthält. Die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe K ist ein Normalteiler, genannt die Kommutatorgruppe von G. Offenbar ist K der kleinste Normalteiler, der G/K abelsch macht. Deshalb nennt man G/K auch die Abelisierte der Gruppe G.

Übungsaufgabe 3.9.7 *Formulieren Sie die universelle Eigenschaft der Kommutatorgruppe K, die größte abelsche Faktorgruppe von G zu induzieren, in der Sprache kommutativer Diagramme von Homomorphismen.*

Wir erinnern uns an das Übungsbeispiel 3.5.4, insbesondere Teil 8, wo es um die Beschreibung gewisser Fundamentalgruppen ging. Man kann zeigen, dass die Homologiegruppe isomorph zur **abelisierten** Fundamentalgruppe ist.

Übungsaufgabe 3.9.8 *Geben Sie eine anschauliche Erklärung dieses Sachverhalts.*

3.10 Einige Anwendungen der Cauchy'schen Formel

Ab nun wollen wir noch sparsamer sein in der Ausführung vollständiger formaler Beweise. Andernfalls müssten aus Zeitgründen viele wertvolle und schöne Ideen und Aspekte der Funktionentheorie gänzlich aus dem Vorlesungsstoff gestrichen werden.

3.10.1 Gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Mengen

[L] V 1.

Satz 3.10.1 *Konvergiere die Folge der holomorphen Funktionen f_n auf jeder kompakten Teilmenge der offenen Menge U gleichmäßig gegen f, dann ist auch f holomorph. Außerdem konvergieren die Ableitungen f_n' auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen f'.*

Übungsaufgabe 3.10.2 *Beweisen Sie diesen Satz. (Anleitung: Cauchy'schen Formel u.ä.)*

Übungsaufgabe 3.10.3 *Zeigen Sie: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von U, bestehend aus allen z mir Realteil > 1.*

3.10.2 Laurentreihen

[L] V 2.

Definition 3.10.4 *Unter einer* **Laurentreihe** *versteht man eine Reihe der Form*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei präziser die Summe $f = f^+ + f^-$ gemeint ist. f^+ steht dabei für die Summe über alle $n \geq 0$ und f^- für die Summe über alle $n < 0$ ist.

Mit ähnlichen bzw. etwas modifizierten Argumenten wie die Cauchy'sche Integralformel lässt sich folgende Verallgemeinerung beweisen:

Satz 3.10.5 *Sei A der abgeschlossene Kreisring aller $z \in \mathbb{C}$ mit $r \leq |z-z_0| \leq R$ und f holomorph auf A. Dann besitzt f eine auf A gleichmäßig und absolut konvergente Darstellung als Laurentreihe*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Bezeichnen wir die durch $|z - z_0| = r$ und $|z - z_0| = R$ definierten Kreise mit γ_r bzw. γ_R, so gelten die Formeln

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0$$

und

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n < 0.$$

Übungsaufgabe 3.10.6 *Beweisen Sie diesen Satz. (Anleitung: Für positive n ist $\gamma_R - \gamma_r$ nullhomolog und der Beweis verläuft ähnlich wie der für die Cauchy'sche Formel. Für negative n modifiziere man unter Verwendung von $\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$.)*

Übungsaufgabe 3.10.7 *Formulieren und beweisen Sie einen Eindeutigkeitssatz für Laurentreihen.*

3.10.3 Singularitäten

[L] V 3. Sei f holomorph auf der offenen Menge U. Besitzt $\mathbb{C} \setminus U$ einen isolierten Punkt z_0, so nennt man diesen eine isolierte **Singularität** von f.

Satz 3.10.8 *Sei f holomorph und beschränkt in einer Umgebung der isolierten Singularität z_0. Dann lässt sich f in z_0 holomorph fortsetzen.*

Beweis: (Skizze) Laut Satz 3.10.5 besitzt f eine Darstellung als Laurentreihe mit Koeffizienten a_n. Für $n < 0$ lässt sich mit Hilfe der Integraldarstellung aus Satz 3.10.5 leicht $a_n = 0$ zeigen. □

Somit sind drei Arten von Singularitäten zu unterscheiden.

Definition 3.10.9 *Sei f holomorph in U mit einer isolierten Singularität z_0 und sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ die Darstellung von f als Laurentreihe um die Entwicklungsstelle z_0. Gilt $a_n = 0$ für alle $n < 0$, so heißt z_0* **hebbare Singularität***. Gibt es ein größtes $n > 0$ mit $a_{-n} \neq 0$ so heißt z_0* **Pol der Ordnung** *n von f,* **einfacher Pol***, sofern $n = 1$. Ist $a_{-n} \neq 0$ für unendlich viele $n > 0$, so heißt z_0* **wesentliche Singularität** *von f. Ist f auf der offenen Menge U holomorph mit Ausnahme einer diskreten Menge von Polen, so heißt f* **meromorph** *auf U.*

Beispiele: Ist $f(z)$ ein Polynom, so ist $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ meromorph in ganz $\mathbb{C}$. Das gleiche gilt für jede andere ganze Funktion $f \neq 0$, etwa $f(z) = \sin(z)$, denn Nullstellen ganzer Funktionen liegen diskret (vgl. Ende von Kapitel 2).

Übungsaufgabe 3.10.10 *Sei f eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Zeigen Sie, dass 0 eine wesentliche Singularität von $g(z) = f(1/z)$ ist.*

Übungsaufgabe 3.10.11 *Beschreiben Sie die Situation im vorigen Beispiel für den Fall, dass f ein Polynom ist.*

Satz 3.10.12 (Satz von Casorati-Weierstrass) *Sei z_0 eine isolierte wesentliche Singularität der holomorphen Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, U offen. Ist $V \subseteq U$ eine beliebige Umgebung von z_0 und $U' = V \cap U$. Dann liegt $f(U')$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\overline{f(U')} = \mathbb{C}$.*

Beweis: Sei, indirekt, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(U')}$, so wäre $g(z) := \frac{1}{f(z)-\alpha}$ auf U' und holomorph und beschränkt, besäße nach Satz 3.10.8 also in z_0 eine holomorphe Fortsetzung. Die nichtkonstante Funktion g kann in z_0 eine Nullstelle höchstens endlicher Ordnung n haben, entsprechend $f = 1/g + \alpha$ einen Pol derselben Ordnung, Widerspruch. $\square$

Übungsaufgabe 3.10.13 *In diesem Beispiel sei $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$, wobei der Definitionsbereich variiere.*

1. *Skizzieren Sie f zunächst als reelle Funktion auf der Definitionsmenge $R^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Kurvendiskussion).*
2. *Zeigen Sie mittels Induktion nach n, dass die reelle n-te Ableitung von f die Gestalt $f^{(n)}(x) = f(x)q_n(x)$ mit einer gebrochen rationalen Funktion q_n hat.*
3. *Zeigen Sie durch Abschätzung des Differentialquotienten, dass die Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$ durch $f(0) = 0$ auch in 0 unendlich oft differenzierbar ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Folgern Sie daraus, dass für relle Funktionen* unendlich oft differenzierbar *nicht* analytisch *impliziert.*
5. *Behandeln Sie ab nun f als komplexe Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Geben Sie die Laurentdarstellung von f an.*
6. *Skizzieren Sie das Abbildungsverhalten von f und überprüfen Sie damit den Satz von Casorati-Weierstraß.*

3.10.4 Der Residuensatz

[L] VI 1. Wir haben bereits gesehen, dass es bei der Integration von Laurentreihen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

über kreisförmige Integrationswege γ um z_0 wegen

$$\int_\gamma f = 2\pi i a_{-1}$$

nur auf den Koeffizienten a_{-1} ankommt. Man nennt a_{-1} auch **Residuum** und schreibt $a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0} f$. Liegen innerhalb eines Gebietes, welches von einem Integrationsweg γ berandet ist, mehrere Singularitäten mit Residuen, überlegt man sich leicht, dass die einzelnen Werte aufsummiert werden müssen. Formuliert man das mit Hilfe des Homologiebegriffs, so lautet dies:

Satz 3.10.14 (Residuensatz) *Sei U eine offene Menge und γ eine geschlossene Kette, welche in U nullhomolog ist. Sei f in U meromorph mit den Singularitäten $z_1, \ldots, z_n \in U$, und seien $m_j = W(\gamma, z_j)$ die zugehörigen Windungszahlen. Dann gilt*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j Res_{z_j} f.$$

Wir wollen den Residuensatz auf Funktionen der Gestalt $\frac{f'}{f}$ anwenden. Wegen $(\log \circ f)' = \frac{f'}{f}$ spricht man auch von der **logarithmischen Ableitung** von f. Dabei sei vorausgesetzt, dass $f \neq 0$ bei $z_0 = 0$ holomorph sei oder bestenfalls einen Pol habe. Es gibt also ein $m \in \mathbb{Z}$ derart, dass $f(z) = a_m z^m (1 + h(z))$ mit $h(0) = 0$. Man rechnet leicht nach:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z} + \frac{h'(z)}{1 + h(z)}.$$

Da der zweite Summand holomorph bei 0 ist, beträgt das Residuum dieser Funktion bei 0 gerade m, gibt also die Ordnung der Nullstelle von f bei 0 an. Dabei sei vereinbart, dass Pole als Nullstellen mit negativer Ordnung angesehen werden und vice versa. Der entsprechende Satz lautet:

Satz 3.10.15 *Sei γ eine geschlossene und nullhomologe Kette in U. Sei f meromorph in U ohne wesentliche Singularitäten. Angenommen, sämtliche Pole und Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ von f liegen nicht auf γ. Weiters seien $m_j = W(\gamma, z_j)$ die zugehörigen Windungszahlen. Dann gilt*

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} m_j \, ord_{z_j} f.$$

3.10.5 Berechnung bestimmter Integrale

[L] VI 2. Der Residuensatz kann zur Berechnung reeller Integrale herangezogen werden. Die Idee versteht man am besten anhand von typischen Situationen. Sei etwa das reelle uneigentliche Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

zu berechnen. Lasse sich f auch als komplexe Funktion deuten, welche nur endlich viele Singularitäten besitzt. Wir denken an einen Integrationsweg γ_R, bestehend aus dem reellen Intervall $[-R, R]$ und dem Halbkreis η_R in der positiven komplexen Halbebene mit Mittelpunkt 0 und Radius R. Sind die Residuen bekannt, so lässt sich

$$I(R) = \int_{\gamma_R} f$$

durch diese ausdrücken. Verschwindet außerdem der Beitrag über den Halbkreis η_R für $R \to \infty$, so ergibt sich der Wert des gesuchten Integrals mit Hilfe der Residuen von f. Präzisiert man diese Idee, so erhält man:

Satz 3.10.16 *Sei f meromorph in $\mathbb{C}$ mit nur endlich vielen Singularitäten, von denen keine wesentlich ist. Erfüllt f für ein geeignetes $B > 0$ und hinreichend große $|z|$ die Abschätzung $|f(z)| \leq \frac{B}{|z|^2}$. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \mathit{Res} f,$$

wobei sich die Summe über alle Residuen von f in der oberen Halbebene erstreckt.

Übungsaufgabe 3.10.17 *Behandeln Sie mit dieser Methode das Integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Abschließend sei erwähnt, dass diese Methode bzw. Modifikationen unter anderem bei der Berechnung von Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx,$$

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-ax}\,dx$$

oder

$$\int_0^{\infty} f(x)x^a\,\frac{dx}{x}$$

oft sehr nützlich ist. Diese Integraltypen treten auf bei Fourier-, Laplace- bzw. Mellintransformation.

Kapitel 4

Ausblicke

In diesem letzten Kapitel wird versucht, auf dem extrem knappen Raum, der noch zur Verfügung steht, noch einige wichtige Themen der Funktionentheorie anzureißen. Selbstverständlich kann dies nur überblicksmäßig erfolgen. Sofern dennoch einige Grundgedanken — sei es von Begriffen, Probremstellungen oder Beweisen — vermittelt werden können, ist schon ziemlich viel erreicht.

4.1 Geometrische Funktionentheorie

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Frage nach der Existenz analytischer Isomorphismen zwischen gewissen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Den Höhepunkt wird der Riemann'sche Abbildungssatz bilden, welcher besagt, dass jedes nichtleere einfach zusammenhängende Gebiet, welches eine echte Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, analytisch isomorph zur offenen Einheitskreisscheibe ist.

4.1.1 Konforme Abbildungen und analytische Isomorphismen

[L] VII Anfang. Wir erinnern daran, dass jede injektive analytische Abbildung $f : U \to V$ zwischen zwei offenen Mengen U und V einen analytischen Isomorphismus zwischen U und $f(U) \subseteq V$ darstellt (dass also auch die Umkehrabbildung analytisch ist) und dass in dieser Situation $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in U$ gilt. Ist $U = f(U)$, so heißt f auch ein analytischer Automorphismus von U. Sämtliche analytischen Automorphismen von U bilden offenbar eine Gruppe, die sogenannte (analytische) Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(U)$.

Die weiteren Untersuchungen sind von folgenden Überlegungen geprägt: Angenommen wir verstehen die Struktur von $\mathrm{Aut}(U)$ für ein U. Dann verstehen wir auch die Struktur von $\mathrm{Aut}(V)$ für alle V, die zu U isomorph sind. Ist nämlich $f : U \to V$ ein Isomorphismus, so induziert dieser vermittels der Zuordnung $f^* = g \mapsto f \circ g \circ f^{-1}$, einen Isomorphismus $f^* : \mathrm{Aut}(U) \to \mathrm{Aut}(V)$. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Konjugation (im gruppentheoretischen Sinn;

offensichtlich gelten ähnliche Beziehungen aber auch noch allgemeiner, wenn man auch nicht bijektive f zulässt). Kennt man einen einzigen Isomorphismus f zwischen U und V, so kennt man mit $\mathrm{Aut}(U)$ auch alle Isomorphismen von U nach V.

Übungsaufgabe 4.1.1 *Erläutern und beweisen Sie dies.*

Übungsaufgabe 4.1.2 *Rechnen Sie nach, dass es sich bei der Konjugation tatsächlich um einen Gruppenisomorphismus handelt.*

Die Situation wäre also sicher dann sehr zufriedenstellend, wenn wir erstens $\mathrm{Aut}(U)$ für ein geeignetes Gebiet U beschreiben können und zweitens eine weite Klasse von Gebieten V angeben können, welche analytisch isomorph zu U sind. Tatsächlich gelingt das erste Ziel mit Hilfe des Schwarz'schen Lemmas (hier ist U die Einheitskreisscheibe), das zweite mit Hilfe des Riemann'schen Abbildungssatzes. Dieser besagt, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet U in $\mathbb{C}$ analytisch isomorph zur Kreisscheibe ist, sofern U weder leer noch ganz $\mathbb{C}$ ist. Diesen beiden Zielen sind die nächsten beiden Unterabschnitte gewidmet. Daran anschließend werden wir auch noch den Fall $U = \mathbb{C}$ behandeln sowie den der Riemann'schen Zahlenkugel.

Zunächst aber noch ein paar Anregungen zur Übung.

Übungsaufgabe 4.1.3 *Geben Sie einige Beispiele von analytischen Isomorphismen, z.B. zwischen Kreisscheibe und Halbkreis, zwischen oberer Halbebene und Kreisscheibe (Anleitung: $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ betrachten), zwischen der oberen Hälfte von D und dem ersten Quadranten ($z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$), der Halbebene H und einem unbeschränkten waagrechten Streifen (*$\log$ *verwenden) ...*

4.1.2 Analytische Automorphismen des Kreisscheibe

[L] VII.1/2. Bezeichne $D \subseteq \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe. Beispiele analytischer Automorphismen von D sind offenbar die Drehungen $f_\varphi : z \mapsto ze^{i\varphi}$ um den Winkel φ. Diese haben die zusätzliche Eigenschaft, dass sie 0 als Fixpunkt besitzen.

