Der Organismus der Mathematik

mikro-, makro- und mesoskopisch betrachtet

Reinhard Winkler

Zusammenfassung *Wesen und Wert der Mathematik — kennen wir sie wirklich, nur weil wir in der Mathematik forschen?* So lautete der Titel, unter dem ich meinen Vortrag bei der Tagung *Allgemeine Mathematik* im Dezember 2009 an der Universität Siegen ursprünglich angekündigt habe. Meine Antwort auf die Frage im Titel lautet, wenig überraschend, *nein*. Doch wer, wenn nicht einmal die mathematischen Forscher selbst, soll über ihren Forschungsgegenstand Bescheid wissen?

Im vorliegenden Artikel vergleiche ich die Mathematik mit einem Organismus, der mit einem makroskopischen Blick (auf die Teilgebiete der Mathematik und deren Entwicklung durch die Jahrhunderte und Jahrtausende) ebenso untersucht werden kann wie mit einem mikroskopischen (auf die axiomatische, logisch-deduktive Methode, nach der Mathematik auf der untersten, formalistischen Ebene voranschreitet). Beides wird von Historikern und Philosophen der Mathematik getan. Die Fachmathematiker selbst werden aber eher von Reizen angetrieben, die nur auf einer Ebene dazwischen, also mit einem mesoskopischen Blick wahrgenommen werden können. Naturgemäß erscheint auch mir diese Ebene besonders wichtig.

Ein organisches Bild der Mathematik strebt nach einem ausgewogenen Verhältnis dieser drei Betrachtungsweisen, die nicht strikt voneinander zu trennen sind. Geht eine verloren, so kommt es zu pathologischen Erscheinungen. Ich führe das für alle drei Ebenen aus, wobei selbst aktive mathematische Forschung nicht gegen Betriebsblindheit, vor allem auf makroskopischer Ebene, immun macht. Erfahrung in der mathematischen Forschung erweist sich also keineswegs als hinreichende Bedingung für ein umfassendes Verständnis, jedoch als kaum verzichtbar.

Gleichsam als Nebenprodukt meiner Betrachtungen ergeben sich Beiträge zu den Ausgangsfragen der Tagung und des vorliegenden Bandes. Diese Fragen betreffen verschiedene Facetten des Verstehens im mathematischen Kontext. Die Antwort auf die Frage, wie sich Mathematik als Ganzes verstehen lässt, inkludiert auch eine philosophische Haltung zur Mathematik, die ich als psychologischen Platonismus bezeichne und etwas eingehender beschreibe. Dabei handelt es sich um ein ganz bestimmtes Verhältnis von Objektivem und Subjektivem, wie es nicht nur die Mathematik kennzeichnet, sondern wie es die kognitiven Aspekte des Menschseins schlechthin bestimmt.

Inhalt

1 Ein weitverbreitetes Missverständnis (Käsemathematik)

Als Einstieg wähle ich folgenden Dialog zwischen einem Mathematiker (M) und einem Nichtmathematiker (N), wie ich ihn in dieser oder einer ähnlichen Variante schon unzählige Male erlebt habe:

N: Forschen in der Mathematik?! In der Mathematik ist doch schon alles bekannt! Kann man denn da überhaupt etwas Neues entdecken?

M: Sehr viel sogar; mehr denn je zuvor!

N: Darunter kann ich mir nichts vorstellen. Kann man das an einem Beispiel erklären?

M: In den 90er Jahren wurde der berühmte sogenannte *Große Fermat* bewiesen, dass es nämlich keine positiven ganzzahligen Lösungen der Gleichung $a^n + b^n = c^n$ mit $n \geq 3$ gibt.

N: Und wozu ist das gut?

M: Ist es nicht großartig, dass diese Behauptung, die Pierre de Fermat um die Mitte des 17. Jahrhunderts aufstellte, nach etwa 350 Jahren nun endlich bewiesen wurde? Seither hatten sich die größten Mathematiker vergebens an diesem Problem versucht. Und nun, in unserer Zeit, ist Andrew Wiles, teils zusammen mit Richard Taylor, doch eine Lösung gelungen. Es war bis zu diesem Zeitpunkt vielleicht das prominenteste offene mathematische Problem überhaupt. Aber es gibt noch andere ähnliche Beispiele, wie etwa die Poincarésche Vermutung. Doch die ist nicht so leicht zu erklären.

Meist enden ähnliche Gespräche über Mathematik etwa an diesem Punkt, ohne dass der Nichtmathematiker von der Sinnhaftigkeit mathematischer Forschung, ja mathematischer Tätigkeit generell überzeugt werden konnte. Ich glaube nicht, dass dem Laien Blindheit für die Großartigkeit unserer Wissenschaft vorzuwerfen ist, wenn hier keine befriedigendere Kommunikation zustande kommt. Ich sehe als Ursache eher ein stark verkürztes Bild von der Mathematik, welches auch Fachleute oft zeichnen, weil ihnen eine angemessenere Darstellung ihres Faches zu viel Mühe macht – und das obwohl Mathematik nur betreiben kann, wer geistige Mühen sonst keineswegs scheut. Ich will versuchen, den Ursachen dieses eigentümlichen Phänomens auf den Grund zu gehen.

Im Falle des obigen Dialogs über den Fermat-Wiles-Taylorschen Satz wird die Mathematik implizit als ein weitgehend homogener Block dargestellt, in dem sich – wie im Käse – hin und wieder erratische Löcher als Unbekanntes auftun, die zu füllen in manchen Fällen offenbar unglaublich schwierig ist. Die Heroen des Faches werden bei dieser Betrachtungsweise durch die Schwierigkeit der von ihnen gelösten Probleme definiert. Durch singuläre Gipfelleistungen, meist von Einzelkämpfern oder Kleingruppen, werden die Löcher im Käse nach und nach gestopft, und der Mathematik bleiben immer weniger offene Fragen zur Behandlung. Gegenwärtig fallen einem neben der bereits gelösten Poincaré-Vermutung vor allem die sechs weiteren Millenniumsprobleme ein (darunter die Riemannsche Vermutung und das P-NP–Problem), aber auch zahlentheoretische Klassiker wie die Goldbachsche Vermutung oder die Unendlichkeit der Primzahlzwillinge. Doch was bleibt, wenn irgendwann auch diese Fragen gelöst sind?

Natürlich wissen wir, dass dieses Bild der Mathematik ihrem Wesen nicht gerecht wird; und nicht nur der Gödelschen Sätze wegen, die ja garantieren, dass immer mathematische Fragen offen bleiben werden. Doch sind halbherzige Erklärungen wie der eingangs skizzierte Dialog schwer als positiver Gegenentwurf zur Käsemathematik einzustufen. Ein solcher sollte helfen beim Verstehen von Mathematik als Ganzer wie auch in der Vielfalt ihrer Teilaspekte. Das ist natürlich schwieriger, als einen vorliegenden Entwurf zu kritisieren oder gar zu karikieren, wie ich es oben getan habe. Dennoch will ich mich an einer Darstellung von Mathematik versuchen, die, wenn auch sicherlich nicht allen, so doch einigen interessanten Aspekten gerecht wird.

2 Drei Betrachtungsweisen der Mathematik

2.1 Der makroskopische Blick

Ich beginne mit einem Blick aus der Ferne, sowohl historisch als auch thematisch. Obwohl beachtliche mathematische Erkenntnisse schon aus älteren Epochen und aus den unterschiedlichsten Quellen hervorgehen, wird es für uns erstmals in der klassischen griechischen Antike spannend. Denker wie Pythagoras von Samos und Thales von Milet überschreiten mit ihren sehr stark philosophisch geleiteten Lehren und mathematischen Beiträgen für uns als erste die Schwelle zwischen sagenumwobenem Mythos und historisch abgesicherter Existenz. Mustergültig zusammengefasst wurden die Leistungen dieser Epoche im 3. Jh.v.Chr. von Euklid in seinem wirkungsmächtigen Lehrbuch, den *Elementen*. Deutlich zu unterscheiden sind darin die Gebiete Arithmetik und Geometrie. Jahrtausendelang galt Euklids Werk als verbindlich. In Europa kam es erst in der frühen Neuzeit zu Fortschritten, die wesentlich darüber hinausgingen. Descartes und seine Zeitgenossen stellten durch Einführung von Koordinatensystemen in der analytischen Geometrie eine Verbindung her zwischen der Geometrie einerseits und Algebra und Zahlentheorie andererseits. Etwas später revolutionierten Newton und Leibniz in ihrer Differential- und Integralrechnung diese Perspektive. Ihre systematische Untersuchung der unendlich kleinen Größen beschäftigte die nachfolgenden Generationen, allen voran Euler mit seiner *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748). Im darauffolgenden Jahrhundert schenkte der früh tragisch ums Leben gekommene Galois der Algebra völlig neue Visionen. Auch von ganz anderen Aufgabenstellungen kommend wuchsen der Mathematik neue Teilgebiete zu. Für wahrscheinlichkeitstheoretische Untersuchungen bedeutender Vorgänger aus mehreren Jahrhunderten schuf erst im 20. Jahrhundert Kolmogorov einen gemeinsamen Rahmen auf Basis der damals noch recht jungen Maßtheorie. Somit hatte endlich auch die Stochastik am Kern der traditionellen Mathematik angedockt. Zur vertiefenden Einsicht entstanden gänzlich neue Gebiete wie die Topologie, die sehr schnell sowohl mit der Geometrie, der Analysis (Funktionalanalysis) als auch mit der Algebra völlig neuartige und extrem fruchtbare Verbindungen einging. An den unterschiedlichsten Problemen in traditionellen Teilen der Mathematik hatte sich parallel dazu das Interesse an den Grundlagen der Mathematik entzündet. Die Beiträge von Boole, Cantor, Peano, Frege, Hilbert, Russell, Gödel und anderen wirkten auch auf die Philosophie sehr stark ein. Gleichzeitig erwiesen sich mathematische Logik und Mengenlehre als wertvoll für unterschiedliche Teilgebiete der Mathematik wie Algebra, Analysis, Kombinatorik, Topologie etc.

Mit diesen Reminiszenzen will ich nicht mit Wohlbekanntem langweilen. Ich möchte damit auf einen Aspekt aufmerksam machen, der überall deutlich ins Auge springt, sobald er einmal bewusst gemacht ist: Es sind nicht die Lösungen offener Probleme, die wir im großen Abstand als die entscheidenden Errungenschaften wahrnehmen. Es ist vielmehr das Wechselspiel zwischen dem Aufblitzen neuer, großer Ideen einerseits und deren Integration in den Korpus der bereits bestehenden Mathematik andererseits. Denn erst vermittels neuer Zu- und Übergänge zwischen vertrauten Bereichen werden neue Ressourcen und Kräfte entfesselt.