Andere, nicht ganz so offensichtliche Beispiele von Automorphismen sind gegeben durch die Abbildungen $g_\alpha : z \mapsto \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}$, wobei wir $\alpha \in D$ voraussetzen. Man rechnet schnell nach, dass g_α den Einheitskreis auf sich abbildet, außerdem eine Involution, d.h. invers zu sich selbst ist, und die Werte 0 und α vertauscht. Insbesondere folgt aus dem Maximumprinzip, dass das Innere der Kreisscheibe auf das Innere abgebildet wird. Da g_α holomorph auf D ist, handelt es sich also tatsächlich um einen analytischen Automorphismus von D.

Natürlich sind auch die zusammengesetzten Abbildungen $f_\varphi \circ g_\alpha$ Automorphismen. Bemerkenswert ist, dass es keine weiteren gibt:

Satz 4.1.4 *Jeder analytische Automorphismus $h \in \mathrm{Aut}(D)$ von D besitzt eine eindeutige Darstellung $h = f_\varphi \circ g_\alpha$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\alpha \in D$.*

Das wesentliche Hilfsmittel für den Beweis ist das **Schwarz'sche Lemma**:

Hilfssatz 4.1.5 *Sei $f : D \to D$ analytisch, injektiv mit Fixpunkt 0. Dann gilt:*

1. *$|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in D$.*
2. *Gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$, so ist $f = f_\varphi$ eine Drehung*

Beweis:

1. Wegen $f(0) = 0$ fällt in der Potenzreihendarstellung von f das konstante Glied weg, und die Funktion $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ ist holomorph auf ganz D. Für $|z| = r < 1$ gilt $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$, nach dem Maximumprinzip auch für $|z| \leq r$. Für $r \to 1$ folgt daraus die erste Behauptung.
2. Wieder nach dem Maximumsprinzip kann $|g|$ nur dann ein Extremum im inneren Punkt z_0 haben, wenn g konstant ist, also gilt tatsächlich $f(z) = \alpha z$ mit $|\alpha| = 1$ also $\alpha = e^{i\varphi}$ mit einem $\varphi \in [0, 2\pi)$. $\square$

Übungsaufgabe 4.1.6 *Folgern Sie als Ergänzung zum Schwarz'schen Lemma: Unter den dortigen Voraussetzungen gilt $|f'(0)| \leq 1$. Im Falle der Gleichheit liegt die Drehung $f(z) = f'(0)z$ vor.*

Nun können wir Satz 4.1.4 beweisen: Ist nämlich ein beliebiges $h \in \mathrm{Aut}(D)$ vorgegeben und ist $h(\alpha) = 0$, so hat $f := h \circ g_\alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(D)$ den Fixpunkt 0, erfüllt also die Voraussetzungen des Schwarz'schen Lemmas, ebenso wie die Inverse f^{-1}. Damit folgt aus dem ersten Teil $|f(z)| \leq |z|$ ebenso wie $|f^{-1}(z)| \leq |z|$. Also ist die Voraussetzung des zweiten Teils erfüllt, und wir erhalten, dass $f = f_\varphi$ eine Drehung ist. Daraus folgt $h = f_\varphi \circ g_\alpha$.

Übungsaufgabe 4.1.7 *Beweisen Sie die Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.1.4.*

Übungsaufgabe 4.1.8 *Verwenden Sie einen Isomorphismus zwischen D und der oberen Halbebene H (vgl. Übung 4.1.3) um zu zeigen, dass alle Automorphismen von H die Gestalt $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ haben.*

4.1.3 Der Riemann'sche Abbildungssatz

[L] X. Wir beginnen mit der Formulierung des **Riemannschen Abbildungssatzes**:

Satz 4.1.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, nichtleer und nicht ganz $\mathbb{C}$. Dann ist U analytisch isomorph zur Einheitskreisscheibe, genauer: Ist $z_0 \in U$ beliebig vorgegeben, so gibt es einen analytischen Isomorphismus $f : U \to D$ mit $f(z_0) = 0$. Dieses f ist bis auf eine Rotation eindeutig bestimmt. Fordert man zusätzlich $f'(z_0) > 0$, so gibt es also genau ein solches f.*

Relativ leicht ist der Beweis der Eindeutigkeitsaussage mit der Hilfe von Satz 4.1.4.

Übungsaufgabe 4.1.10 *Führen Sie diesen Eindeutigkeitsbeweis.*

Der schwierige Teil besteht also in der Konstruktion eines Isomorphismus $f : U \to D$. Der Gedankengang verläuft in groben Zügen wie folgt. Details verlagern wir dabei in Übungsbeispiele oder verweisen auf [L].

Bezeichne Φ die Menge aller analytischen und injektiven Funktionen $f : U \to D$ mit $f(z_0) = 0$.

Übungsaufgabe 4.1.11 *Zeigen Sie, dass Φ nicht leer ist. (Anleitung: Ist $\alpha \notin U$, so lässt sich $g(z) = \log(z - \alpha)$ zunächst lokal definieren, weil U einfach zusammenhängend ist sogar global. Auch lässt sich zeigen, dass es eine Kreisscheibe um $g(z_0)+2\pi i$ gibt, wo g keine Werte annimmt. Deshalb ist die Funktion $h(z) = (g(z) - g(z_0) - 2\pi i)^{-1}$ analytisch und beschränkt auf U und außerdem injektiv. Mit einer geeigneten linearen Transformation l hat daher $f = l \circ g$ die gewünschten Eigenschaften.)*

Später werden wir aus unendlichen Folgen aus Φ gleichmäßig konvergente Teilfolgen auswählen und deren Grenzfunktion betrachten. Ähnlich wie im Satz von Bolzano-Weierstraß ist dies möglich, sofern der Abschluss von Φ kompakt ist. (Solche Mengen Φ heißen auch realtiv kompakt oder, im funktionentheoretischen Kontext, normale Familien von Funtionen.) Nach dem Satz von Arzela und Ascoli aus der reellen Analysis, der im Komplexen analog gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn Φ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Übungsaufgabe 4.1.12 *Wiederholen Sie die vorkommenden Begriffe.*

Das Problem, dass U nicht kompakt ist, während im Satz von Arzela und Ascoli jedoch Kompaktheit vorausgesetzt ist, lässt sich dadurch bewältigen, dass man nachweist, dass U sich als Vereinigung einer geeigneten abzählbaren Folge kompakter Mengen $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$ darstellen lässt, dass man sich auf diese K_n bezieht und den Beweis entsprechend modifiziert.

Übungsaufgabe 4.1.13 *Zeigen Sie, dass sich jede offene Menge in $\mathbb{C}$ als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen K_n mit $K_n \subseteq K_{n+1}^o$ schreiben lässt.*

Nun zur relativen Kompaktheit von Φ: Die gleichmäßige Beschränktheit von Φ gilt nach Definition. Wegen der Holomorphie lässt sich die Cauchy'sche Formel anwenden, mit Hilfe derer sich sogar die gleichgradige Stetigkeit ableiten lässt sowie die Beschränktheit der Werte $|f'(z_0)|$, $f \in \Phi$. Sei s das Supremum dieser Werte. Man wähle nun eine Folge $f_n \in \Phi$ mit $|f_n(z_0)| \to s$ und daraus eine gegen ein f gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Dieses f erweist sich als der gewünschte analytische Isomorphismus. Wegen Satz 3.10.1 ist f als gleichmäßiger Grenzwert analytischer Funktionen wieder analytisch. Es bleibt zu zeigen, dass erstens $f(U) \subseteq D$, zweitens f injektiv ist und drittens f surjektiv ist. Die erste Aussage folgt aus dem Maximumprinzip. Für die zweite beweist man (unter Verwendung des Residuensatzes 3.10.14), dass der gleichmäßige Grenzwert injektiver analytischer Funktionen auf Kompakta stets entweder injektiv oder konstant ist, wobei sich die zweite Alternative in unserer Situation leicht ausschließen lässt. Die letzte Aussage gewinnt man durch geschickte Rückführung auf den Fall $U = D$, wo die Ergänzung zum Schwarz'schen Lemma (Übung 4.1.6) die entsprechende Aussage liefert.