2.2 Der mikroskopische Blick

Doch lässt sich Mathematik in ihrer Besonderheit nicht allein durch großräumige Erzählungen aus ihrer Geschichte erfassen. Will man ihr gerecht werden, hat man sich auch jenem Spezifikum zuzuwenden, das sie am deutlichsten von anderen Wissenschaften unterscheidet. Und das ist die besondere Rolle der axiomatischen oder auch logisch-deduktiven Methode.

Natürlich mache ich es mir nicht zur Aufgabe, diese Methode hier ausführlich vorzustellen, wie das in Lehrbüchern der mathematischen Logik, insbesondere der Beweistheorie geschieht. Ihr Hauptergebnis, der Gödelsche Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe, verleiht der Mathematik generell eine Sonderstellung. Indem er garantiert, dass jede logisch zwingende Beweisführung auf einige wenige, klar definierte und elementare Schlussfiguren zurückgeführt werden kann, hat er gewissermaßen die Elementarkräfte der Mathematik identifiziert als jene logischen Prinzipien, mit deren Hilfe das gesamte mathematische Universum aufgebaut wird. Die Mathematik schafft es somit, ihre eigene Methode gleichzeitig zu ihrem Gegenstand zu machen, nämlich als Gegenstand der mathematischen Logik, eines ihrer Teilgebiete.

So sehr die Einzelerkenntnisse aus der mikroskopischen Perspektive auch beeindrucken (und gerade Philosophen würdigen üblicherweise diese Aspekte besonders), so missfällt eine zu mikroskopische Sichtweise wiederum vielen Fachmathematikern. Denn sie leistet einer Überformalisierung Vorschub, zu der manche von ihnen sich geradezu wie der sprichwörtliche Teufel zum Weihwasser stellen. Um diese Haltung nachvollziehbar zu machen, will ich nun eine Perspektive einnehmen, die zwischen der makro- und der mikroskopischen liegt und die gänzlich neuartige Strukturen erkennen lässt.

2.3 Der mesoskopische Blick

Es geht dabei um das, was Fachmathematikern am wichtigsten ist, weil es sie am unmittelbarsten betrifft. Vergleichbar dazu liegt die klassische Mechanik etwa auf halbem Weg zwischen Kosmologie und Elementarteilchenphysik, und im Gegensatz zu diesen beiden extremen makro- bzw. mikroskopischen Bereichen entspricht die Mechanik unseren aus der Alltagserfahrung gewonnenen Intuitionen von der Welt am ehesten.

Noch ein anderer Vergleich liegt nahe, nämlich der mit Kunst, z.B. mit Musik. Angesichts eines großen Werkes wie einer Oper oder einer Symphonie ist es auf der makroskopischen Ebene geradezu trivial, die Grobgliederung in Akte bzw. in Sätze wahrzunehmen, vielleicht auch noch in einzelne Szenen bzw. in Abschnitte wie Exposition, Durchführung etc. Auch bedarf es keiner umfassenden musikalischen Bildung, um in einer Partitur mikroskopische Elemente wie einzelne Noten und vielleicht noch die Tonart einzelner Akkorde zu identifizieren. Wenn ein Musikwerk als besonders herausragend empfunden wird, so liegt seine Wirkung aber kaum allein an der Zahl und Reihenfolge seiner Teile im Großen oder an der Häufung einzelner ganz besonders schräger Harmonien im Kleinen. Es liegt eher an der überzeugenden Art, wie Motive, musikalische Themen und generell die Teile in allen Größenmaßstäben sich zu einem Ganzen fügen, indem sie Bezüge zwischen vordergründig weit auseinanderliegenden Elementen herstellen. Solche Phänomene zu analysieren und auf den Punkt zu bringen, ist im konkreten Einzelfall meist eine sehr schwierige und anspruchsvolle Aufgabe. Erst an ihr zeigt sich tiefes Musikverständnis.

Anstatt nach allgemeinen Erklärungen zu suchen, will ich ein Beispiel für eine Parallele in der Mathematik bringen: den Begriff der Kompaktheit. In seiner klassischen Variante bezieht er sich auf die reelle Analysis und bezeichnet eine gewisse Eigenschaft von Mengen reeller Zahlen (in diesem Spezialfall sind es genau jene Teilmengen, die sowohl beschränkt als auch abgeschlossen sind). Kompakte Mengen dürfen zwar unendlich sein; als so wichtig erweisen sie sich aber deshalb, weil im Umgang mit ihnen mancherlei möglich ist, was man von endlichen Mengen gewohnt ist, nicht aber von beliebigen unendlichen.

Der Kern der Kompaktheit hat sich als ein topologischer herauskristallisiert. Aber nicht nur in Topologie und Funktionalanalysis tritt Kompaktheit prominent auf. Sie tut es in allen anderen Gebieten, die ich bisher erwähnt habe: In der Geometrie hat man es in der Mehrzahl der Fälle mit kompakten oder wenigstens lokalkompakten Objekten zu tun. Die Stochastik beruht auf Wahrscheinlichkeitsmaßen, deren σ-Additivität so gut wie immer mehr oder weniger offensichtlich Kompaktheit als (einen) tieferen Grund hat. In der Zahlentheorie und Algebra erweisen sich z.B. die p-adischen Zahlen und, allgemeiner, pro-endliche Strukturen nicht zuletzt deshalb als so nützlich, weil sie kompakt sind. In der unendlichen Kombinatorik lassen sich wesentliche Elemente der Ramseytheorie als Anwendung von Kompaktheit verstehen. Und in der mathematischen Logik spielt der sogenannte Kompaktheitssatz eine sehr wichtige Rolle im Zusammenhang mit dem bereits erwähnten Vollständigkeitssatz. Immer geht es bei der Kompaktheit um Übergänge zwischen endlich und unendlich, auch wenn diese in ganz unterschiedlichen Zusammenhängen und scheinbar weit auseinanderliegenden Teilgebieten auftreten. Dadurch entsteht eine auch ästhetisch sehr ansprechende Klammer über weite Teile der Mathematik hinweg.

Auch andere Beispiele ließen sich ausbreiten, wo sich in ähnlicher Weise eine Art Leitmotiv quer durch die Mathematik zieht. Ich nenne die Antagonismen diskret – kontinuierlich, algebraisch – geometrisch, Eigenschaft (Prädikat) – Objekt (Menge), formal – intuitiv oder Paradigmen, die in gewissen Teilgebieten ubiquitär hervortreten wie Randomisierung oder Diagonalisierung.

Zwar muss an dieser Stelle vieles Andeutung bleiben, doch geht es in allen Fällen um sehr grundlegende Ideen. Vielfältige Erscheinungsformen erweisen sich als Ausprägungen des immer wieder Gleichen: einer Idee als konstanter Größe im vielgestaltigen Wandel der mathematischen Objekte. Dies zu erkennen schafft jene Denkökonomie, die einen der wichtigsten Werte der Mathematik darstellt.

3 Mathematik als Organismus

3.1 Metapher

Will man dem Wesen der Mathematik gerecht werden, müssen jedenfalls die drei im vorangegangenen Abschnitt behandelten Gesichtspunkte samt ihren fließenden Übergängen berücksichtigt werden. Dabei entsteht das Bild eines Organismus, dessen Funktion auf einem klar definierbaren Kern an Gesetzmäßigkeiten basiert, welche die offizielle Methode der Mathematik definieren und gleichsam als die physikalischen und chemischen Grundlagen des Organismus wirken. Das war Gegenstand des mikroskopischen Blicks. Makroskopisch betrachtet besteht der Organismus aus Körperteilen, sprich Teilgebieten, zwischen denen unzählige Verbindungen in höchst komplexer, doch grundsätzlich weitgehend offensichtlicher Weise eine Einheit herstellen. Das eigentlich interessante Geschehen spielt sich aber, der mesoskopischen Ebene entsprechend, in einer Art Stoffwechsel der Ideen ab, der den gesamten Organismus durchzieht. Dies hat zur Folge, dass jeder Teil nicht nur auf seine jeweiligen makroskopischen Nachbarn wirkt, sondern – ähnlich dem Blutkreislauf – die Nährstoffe in Gestalt anpassungsfähiger Ideen überall hinbringt. Der Organismus ist gesund, wenn alle Systeme harmonisch ineinandergreifen.

Das Bild eines Organismus taucht auch in Bourbakis programmatischem Artikel[1] auf, dessen deutsche Übersetzung[2] den Titel *Die Architektur der Mathematik* trägt. Dieser Text erklärt die Sicht einer Gruppe führender Mathematiker des 20. Jahrhunderts auf ihre Wissenschaft und ist sicherlich einer der wichtigsten zum Wesen der modernen Mathematik. Der architektonische Blick betont eine Hierarchie fundamentaler mathematischer Strukturen. Im Vergleich dazu möchte ich mit der Metapher des Organismus die Aufmerksamkeit darauf lenken, dass Ideen sehr wandlungsfähig und flexibel sind. Um in einem neuen Umfeld zu wirken, müssen sie nicht erst durch ganze Hierarchien klettern. Das Assoziationsvermögen des Mathematikers arbeitet unmittelbarer. Damit soll aber keineswegs ein Widerspruch zu Bourbaki konstruiert, sondern lediglich das Bild um einen weiteren Aspekt ergänzt werden.

[1] [Bourbaki48]
[2] [Otte74]

3.2 Analyse

Nüchterner und weniger metaphorisch gesprochen, könnte man auch Gegenstand, Inhalt und Methode der Mathematik unterscheiden:

Gegenstand der Mathematik sind unsere Vorstellungen von den Begriffen, die in den verschiedenen Teilgebieten der Mathematik zutage treten. Diesen Gegenstand erfasst man am besten mit jenem Blick, den ich den makroskopischen genannt habe. Wie es die historische Rückschau auf die Entwicklung der mathematischen Teilgebiete gezeigt hat, ist dieser Gegenstand nicht a priori vorgegeben, sondern entfaltet sich im Laufe der Geschichte. Als Inhalt der Mathematik, also als Kern dessen, was im schöpferischen Prozess geschaffen und dann weiterentwickelt wird, möchte ich die mathematischen Ideen ansehen. Ich meine dies so, wie ich es als mesoskopischen Blick bezeichnet und an entsprechender Stelle am Beispiel der Kompaktheit erläutert habe. Die Methode der Mathematik schließlich habe ich bereits explizit angesprochen, und zwar im Kontext des mikroskopischen Blicks.

Von entscheidender Bedeutung sind die Wechselwirkungen zwischen diesen drei Aspekten und die dabei vonstatten gehenden Transformationen. Tritt zum Beispiel eine neue mathematische Idee auf, so muss sie zuallererst der mathematischen Methode zugänglich gemacht werden. Präzision im Begriff und Lückenlosigkeit in den Beweisführungen sind dabei für das Fortleben der Idee unerlässlich. Wir können diesen Vorgang auch als das Ineinandergreifen von meso- und mikroskopischer Ebene interpretieren. Hat die Idee auf solche Weise das Säuglingsalter überstanden, kann es sein, dass sie sich als ganz besonders tragfähig erweist. Im Extremfall kann sie Kristallisationspunkt eines neuen mathematischen Teilgebietes werden. Dies wäre eine Transformation von der meso- zur makroskopischen Ebene. Ideen können aber auch als neue Bindeglieder zwischen Teilgebieten in Erscheinung treten und somit den Zusammenhalt der Mathematik als Einheit stärken. In einigen Fällen kommt es sogar zu direkten Vermittlungen zwischen mikro- und makroskopischer Ebene. Als Beispiel bereits erwähnt wurde die mathematische Logik, insbesondere die Beweistheorie, wo die Methode der Mathematik zum Gegenstand wird.