4.1.4 Analytische Automorphismen von $\mathbb{C}$

[L] V 3. Standen im Riemann'schen Abbildungssatz von ganz $\mathbb{C}$ verschiedene einfach zusammenhängende Gebiete, insbesondere die Einheitskreisscheibe D im Mittelpunkt, so wollen wir uns nun der gesamten komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ zuwenden.

Übungsaufgabe 4.1.14 *Zeigen Sie, dass jedes zu $\mathbb{C}$ analytisch isomorphe Gebiet U bereits $U = \mathbb{C}$ sein muss.*

Funktionen der Gestalt $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, sind offenbar analytische Automorphismen von $\mathbb{C}$: Sie besitzen die analytische Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = a^{-1}z - \frac{b}{a}$. Bemerkenswert ist, dass es keine weiteren analytischen Automorphismen gibt.

Satz 4.1.15 *Jeder analytische Automorphismus f von $\mathbb{C}$ ist von der Gestalt $f(z) = az + b$ mit $a \neq 0$. Umgekehrt ist jede solche Abbildung analytischer Isomorphismus.*

Beweis: Nur die erste Aussage ist zu beweisen. O.B.d.A. sei $f(0) = 0$ (ansonsten $f(z)$ durch $f(z) - f(0)$ ersetzen). Die Funktion $h(z) = f(\frac{1}{z})$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit der Ausnahme einer einzigen Singularität bei 0. f bildet als Homöomorphismus die offene Einheitskreisscheibe D um 0 auf eine offene Umgebung V von $f(0)$ ab. Wegen der Bijektivität von f ist $h(D)$ disjunkt zu V, insbesondere nicht dicht in $\mathbb{C}$. Also ist 0 nach dem Satz von Casorati-Weierstraß (3.10.12) keine wesentliche Singularität von h. Mit $f(z) = \sum a_n z^n$ gilt $h(z) = \sum a_n z^{-n}$, also ist f ein Polynom. Hätte f zwei verschiedene Nullstellen, wäre die Injektivität verletzt. Also gilt $f(z) = a(z - z_0)^n$. Da f analytischer Isomorphismus auch um z_0 ist, muss $n = 1$ gelten. □

4.1.5 Gebrochen lineare Transformationen und die Riemann'sche Zahlenkugel

[L] VII.5 Wir erweitern die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ um das Element ∞ zur Riemann'schen Zahlenkugel.

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass die einzigen analytischen Automorphismen von $\mathbb{C}$ die linearen Abbildungen $f(z) = az+b$ mit $a \neq 0$ sind. Auf der Riemann'schen Zahlenkugel kommt aber beispielsweise noch die sogenannte Inversion $J(z) = \frac{1}{z}$ hinzu, wenn man die Regeln $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $-\infty = \infty$ sowie $z + \infty = \infty$ und (für $z \neq 0$) $z \cdot \infty = \infty$ vereinbart. (Man beachte, dass damit die Operationen stetig auf die Riemann'sche Zahlenkugel ausgedehnt werden, dass dabei allerdings z.B. die Gruppenstruktur bezüglich + verloren geht.) Durch Komposition linearer Abbildungen mit der Inversion erhält man sämtliche **gebrochen linearen Transformationen**

$$F(z) = F_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei allerdings die Determinantenbedingung $ad - bc \neq 0$ gefordert werden muss, damit F nicht konstant wird. Mit G wollen wir die Menge dieser Abbildungen bezeichnen, die wir auch als analytische Automorphismengruppe der Riemann'schen Zahlenkugel interpretieren wollen. Die dafür maßgeblichen sowie weitere Eigenschaften sind leicht nachzurechnen:

1. $F_{a,b,c,d}$ ist tatsächlich genau dann ein Automorphismus der Riemann'schen Zahlenkugel, wenn die Determinante $ad - bc$ nicht verschwindet.

2. G bildet eine Gruppe.

3. Die Inversen werden in G nach der Regel $F_{a,b,c,d}^{-1} = F_{d,-b,-c,a}$ berechnet.

4. $F = F_{a,b,c,d} \in G$ und $F' = F_{a',b',c',d'} \in G$ stimmen genau dann überein, wenn es eine komplexe Zahl $\lambda \neq 0$ gibt mit $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ und $d' = \lambda d$.

5. Sei $c = 0$. Dann ist F (i.a. inhomogen) linear, o.B.d.A. $F = F_{a,b,0,1}$, also $F(z) = az + b$, und ∞ ist Fixpunkt von F. Ist $a \neq 1$, so besitzt F genau einen weiteren Fixpunkt, nämlich $z = \frac{b}{1-a}$. Für $a = 1$ liegt eine Translation vor, welche für $b \neq 0$ keinen Fixpunkt in $\mathbb{C}$ besitzt und für $b = 0$ die Identität ist.

6. Sei $c \neq 0$. Dann gilt $F(\infty) = \frac{a}{c}$ und $F(-\frac{d}{c}) = \infty$.

7. Verwenden wir für Translationen und Multiplikationen die Schreibweise $T_b(z) = z + b = F_{1,b,0,1}(z)$ bzw. $M_a(z) = az = F_{a,0,0,1}$ ($a \neq 0$), so lässt sich jedes beliebige Element von G mit geeigneten α, β, γ schreiben entweder als $T_\beta \circ M_\alpha$ (linearer Fall) oder als $T_\gamma \circ M_\alpha \circ J \circ T_\beta$.

8. Die Elemente von G bilden Geraden oder Kreise wieder auf Geraden oder Kreise ab. Geraden auf der Zahlenkugel sollen dabei stets Geraden der Ebene vereinigt mit ∞ sein. (Da Translationen und Multiplikationen, also Drehstreckungen, offenbar Geraden auf Geraden und Kreise auf Kreise abbilden, bleibt nur der Fall der Inversion zu untersuchen. Hier können Geraden in Kreise übergehen und umgekehrt.)

9. In den beiden Tripeln (z_1, z_2, z_3) und (w_1, w_2, w_3) von Punkten auf der Riemann'schen Zahlenkugel seien die z_i paarweise verschieden, ebenso die w_i. Dann gibt es genau ein $F \in G$ mit $z_i \mapsto w_i$ für $i = 1, 2, 3$. (Die Gruppe G ist daher dreifach transitiv.) Dieses F ist für $w = F(z)$ durch die Formel

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

gegeben. (Zunächst induziert diese Formel das gewünschte F. Für den Beweis der Eindeutigkeit betrachte man zwei Lösungen F, G und $H = F \circ G^{-1}$. H hat drei Fixpunkte. Es genügt also, hieraus zu schließen, dass H die Identität ist.)

Übungsaufgabe 4.1.16 *Rechnen Sie alle angegebenen Eigenschaften nach bzw. führen Sie die Beweise vollständig aus.*

4.1.6 Harmonische Funktionen

([L] VIII). Wir wollen komplexe Funktionen interpretieren als Funktionen zwischen Teilbereichen von $\mathbb{R}^2$, genauer: Seien die komplexe Variable $z = x + iy$ sowie die komplexe Funktion $f = u + iv$ in ihrer Darstellung mittels Realteil x bzw. u und Imaginärteil y bzw. v gegeben. Für zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktionen u in zwei Variablen ist der **Laplaceoperator** Δ durch

$$\Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2,$$

also

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

definiert. So ein u heißt **harmonisch**, falls $\Delta u = 0$. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, welche Inhalt des folgenden Übungsbeispiels ist:

Übungsaufgabe 4.1.17 *Zeigen Sie: Aus den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen folgt, dass der Realteil einer analytischen Funktion harmonisch ist.*

Es gilt aber auch eine Umkehrung, wonach sich jede harmonische Funktion u als Realteil einer analytischen Funktion f schreiben lässt. Zwei solche f unterscheiden sich lediglich um eine rein imaginäre additive Konstante.