3.3 Mathematischer Fortschritt

Egal ob man bei der Metapher vom Organismus der Mathematik an ein Individuum denkt oder an eine Spezies – interessant sind Entwicklung bzw. Evolution. In seiner Breite vollzieht sich mathematischer Fortschritt vorwiegend in Form allmählicher, kleiner, kollektiver Errungenschaften. Im Vergleich dazu selten kommt es zu plötzlichen, spektakulären Durchbrüchen, die Einzelpersonen zuzuschreiben sind. Selbst bei individuellen Pionierleistungen allerersten Ranges wie etwa jenen von Galois oder Gödel besteht kaum ein Zweifel daran, dass, hätten die beiden nie gelebt, ihre Einsichten sich uns trotzdem aufgetan hätten, wenn auch etwas später und nach ein paar zusätzlichen Irrwegen der Ideengeschichte. Die Entwicklung des mathematischen Organismus hätte also vielleicht kurzfristig etwas andere, weniger direkte Bahnen genommen. An der Tendenz zur Ausgewogenheit hätte das aber nichts geändert. Auf lange Sicht trachtet die Mathematik nämlich unmerklich, aber unablässig nach Klarheit und Einfachheit. Beispiele dafür gibt es auf elementarer Ebene (welch komplizierte Fallunterscheidungen bleiben uns etwa in der elementaren Algebra durch die Einbeziehung negativer Zahlen erspart!) wie auf fortgeschrittener (jedes moderne Lehrbuch ist voll von kurzen und übersichtlichen Beweisen von Resultaten, deren historisch erster Beweis so kompliziert war, dass er nur von den ersten Spezialisten der Epoche nachvollzogen werden konnte).

Entsprechend besteht die Arbeit des Mathematikers, sofern sie redlich betrieben wird, in einem beständigen Nachjustieren des Ideengeflechtes mit dem Ziel, die Ideen möglichst natürlich und überschaubar zur Geltung zu bringen. Keine geringere Rolle als Originalartikel aus der neuesten Forschung in Fachjournalen spielen dabei der Mathematikunterricht von der Grundschule bis zur universitären Lehre, vorzügliche Lehrbücher, die Erkenntnisse aus längeren Zeiträumen übersichtlich zusammenfassen, und sogar Initiativen zur Popularisierung. Überspitzt lässt sich sagen: Der Fortschritt in der Mathematik besteht in der allmählichen Trivialisierung von Kompliziertem. Wenn dies gelingt, so keineswegs nur durch neue Genieblitze, sondern vor allem dadurch, dass sich in der Mathematik langsam ein neuer Gesichtspunkt durchsetzt, weil er sich schlussendlich als der adäquate erweist. Oftmals fungiert ein solcher als verbindendes Element zwischen verschiedenen Teilgebieten, die an dieser Stelle besonders fruchtbar zusammenwirken. Mathematischer Fortschritt findet also keineswegs nur in Form pionierartiger Eroberung von Neuland statt, sondern viel häufiger in Form von Vernetzung und Vertiefung von bereits Bekanntem.

Zweifellos lassen sich ähnliche Phänomene nicht nur in der Mathematik ausmachen, sondern in allen Bereichen, wo es etwas zu verstehen gilt. Doch nur bei der Mathematik bestimmen sie ihr innerstes Wesen so tiefgreifend. Nicht immer jedoch findet Mathematik in der beschriebenen und idealtypischen Weise statt. Manchmal erkrankt ihr Organismus. Einher geht dies mit der Förderung von Zerrbildern. Diese können auf den verschiedenen Ebenen (mikro-, meso- und makroskopisch) entstehen. Das ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

4 Pathologie der Mathematik

4.1 Pathologie auf mikroskopischer Ebene (Nichtmathematik)

Auf mikroskopischer Ebene, d.h. was die mathematische Methode betrifft, lassen sich Missbildungen leicht benennen und explizieren. Denn, wie schon mehrmals betont, die Methode der Mathematik lässt sich als axiomatische, logisch-deduktive mit relativ überschaubarem Aufwand so explizit machen, wie es nur erwünscht ist. Worum es dabei im Wesentlichen geht, kann man durchaus verstehen, ohne einen Beweis des Gödelschen Vollständigkeitssatzes zu studieren. Wer hingegen dieses Wesentliche nicht verstanden hat, kann nicht Mathematik im eigentlichen Sinne betreiben. Nicht die detailverliebte Beherrschung eines formalen Systems ist dabei entscheidend, sondern die Einsicht in das Wesen folgerichtigen Schließens. Das sollte ein wichtiges Ziel im mathematischen Schulunterricht sein. Wenn es nicht erreicht wird, stellt sich die Frage, woran das liegt. Den wichtigsten Grund sehe ich in der weit verbreiteten Überbetonung einzelner, meist sehr spezieller Formalismen, je nach gerade aktuellem Stoffgebiet. Verbunden damit ist ein unzulässig eingeschränktes Bild von der mathematischen Methode. Beim Schüler entsteht nämlich der Eindruck, gewisse Regeln der Zeichenmanipulation seien die unumstößlichen Grundgesetze der Mathematik, nicht die universellen Regeln des logischen Schließens. Das geht so weit, dass Schüler und Studenten oft Unsicherheit äußern, wenn sie eine Aufgabe nicht in Form einer schematischen Rechnung gelöst haben, sondern, so wie es das Ziel der meisten sinnvollen Aufgabenstellungen ist, durch inhaltlich und logisch korrekte Argumentation. Da ich mich schon an früherer Stelle recht ausführlich mit der fragwürdigen Rolle des Formalismus im Mathematikunterricht befasst habe[3], will ich mein Augenmerk hier auf andere Aspekte richten. Zu diesem Zweck wechseln wir von der mikroskopischen zur mesoskopischen Betrachtungsweise.

4.2 Pathologie auf mesoskopischer Ebene (nurphilosophische Mathematik)

Wer sich wissenschaftstheoretisch mit Mathematik auseinandersetzt, verschafft sich vermutlich zuallererst Einblick in die Methode der Mathematik, macht sich also mit der mikroskopischen Ebene vertraut – um bei der Diktion aus Abschnitt 2 zu bleiben. Reich ist dabei die Ernte. Wer wäre auch nicht fasziniert

[3] [Winkler07a]

von den fundamentalen Beiträgen von Frege, Russell und Whitehead, Brouwer, dem Hilbertschen Programm und seiner Überwindung durch Gödels Unvollständigkeitssatz? Begleitet werden diese Errungenschaften z.B. auch noch von der Sprachphilosophie Wittgensteins sowie seinen Äußerungen zur Philosophie der Mathematik (worin man sich andererseits auch verlieren kann).

Übersehen wird dabei aber leicht, dass die Großbaustellen der Mathematik selbst schon lange nicht mehr diese Grundlagenfragen betreffen. Das tut der Tatsache keinen Abbruch, dass Mathematiker auch heute weiterhin große Leidenschaft für jene Aspekte ihrer Wissenschaft aufbringen, die auch philosophisch so viel zu bieten haben. Die Verlagerung der mathematischen Forschung ist aber ein unzweifelhaftes Indiz dafür, dass mittlerweile vieles geklärt ist und die Mathematik auch abseits ihrer logischen und philosophischen Grundlagenfragen vielfältige Reize zu bieten hat. Diese Vielfalt zur Kenntnis zu nehmen, ist Voraussetzung für ein abgerundetes Bild einer organischen Mathematik.

So wie die Kunsttheorie sich an der Kunst zu orientieren hat und nicht umgekehrt (der Künstler interessiert sich für die Kunsttheorie so wie der Vogel für die Ornithologie), muss die Philosophie der Mathematik vom Phänomen Mathematik ausgehen und kann Mathematik nicht eigenmächtig definieren. Unter den drei von mir beschriebenen Betrachtungsweisen der Mathematik ist die mesoskopische zweifellos die vielfältigste und deshalb für den Nichtmathematiker am schwierigsten nachvollziehbare. Entsprechend häufig begegnet man Einschätzungen der Mathematik, die von einem mikro- oder makroskopischen Übergewicht geprägt sind bei gleichzeitiger Vernachlässigung des Mesoskopischen.

Doch so wie es eine typische *déformation professionnelle* unter Philosophen ohne fachmathematische Erfahrung gibt – nämlich den mesoskopischen Blick zu vernachlässigen – fallen auch Mängel in der Reflexion der Mathematik auf, die unter Fachmathematikern weit verbreitet sind. Hierauf bezieht sich der folgende Unterabschnitt.

4.3 Pathologie auf makroskopischer Ebene (Randmathematik)

Der moderne Wissenschaftsbetrieb zwingt unter dem Vorwand von Zielen, die für sich genommen durchaus allgemeine Zustimmung verdienen mögen, die einzelnen Akteure sehr häufig zu einem Verhalten mit höchst fragwürdigen Auswirkungen auf das Gesamtsystem. Der erfrischenden Polemik[4] von Konrad

[4] [Liessmann06]

Paul Liessmann zu diesem und verwandten Themen ist auf allgemeiner Ebene wenig hinzuzufügen. Dennoch gibt es einige Aspekte, die aus mathematischer Sicht besonderere Aufmerksamkeit verdienen, weil sie erklären, inwiefern und warum mathematische Forscher häufig den makroskopischen Blick aus den Augen verlieren. U.a. hängt dies damit zusammen, dass die Mathematik offene Probleme in einer Präzision formulieren kann, die in anderen Disziplinen kaum vorkommt. Manche Probleme entfalten daher eine ganz besondere Prominenz. Folgt man der populären Unterscheidung zwischen Theorienbauern und Problemlösern, bevorzugt das eindeutig die Problemlöser. Theorienbauer vermitteln vorwiegend zwischen meso- und makroskopischer Ebene, Problemlöser zwischen meso- und mikroskopischer. Bei wirklich schwierigen und lange offenen Problemen scheint der Unterschied wenig relevant. So ist z.B. Andrew Wiles' Lösung des Fermatschen Problems nicht deshalb so großartig, weil wir nun wissen, dass wir ganze Zahlen a, b, c, n mit gewissen Eigenschaften nie finden werden, sondern weil Wiles viel großräumigere Zusammenhänge geklärt, gewissermaßen eine eigene Theorie gebaut hat. Folgender Vergleich mit der Literatur soll sinngemäß auf den Mathematiker Gian-Carlo Rota zurückgehen: Die vordringliche Aufgabe von Mathematikern besteht ebensowenig im Beweisen von Theoremen, wie Schriftsteller es nicht primär darauf anlegen, Sätze zu schreiben. Auf bescheidenerem Niveau jedoch lässt sich mit der Problemlöserei hervorragend ein selbstgenügsamer Publikationsbetrieb ankurbeln. Sehr spezielle Kleinprobleme werden von einem Kollegen in einer Arbeit gestellt, von einem anderen in einer anderen Arbeit für einen noch spezielleren Fall behandelt, in einer dritten Arbeit, die vielleicht wieder vom ersten Kollegen stammt, auch noch für eine Variante des speziellen Falls etc. Sehr überzeugende Gedanken zur fortschreitenden Aufspaltung mathematischer Teilgebiete finden sich gegen Ende eines bedeutenden Artikels von John von Neumann[5] (von dem es auch eine deutsche Übersetzung[6] gibt), in dem er das Verhältnis der Mathematik zur Empirie auf sehr differenzierte Weise erörtert.