Wir vereinbaren, dass mit der obigen Notation einer analytischen Funktion $f(z) = f(x+iy) = u(z)+iv(z)$ das zweidimensionale reelle Vektorfeld $F(x, y) = (u(x + iy), v(x + iy))$ zugeordnet sei. In Analogie zum komplexen Konjugium schreiben wir auch $\overline{F} = (u, -v)$. Eine **Potentialfunktion** P für F ist definiert durch die Bedingungen $\frac{\partial P}{\partial x} = u$ und $\frac{\partial P}{\partial y} = v$. Dann ergibt sich:

Übungsaufgabe 4.1.18 *Sei g Stammfunktion von f mit der Zerlegung $g = \varphi + i\psi$ in Real- und Imaginärteil. Dann ist φ eine Potentialfunktion für $\overline{F}$.*

Derartige Beziehungen zwischen komplexen und reellen Funktion lassen erwarten, dass Ergebnisse der Funktionentheorie gewisse Analoga in der reellen Analysis besitzen. Als Beispiel zitieren wir folgendes Resultat, welches an die Cauchy'sche Formel erinnert, wo z.B. eine holomorphe Funktion auf einer Kreisscheibe vollständig durch ihre Werte am Rand bestimmt ist. Wegen des Riemann'schen Abbildungssatzes gilt dies natürlich auch für allgemeinere Bereiche.

Satz 4.1.19 *Sei U eine offene und beschränkte Teilmenge der Ebene. Die harmonischen Funktionen u und v mögen stetig auf dem Abschluss von U sein und auf dem Rand übereinstimmen. Dann stimmen u und v auf ganz U überein. Ist U eine Kreisscheibe um z_0 mit Radius r, so gilt die Formel (***Mittelwertsatz für harmonische Funktionen***)*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

In ähnlicher Weise gibt es auch Analogien zum komplexen Maximumsprinzip für harmonische reelle Funktionen. Auch die Untersuchung der Gradienten reellwertiger Funktionen führen zu interessanten Einsichten. Dazu ein Übungsbeispiel.

Übungsaufgabe 4.1.20 *Sei $f = u + iv$ analytisch, so stehen die Gradienten von u und v aufeinander normal.*

Diese knappen Andeutungen mögen plausibel machen, dass die hier berührten Ergebnisse aus der Funktionentheorie große Bedeutung auch für Anwendungen, insbesondere für Differentialgleichungen und somit für die Physik haben.

4.1.7 Analytische Fortsetzung und Anwendungen

([L] XI) Die erste Methode analytischer Fortsetzung von Funktionen erfolgt entlang einer Kurve γ von z_0 nach w. Darunter versteht man eine Überdeckung der Kurve durch endlich viele offene Kreisschreiben $D_0, D_1, \ldots, D_n$ derart, dass auf jedem D_i ein analytisches f_i vorliegt und verschiedene f_i auf den Schnitten verschiedener D_i übereinstimmen. Die Vereinigung f der f_i heißt analytische Fortsetzung von f_0 entlang γ. Aus Abschnitt 2.4 folgt, dass solche analytische Fortsetzungen eindeutig sind. Im Zusammenhang mit dem Logarithmus, Windungszahlen und dem Cauchy'schen Satz haben wir auch die Wichtigkeit des Begriffs des einfachen Zusammenhangs kennengelernt. Daher sollte die Aussage des sogenannten **Monodromiesatzes** nicht überraschen:

Satz 4.1.21 *Sei U ein Gebiet und f analytisch bei $z_0 \in U$ sowie analytisch fortsetzbar entlang beliebiger Wege in U. Weiters seien γ und η zwei in U zueinander homotope Wege von z_0 nach w. Dann stimmen die analytischen Fortsetzungen von f entlang dieser beiden Wege in einer Umgebung von w überein. Die Homotopievoraussetzung ist bei einfach zusammenhängendem U stets erfüllt. Also ist dort analytische Fortsetzung stets möglich.*

Übungsaufgabe 4.1.22 *Diskutieren Sie Satz 4.1.21 anhand von typischen Beispielen, wo Voraussetzungen verletzt sind und die Aussage des Satzes nicht gilt.*

Eine andere Methode der analytischen Fortsetzung ist als das **Schwarz'sche Spiegelungsprinzip** ([L] IX) bekannt. Dabei geht es um folgende Situation:

Sei U^+ ein Gebiet in der oberen komplexen Halbebene, dessen Rand ein offene relles Intervall I enthalte. U^- bezeichne jenes Gebiet, welches aus U^+ durch komplexe Konjugation (d.h. Spiegelung an der reellen Achse) hervorgeht. $U = U^+ \cup I \cup U^-$ bezeichne die Vereinigung dieser drei Mengen. Der folgende Satz beschreibt die Möglichkeit analytischer Fortsetzungen von U^+ auf U.

Satz 4.1.23 *Seien obige Bezeichnungen festgehalten und U ein Gebiet.*

1. *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch auf U^+, analytisch auf U^- und stetig auf I. Dann ist f analytisch auf U.*

2. *Sei $f : U^+ \cup I \to \mathbb{C}$ analytisch auf U^+ sowie stetig und reellwertig auf I. Dann besitzt f eine eindeutige analytische Fortsetzung F auf U, welche durch $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ gegeben ist.*

Der Beweis verwendet als wichtigstes Hilfsmittel die Cauchy'sche Formel. Wichtig für die weitreichende Anwendung des Spiegelungsprinzips in der obigen Fassung ist der Umstand, dass die Situation vermittels analytischer Isomorphismen auf viele (vgl. Riemann'scher Abbildungssatz) andere Situationen übertragen werden kann, wo I nicht mehr auf der reellen Achse sondern auf einer Kurve liegt, U^+ und U^- auf den beiden Seiten der Kurve.

Nach dem gleichen Prinzip lassen sich Fortsetzungen harmonischer Funktionen finden, Fortsetzungen analytischer Isomorphismen untersuchen sowie interessante geometrische Überlegungen anstellen. Auf den ersten Blick nicht offensichtlich ist, dass der folgende **Satz von Picard** auch mit verwandten Methoden bewiesen werden kann. Da er aber auch für sich allein genommen interessant ist, sei er hier ohne Beweis erwähnt:

Satz 4.1.24 *Jede ganze Funktion, die zwei verschiedene komplexe Werte nicht annimmt, ist konstant. (Die Exponentialfunktion, die nie 0 wird, zeigt, dass ein einziger Wert sehr wohl ausgespart sein kann.)*

4.2 Ganze und Meromorphe Funktionen

In diesem letzten Abschnitt rücken die geometrischen Aspekte wieder etwas mehr in den Hintergrund, dafür die Darstellung holomorpher Funktionen als Produkte, Summen oder Integrale in den Vordergrund.

4.2.1 Multiplikativ: Ganze Funktionen und Weierstraß'sche Produkte

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes nichtkonstante komplexe Polynom f eine Nullstelle α. Nach dem Divisionsalgorithmus für Polynome lässt sich $f(z) = (z - \alpha)f_1(z) + r$ mit einem Polynom q schreiben. Setzt man $z = \alpha$ ein, folgt $r = 0$. Also lässt sich der Linearfaktor $z - \alpha$ abspalten. Verfährt man mit dem Polynom f_1 genauso wie zuvor mit f, erhält man einen weiteren Linearfaktor usw. Dieses Verfahren bricht erst dann ab, wenn das verbleibende

Polynom konstant ist. Also besitzt jedes Polynom $f \neq 0$ vom Grad n eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren sogar eindeutige) Darstellung

$$f(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus 0$, wobei α_i die Nullstellen von f sind. Sind umgekehrt die Nullstellen α_i, $i = 1, \ldots, n$, gegeben, so kann durch obige Formel ein Polynom f definiert werden, welches genau diese Nullstellen (auch mit der vorgegebenen Vielfachheit) besitzt. Bis auf die multiplikative Konstante a ist dieses Polynom auch eindeutig bestimmt.

Es stellt sich die Frage, ob, analog zum Übergang von Polynomen als endlichen Summen zu unendlichen Potenzreihen, auch unendliche Produkte ganze Funktionen darstellen können, wobei in diesem Fall Vorgaben über unendlich viele Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ erfüllt werden sollen. Natürlich dürfen sich die α_n nicht häufen, weil sonst nach dem Eindeutigkeitssatz nur die Nullfunktion in Frage käme.

Ist jedoch diese Voraussetzung erfüllt, so folgt $|\alpha_n| \to \infty$, und unser Vorhaben gelingt tatsächlich mit Produkten der Gestalt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{P_n(z/\alpha_n)}$$

oder, falls auch 0 eine Nullstelle der Vielfachheit m sein soll,

$$z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{P_n(z/\alpha_n)}$$

mit geeigneten Polynomen P_n.

Zur Erläuterung: Offenbar gewährleisten die Faktoren $1 - \frac{z}{\alpha_n}$, dass alle α_n Nullstellen sind. Für $n \to \infty$ konvergieren diese Ausdrücke, wie das bei unendlichen Produkten zu wünschen ist, gegen 1. Würde man sich einfach mit dem Produkt dieser Ausdrücke begnügen, hätte man aber noch keine Gewissheit über die Konvergenz des unendlichen Produktes. Aus diesem Grunde müssen konvergenzerzeugende Faktoren eingebaut werden. Um keine neuen Nullstellen zu produzieren, sollen diese aber nicht selbst 0 werden können, was mit Exponentialausdrücken erreicht werden kann. Den gewünschten konvergenzerzeugenden Effekt kann man nun erzielen, indem man $P_n(z) = z + \frac{z^2}{2} + \ldots \frac{z^{k_n - 1}}{k_n - 1}$ mit geeigneten k_n setzt. Wir verzichten hier auf die rechnerischen Details. Man beachte, dass in dieser Konstruktion auch die Vielfachheiten von Nullstellen berücksichtigt werden können. Außerdem ist die Konvergenz gleichmäßig und absolut (im Sinne von unendlichen Produkten) auf kompakten Mengen.

Nachdem wir eine einzelne Funktion mit vorgegebenem Nullstellenverhalten gefunden haben, stellt sich sofort die Frage, wie alle übrigen solchen Funktionen aussehen. Um das zu klären, gehen wir von zwei ganzen Funktionen f und g aus, welche die gleichen Nullstellen mit den gleichen Vielfachheiten besitzen. Dann ist der Quotient $\frac{f}{g}$ eine ganze Funktion ohne Nullstelle. Hieraus lässt sich folgern, dass eine ganze Funktion $h = \log(\frac{f}{g})$ mit $f(z) = g(z)e^{h(z)}$ definiert werden kann. Umgekehrt definiert zu vorgegebenem f jedes ganze h ein entsprechendes g.

Als abschließendes und illustrierendes Beispiel sei die ganze Funktion $\sin \pi z$ erwähnt, deren Nullstellen genau die ganzen Zahlen sind. Sie besitzt die Produktdarstellung

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

4.2.2 Additiv: Meromorphe Funktionen und der Satz von Mittag-Leffler

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir Polynome zu unendlichen Produkten verallgemeinert, welche ganze Funktionen mit unendlich vielen vorgegebenen Nullstellen darstellen. Nun wollen wir ganz ähnlich die Partialbruchzerlegung von gebrochen rationalen Funktionen verallgemeinern zu unendlichen Summen mit unendlich vielen vorgegebenen Polen. Dieses Anliegen wird gleich durch den **Satz von Mittag-Leffler** erfüllt werden. Zur Formulierung desselben erinnern wir noch an die Definition des **Hauptteils** $p_{(f,z_0)}$ einer Laurentreihe $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ um z_0. Dieser ist definiert als $p_{(f,z_0)}(\frac{1}{z-z_0})$ mit $p_{(f,z_0)}(x) = a_{-m}x^m + \ldots + a_{-1}x$.

Satz 4.2.1 *Seien die paarweise verschiedenen diskret liegenden Polstellen $\alpha_n \in \mathbb{C}$ sowie Polynome p_n ohne konstanten Term vorgegeben. Dann gibt es eine auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f, welche ihre Pole genau an den Stellen α_n hat mit Hauptteil $p_n(\frac{1}{z-\alpha_n})$. Jede Funktion mit dieser Eigenschaft lässt sich schreiben als*

$$\varphi(z) + \sum_n (p_n(\frac{1}{z-\alpha_n}) - q_n(z))$$

mit einer ganzen Funktion φ und gewissen konvergenzerzeugenden Polynomen q_n. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$, welche keine Polstellen enthält.

Beweis: (Idee) Es müssen im wesentlichen die konvergenzerzeugenden Polynome q_n geeignet gewählt werden. Taylorpolynome hinreichend hohen Grades für $p_n(\frac{1}{z-\alpha_n})$ leisten dies. $\square$

4.2.3 Elliptische Funktionen

Bekanntlich heißt p Periode einer auf einer additiven Gruppe G (z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) definierten Funktion f, falls $f(x+p) = f(x)$ für alle x aus der Gruppe gilt. Sind p_1 und p_2 Perioden von f, so auch $p_1 + p_2$ und $-p_1$. Also bilden die Perioden eine Gruppe bezüglich $+$, die sogenannte Periodengruppe P. Besteht P nicht nur aus der 0, so heißt f periodisch. In unserem Kontext werden wir nicht verlangen, dass f auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist, sondern wir werden uns mit

Meromorphie begnügen, d.h. auch den Funktionswert ∞ zulassen. Zunächst aber einige Übungen als Motivation.

Übungsaufgabe 4.2.2 *1. Zeigen Sie: Ist f stetig, so ist P abgeschlossen.*

2. *Zeigen Sie: Jede Untergruppe von $\mathbb{R}$, welche einen Häufungspunkt besitzt, liegt dicht in $\mathbb{R}$.*

3. *Zeigen Sie: Jede abgeschlossene Untergruppe $U \neq \mathbb{R}$ von $(\mathbb{R}, +)$ ist zyklisch.*

4. *Zeigen Sie, dass jede nichttriviale abgeschlossene Untergruppe von $\mathbb{C}$, von einem der folgenden vier Typen ist.*

   (a) *zyklisch, d.h. von einem Element erzeugt*

   (b) *von zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen Elementen erzeugt*

   (c) *eine Gerade durch den Ursprung*

   (d) *Erzeugt von einer Geraden durch den Ursprung und einem nicht darauf liegenden Punkt*

   (Dies ist der schwierigste Teil.)

5. *Ist die Periodengruppe P der analytischen Funktion f nicht diskret, so ist f konstant. (Eindeutigkeitssatz für analytische Funktionen verwenden.)*

Im Zusammenhang mit komplexen Funktionen können wegen obiger Aussage 5 also nur die ersten beiden der in 4.2.2.4 aufgelisteten Typen interessieren. Wie das Beispiel z.B. des Sinus zeigt, gibt es tatsächlich zahlreiche ganze Funktionen mit zyklischer Periodengruppe. Man spricht auch von einfach periodischen Funktionen. Interessanter ist die Situation für Periodengruppen, welche von zwei Elementen erzeugt werden. Meromorphe Funktionen f, für welche dies der Fall ist, heißen doppelt periodisch oder **elliptisch**.