Der Theorienbauer auch auf einem kleinen Gebiet findet eine andere Situation vor. Sein Bestreben ist es, ein übersichtliches und einheitliches Bild der Zusammenhänge zu entwerfen. Häufig wird sich herausstellen, dass eine organische Theorie aufgeht in bereits erforschten größeren Zusammenhängen, welche von der betriebsamen Gemeinschaft der Spezialisten jedoch geflissentlich ignoriert wird, um die ungestörte Lage des Gebietes am Rand der Mathematik nicht zu gefährden. Die Einsichten des Theorienbauers werden, sofern sie mangels Neuigkeitswertes überhaupt publiziert werden können, weniger zitiert, weil sie

[5] [von Neumann47]
[6] [Otte74]

einen Gegenstand abrunden, anstatt neue Probleme in die Welt zu setzen, an die andere anschließen könnten. Die Karriereaussichten für kleinräumige Theorienbauer sind also deutlich schlechter als für kleinräumige Problemlöser. Beide bringen die Weltmathematik nicht weiter. Die Theorienbauer halten immerhin die Tradition einer organischen Mathematik hoch, werden dafür aber kaum belohnt.

Ich will meine (relative) Vorliebe fürs Theorienbauen durch die Geschichte der Mathematik untermauern. Die Mehrzahl der allergrößten Mathematiker verdankt, auch dann wenn sie große Einzelresultate erzielten, ihren dauerhaften Ruhm den neuen Perspektiven, die sie geschaffen haben – sei es durch Erfindung ganzer Teilgebiete oder durch die Herstellung neuer, revolutionierender Zusammenhänge. Auch wenn sich zweifellos Ausnahmen dieser von mir behaupteten Tendenz finden lassen (Euler, der nicht zuletzt durch die Quantität seiner Einzelresultate wirkt, mag die prominenteste sein), so lade ich dazu ein, meine These anhand einer längeren Liste der größten Namen zu bedenken: Epochale Wirkung in der Mathematik basiert vorwiegend auf der Erschließung neuer Perspektiven; Einzelresultate sind nur ein Vehikel, um diese Perspektiven durchzusetzen. Selbst Gödel, dessen veröffentlichtes Opus sich im Wesentlichen auf ein paar spektakuläre Theoreme beschränkt, löste damit nicht nur offene Probleme, sondern eröffnete einen vollkommen neuen Blick auf die Grundlagen der Mathematik. Gleichzeitig bestätigt sich an diesem Beispiel nochmals besonders deutlich, dass sich der Unterschied zwischen Problemlösern und Theorienbauern mit zunehmendem Niveau immer mehr auflöst.

5 Konsequenzen für die Ausgangsfragen der Tagung

5.1 Was bedeutet es, einen mathematischen Sachverhalt zu verstehen?

Aus meinen Ausführungen ergeben sich sehr zwanglos Antworten auf diese wie auch auf die anderen Fragen, welche Ausgangspunkt für die Tagung *Allgemeine Mathematik* im Dezember 2009 an der Universität Siegen waren. Es geht beim Verstehen eines mathematischen Sachverhalts darum, einen möglichst umfassenden Kontext wahrzunehmen; in erster Linie auf makro- und mesoskopischer, unter Umständen aber auch auf mikroskopischer Ebene. Als Beispiel zur Illustration möge nochmals der Gödelsche Unvollständigkeitssatz dienen. Makroskopisch ragt zunächst seine Bedeutung für das Hilbertsche Programm heraus, indem er die Grenzen von dessen Durchführbarkeit aufzeigte. Seine Konsequenz, dass Wahrheit und formale Beweisbarkeit nicht dasselbe sind, ist sogar von großer philosophischer Tragweite. Wegen der extrem weitreichenden Gültigkeit der Unvollständigkeitsaussage strahlt der Satz aber auch auf einzelne Teile der Mathematik aus, auf einige sogar recht direkt. Mesoskopisch stechen Ideen wie Diagonalisierung (Lügnerparadoxon), Gödelisierung (Codierung von Formeln durch natürliche Zahlen) oder die Formalisierbarkeit des Beweisbarkeitsprädikates ins Auge. Wer es ganz genau wissen möchte, wird sich aber schließlich auch auf mikroskopischer Ebene darauf einlassen, wie die Gödelisierung in einem ganz konkreten formalen System funktioniert.