Da wir uns nun auf diese Situation konzentrieren wollen, halten wir einige Notationen fest. Zunächst seien die beiden erzeugenden Elemente mit ω_1 und ω_2 bezeichnet und die von ihnen erzeugte Periodengruppe mit L. (Dieser Buchstabe steht für *lattice*, das englische Wort für *Gitter*.) Das von ω_1 und ω_2 aufgespannte Parallelogramm, bestehend aus allen Punkten $\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ mit $0 \leq \lambda_i \leq 1$, heißt auch **Fundamentalbereich** $F(L)$ des Gitters. Meromorphe Funktionen, deren Periodengruppe L umfasst, heißen L-periodisch.

Der Fundamentalbereich $F(L)$ ist kompakt. Ist f ganz, insbesondere also stetig, so nimmt $|f|$ auf $F(L)$ Maximum und Minimum an. Wegen der Periodizität sind diese Extrema sogar global, also ist f beschränkt. Nach dem Satz von Liouville (Aussage 5 in Folgerung 3.7.4) muss f daher konstant sein. Also:

Satz 4.2.3 *Die einzigen ganzen elliptischen Funktionen sind die konstanten.*

Um interessante Einsichten erwarten zu dürfen, müssen wir uns deshalb bei elliptischen Funktionen mit Meromorphie begnügen. Die folgenden Sätze von Liouville fassen die wichtigsten Eigenschften L-periodischer Funktionen zusammen.

Satz 4.2.4 *Sei f eine L-periodische elliptische Funktion, seien a_i die Nullstellen und Pole von f in $F(L)$ und sei m_i die Ordnung von f bei a_i. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, dass die a_i nicht auf dem Rand von $F(L)$ liegen. (Andernfalls betrachte man ein geeignetes Translat $f(z+a)$ statt $f(z)$.)*

1. *Die Summe der Residuen von f in $F(L)$ verschwindet.*
2. $\sum m_i = 0$.
3. $\sum m_i a_i \in L$.

Beweis: (Skizze) Die erste Aussage ergibt sich aus dem Residuensatz, wonach lediglich zu zeigen ist, dass das Kurvenintegral über f um den Rand von $F(L)$ verschwindet. Dies ist aber der Fall, weil gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms wegen der Periodizität entgegengesetzte Beiträge liefern, welche sich also wegkürzen. Die zweite Aussage ergibt sich ähnlich, wobei statt über f über die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f}$ integriert wird. Für die dritte Aussage schließlich hat man ähnlich mit $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ zu argumentieren. □

Das prominenteste Beispiel einer elliptischen Funktion mit vorgegebenem L ist die **Weierstraß'sche $\mathcal{P}$-Funktion**

$$\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L^*} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

mit $L^* = L \setminus \{0\}$. Routinerechnungen zeigen, dass diese Reihe auf jeder zu L disjunkten kompakten Menge gleichmäßig konvergiert und eine L-periodische Funktion darstellt. Diese Funktion ist aber nicht nur ein einfaches Beispiel. In der Menge aller L-periodischen elliptischen Funktionen spielt sie eine wichtige Rolle, denn es gilt (ohne Beweis):

Satz 4.2.5 *Jede L-periodische Funktion lässt sich als gebrochen rationale Funktion von $\mathcal{P}_L$ und $\mathcal{P}'_L$ schreiben.*

Wir denken uns nun L festgehalten und bleiben deshalb traditionsgemäß bei der kürzeren Schreibweise $\mathcal{P}$ statt $\mathcal{P}_L$. Außerdem verwenden wir die Abkürzungen $s_m = \sum_{\omega \in L^*} \frac{1}{\omega^m}$, $g_2 = 60 s_4$ und $g_3 = 140 s_6$. Es lässt sich zeigen, dass das Polynom $4x^3 - g_2 x - g_3$ eine von 0 verschiedene Diskriminante $g_2^3 - 27 g_3^2$ hat, woraus folgt, dass seine Wurzeln e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden sind. Man kann nun zeigen, dass $\mathcal{P}$ die Differentialgleichung

$$\mathcal{P}'^2 = 4\mathcal{P}^3 - g_2 \mathcal{P} - g_3 = 4(\mathcal{P} - e_1)(\mathcal{P} - e_2)(\mathcal{P} - e_3)$$

erfüllt. Dieser Sachverhalt lässt sich auch so interpretieren, dass die Zuordnung $\gamma : F(L) \to \mathbb{C}^2$, $z \mapsto (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z))$ eine Parametrisierung der (komplexen!)

Kurve $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ mit $z \in F(L)$ (oder, eleganter, $z \in \mathbb{C}/L$) liefert. Solche Kurven heißen elliptisch, weil Integrale verwandter Funktionen bei der Berechnung des Umfanges einer Ellipse auftreten. Somit ist schlussendlich auch der Grund für die Bezeichnung *elliptische* Funktion angedeutet.

4.2.4 Gammafunktion und Stirling'sche Formel

Bereits aus der reellen Analysis ist bekannt, dass das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$$

für $z \geq 1$ eine Funktion, die sogenannte Gammafunktion definiert, welche $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ erfüllt. Daraus folgt unmittelbar $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Γ kann zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortgesetzt werden, welche ihre durchwegs einfachen Pole genau bei $z = 0, -1, -2, \ldots$ hat. Diese Zusammenhänge sowie die nachfolgenden Ausführungen mögen auch eine Vorahnung geben, warum die komplexe Analysis auch in der Kombinatorik und, wie der letzte Abschnitt zeigen wird, in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle spielt.

Die analytische Fortsetzung der Gammafunktion gelingt durch Aufspaltung des Integrationsbereichs in $[0,1]$ und $[1,\infty)$. Der unbeschränkte Bereich macht kein Problem, und für den beschränkten benutzt man die Beziehung

$$\int_0^1 e^{-t} t^z \frac{dt}{t} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!(z+n)},$$

welche sich durch Einsetzen der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion ergibt. Die Summe auf der rechten Seite konvergiert, sofern $-z$ keine natürliche Zahl ist, und stellt tatsächlich eine analytische Funktion dar. Sie kann daher als Definition von $\Gamma(z)$ verwendet werden.

Das Wachstumsverhalten von Γ wird durch die **Stirling'sche Formel** beschrieben. Die Schreibweise $f \sim g$ darin bedeutet $\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 1$:

$$\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}.$$

Ersetzt man die komplexe Variabel z durch die natürliche Variabel n, so lässt sich dies auch schreiben in der Form

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}.$$

Wir verzichten auf den Beweis der komplexen Fassung gänzlich. Für die reelle Fassung lässt sich auf knappem Raum wenigstens plausibel machen, welche Rolle die wichtige **Euler'sche Summenformel** spielt:

Satz 4.2.6 *Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\sum_{k=0}^n f(k) = \int_0^n f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(n) + f(0)) + \int_0^n P_1(t) f'(t)\,dt$$

mit der Sägezahnfunktion $P_1(t) = t - [t] - \frac{1}{2}$.

Übungsaufgabe 4.2.7 *Beweisen Sie die Eulersche Summenformel. Anleitung: Der elementare Beweis verwendet lediglich partielle Integration und geschickte Manipulationen von Summen (abelsche Summation).*

Lässt sich das letzte Integral in der Euler'schen Summenformel gut abschätzen, so erhält man sehr präzise Aussagen über den Fehler, den man macht, wenn man eine Summe durch ein Integral ersetzt (oder umgekehrt). Da das Integral über die Sägezahnfunktion $P_1(t)$ auf Intervallen mit ganzzahligen Endpunkten verschwindet, bestehen dann gute Chancen, wenn f' wenig schwankt.

Wegen $n! = e^{\sum_{k=1}^{n} \log k}$ lässt sich die Eulersche Summenformel mit $f(t) = \log(t+1)$ und $f'(t) = \frac{1}{t+1}$ anwenden, um zu einer Abschätzung der Größenordnung zu kommen, die zu einem Beweis der Stirling'schen Formel verfeinert werden kann.

4.2.5 Die Riemann'sche Zetafunktion und der Primzahlsatz

Wie viele Primzahlen gibt es? Diese zahlentheoretische Frage scheint nichts mit komplexen Zahlen zu tun zu haben. Tatsächlich lautet die einfachste Antwort auch schlicht *unendlich viele*. Das bekannte Argument war schon in der Antike bekannt (z.B. Euklid): Zu jeder endlichen Menge von Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ lässt sich die Zahl $n = \prod_{i=1}^{k} p_i + 1 > 1$ bilden. Diese Zahl ist durch kein p_i teilbar, muss aber dennoch einen Primteiler p besitzen. Also kann zu einer beliebigen endlichen Menge von Primzahlen eine weitere Primzahl p gefunden werden.

Man kann die ursprüngliche Frage aber präziser stellen. Man verwendet dazu die Funktion $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, welche die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $p \leq x$ zählt. Es ist also beispielsweise $\pi(10) = 4$, weil es die vier Primzahlen $2, 3, 5, 7 \leq 10$ gibt. Zählt man die Primzahlen bis 100 ab, erhält man $\pi(100) = 25$. Es liegt also nahe zu fragen, mit welcher Geschwindigkeit $\pi(x)$ für $x \to \infty$ gegen ∞ wächst. Diesbezüglich lassen sich aus Euklids Argument nur recht schwache Schlüsse ziehen.

Offenbar werden die Primzahlen in einem gewissen Sinn immer seltener, denn: Je größer eine Zahl n ist, desto mehr Primteiler kommen in Frage um n zu teilen. Wir wollen dieses Argument zur Aussage verschärfen, dass die Menge der Primzahlen Dichte 0 besitzt. Wir verwenden dazu die **Riemann'sche ζ-Funktion**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Offenbar konvergiert diese Reihe für $s > 1$. Euler beobachtete, dass diese Funktion die Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

besitzt, wobei der Laufindex p im Produkt sämtliche Primzahlen durchläuft. Zum Beweis beachte man, dass die einzelnen Faktoren rechts die Werte der geometrischen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}(p^{-s})^k$ sind. Bildet man das Produkt dieser Reihen zunächst über endlich viele $p = p_1, \ldots, p_K$, so erhält man jene Summanden $\frac{1}{n^s}$, wo sich n als Produkt von Potenzen dieser p_i schreiben lässt. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung tritt jedes n nur einmal auf. Im Grenzwert über alle p treten aber alle $n \in \mathbb{N}$ auf, also gilt die behauptete Identität.

Man beachte, dass wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ($s = 1$)

$$\zeta(s) \approx \int_1^{\infty} x^{-s}\, ds \to \infty \quad \text{für} \quad s \to 1$$

gilt. Wendet man dies auf obige Produktdarstellung an, so ergibt sich nicht nur abermals, dass es undlich viele Primzahlen gibt, sondern sogar so viele, dass das Produkt divergiert. Nach einem bekannten Satz aus der reellen Analysis über die Beziehung unendlicher Produkte und unendlicher Reihen folgt daraus:

Satz 4.2.8 *Die Reihe*

$$\sum_p \frac{1}{p}$$

der Kehrwerte sämtlicher Primzahlen p divergiert.

Wir haben über die Produktdarstellung also eine recht starke Aussage dahingehend erhalten, dass es in einem gewissen Sinn viele Primzahlen gibt, jedenfalls mehr als z.B. Quadratzahlen, deren Kehrwerte bekanntlich eine konvergente Reihe bilden. Nun aber zu dem Argument, welches gerade hieraus eine Folgerung in die umgekehrte Richtung beweist.

Satz 4.2.9

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

Beweis: Sei m das Produkt der ersten k Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$. Jedes der Intervalle zwischen Vielfachen jm und $(j+1)m$ repräsentiert ein vollständiges Restklassensystem modulo m. Abgesehen vom asymptotisch vernachlässigbaren Fall $j = 0$ können Primzahlen nur in den primen Restklassen liegen, deren Anzahl definitionsgemäß von der Eulerschen φ-Funktion gezählt wird. Bekanntlich ist φ multiplikativ, d.h. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, sofern a und b teilerfremd sind. Wegen $\varphi(p) = p - 1$ für jede Primzahl p folgt daraus $\varphi(m) = \prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$. Es folgt

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(m)}{m} = \frac{\prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)}{\prod_{i=1}^{k} p_i} = \prod_{i=1}^{k}(1 - p_i^{-1}).$$

Wegen der Divergenz des Euler'schen Produktes für $\zeta(1)$ konvergiert dieser Ausdruck für $k \to \infty$ gegen 0. □

Abzählungen von Primzahlen sowie vielleicht gewisse heuristische Überlegungen, auf die wir hier nicht näher eingehen, haben schon etwa um

1800 Gauß und Legendre zur präziseren Vermutung gebracht, dass sich $\pi(x)$ etwa wie $\frac{\log x}{x}$ verhält. Der erste Beweis für eine Aussage in diese Richtung gelang Mitte das 19. Jahrhunderts dem Russen Tschebyscheff, der zeigen konnte, dass mit geeigneten Konstanten $0 < c_1 < 1 < c_2$ für alle hinreichend großen x die Ungleichung $c_1 \frac{\log x}{x} < \pi(x) < c_2 \frac{\log x}{x}$ gilt. Der entscheidende Durchbruch gelang 1896 praktisch zeitgleich und unabhängig voneinander den beiden Franzosen Hadamard (1865-1962) und und de la Vallée-Poussin (1866-1962) mit dem Beweis des **Primzahlsatzes**:

Satz 4.2.10 *Für die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $p \leq x$ gilt*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \to \infty.$$

Der Beweis dieses Satzes sprengt deutlich den Rahmen der Vorlesung. Zu den Beweismethoden sei erwähnt, dass die beiden Franzosen auf Vorgängerarbeiten aufbauen konnten. Neben scharfsinnigen aber eher elementaren Einsichten von Tschebyscheff erwiesen sich vor allem Riemanns Ideen zur Zetafunktion als visionär. Er hatte gesehen, dass sich die ζ-Funktion holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen lässt mit der einzigen Ausnahme eines Pols an der Stelle $s = 1$. (Aus Tradition verwenden wir den Buchstaben s statt z für die komplexe Variable.) Zunächst formen wir um zu

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^2}) dx.$$

Man prüft ohne große Probleme nach, dass die letzte Summe für alle s mit positivem Realteil eine holomorphe Funktion darstellt. Für negativen Realteil lässt sich die Fortsetzung vermittels einer Funktionalgleichung definieren, auf die wir hier aber nicht näher eingehen wollen. Als besonders wichtig für die Primzahlverteilung erweist sich das Verhalten von ζ im sogenannten kritischen Streifen, wo der Realteil zwischen 0 und 1 liegt. Der Beweis des Primzahlsatzes verwendet Aussagen darüber, zum Beispiel über die Nullstellenfreiheit bei Realteil 1.

Alle Nullstellen von ζ, die man bisher im kritischen Streifen gefunden hat, haben Realteil $\frac{1}{2}$. Riemann hatte schon um die Mitte des 19. Jahrhunderts erkannt, dass noch weiter reichende und teilweise immer noch unbewiesene Folgerungen über die Verteilung der Primzahlen möglich wären, wenn der Nachweis gelänge, dass es keine anderen gibt.

Wer die folgende Frage, die sogenannte **Riemann'sche Vermutung** entscheiden kann, bekommt deshalb nicht nur ein *Sehr gut* in Funktionentheorie, sondern wird in der Mathematik garantiert weltweiten Ruhm ernten.

Übungsaufgabe 4.2.11 *Liegen sämtliche Nullstellen der ζ-Funktion mit Realteil zwischen 0 und 1 auf der Geraden mit Realteil $\frac{1}{2}$?*