5.2 Wie entsteht Verstehen von Mathematik im Lernprozess?

Um Verstehen von Mathematik, wie ich es soeben umrissen habe, entstehen zu lassen, geht es um die Erschließung von Kontexten. Diese können sich natürlich nicht schlagartig in ihrer ganzen Komplexität offenbaren. Die drei Perspektiven (makro-, meso- und mikroskopisch) müssen dennoch in sinnvoller Weise Hand in Hand gehen. Z.B. kann die makroskopische Perspektive als Motivation dienen. Fragen, die sich daraus ergeben, können auf einer mesoskopischen Ebene greifbarer werden, bis sich auf mikroskopischer Ebene hinreichend konkrete Aufgaben finden lassen, an denen der Lernende sich eigenständig versuchen kann. Wahrscheinlich wird er, gemessen an einer umfassenderen Sicht, nur partielle Lösungen finden. Es ist aber wünschenswert, dass diese wieder auf die meso-, wenn nicht gar makroskopische Ebene hochgehoben und dort interpretiert werden, damit ein möglichst reicher Kontext entsteht. Der häufigste Fehler im real existierenden Schulunterricht besteht darin, dieses Hochheben zu vernachlässigen und sich mit der mikroskopischen Ebene zu begnügen, d.h. mit der vorwiegend formalen Abhandlung isoliert anmutender Aufgabentypen. An anderer Stelle[7] habe ich dies an einigen konkreten Beispielen illustriert.

5.3 (Wie) können wir Mathematikunterricht verstehen?

Einige den Mathematikunterricht betreffende Selbstverständlichkeiten erscheinen im Modell der Mathematik als Organismus und der drei Perspektiven in neuem Lichte. Mathematikunterricht soll eine Anleitung zu einer sinnvollen Route zwischen den drei Perspektiven sein. Die wohl schwerlich in ein Rezept zu gießende Kunst des Unterrichtens besteht in der feinen Balance zwischen zielführender Anleitung und stimulierendem Freiraum. Zu viel Anleitung

[7] [Winkler07a]

engt den Blick des Lernenden ein, zu viel Freiraum überlässt ihn der Orientierungslosigkeit. Es fällt auf, dass vor allem gegenüber begabten Schülern und Studenten der Vorsprung des Lehrenden oft vorwiegend auf der (mikroskopischen) Ebene der technischen Geläufigkeit liegt. Genuin mathematische Begabung zeigt sich aber vor allem auf der mesoskopischen Ebene. Bei gutem Unterricht gelingt es dort oft leichter, Verstehen zu fördern, das sich dann auch auf die anderen Ebenen fortpflanzen kann. Schwache Lehrer hingegen neigen dazu, auf der mikroskopischen Ebene zu verharren, um den dort vorhandenen Vorsprung, an dem die ganze fachliche Autorität hängt, nicht zu gefährden.

5.4 Wie lässt sich Mathematik als Ganzes verstehen?

In Abschnitt 3 habe ich die Mathematik mit einem Organismus verglichen, in dem mikro-, meso- und makroskopische Funktionen in ausgewogener Weise zusammenspielen. Um Wiederholungen zu vermeiden, will ich hier noch einen anderen Aspekt hinzufügen. Und zwar schlage ich eine philosophische Haltung vor, die ich psychologischen Platonismus nennen möchte. *Psychologisch* nenne ich ihn deshalb, weil ich die mathematischen Objekte weder empiristisch als unmittelbares Abbild der Wirklichkeit begreife, noch metaphysisch als ewig unveränderliche Entitäten im Sinne der Ideenlehre Platons. Für mich sind die mathematischen Objekte ans menschliche Bewusstsein gebunden und insofern psychologischer Natur. Dennoch haftet der Mathematik etwas an, was an Platons Vorstellung von den ewigen Ideen gemahnt. Und das ist das Empfinden des Mathematikers, trotz aller Freiheit in der Wahl seines Gegenstandes nicht vollkommen beliebig über seine Objekte verfügen zu können. Denn sind diese einmal etabliert, entwickeln sie eine unerbittliche Härte und Widerstandskraft, der nicht mehr mit Subjektivität beizukommen ist. Besonders beeindruckt dabei, wie problemlos die Kommunikation zwischen Mathematikern mit demselben Spezialgebiet gelingt. Äußerungen über einen höchst abstrakten, scheinbar fiktiven, jedoch gemeinsamen Gegenstand, die dem Außenstehenden völlig unverständlich anmuten, sind für den Kollegen so klar, als ginge es um eine alltägliche Mitteilung über Selbstverständliches. Wo, wenn nicht hier, ist der Begriff *Intersubjektivität* am Platze? Ich deute dieses Phänomen dahingehend, dass uns die Evolution, so wie mit Armen und Beinen, auch mit der Anlage zur Entfaltung eines gewissen Repertoires an Vorstellungen ausgestattet hat. Kaum einem Einzelnen gelingt es, all diese Vorstellungen auch tatsächlich zu entfalten. In der Mathematik jedoch kann man es damit weiter bringen als irgendwo sonst. Und die Beschäftigung mit formal (objektiv) übereinstimmenden Begriffen generiert auch übereinstimmende subjektive Vorstellungen und

Intuitionen. Die Platonische Welt der absoluten Ideen wird also zur Welt der im Menschen angelegten subjektiven Vorstellungen, die in der Mathematik präzisiert und systematisch nach ihren logischen Beziehungen untersucht werden.[8] Damit ist auch schon das Wichtigste zur letzten Frage gesagt:

5.5 Was trägt ein solches Verstehen zu menschlichem Verstehen allgemein bei?

Gewiss berührt die Mathematik nicht sämtliche Aspekte des Menschseins. Hinsichtlich der kognitiven Möglichkeiten unserer Spezies ist die Mathematik aber im höchsten Maße universell. In diesem Sinne bewährt sie sich also nicht nur als angewandte Mathematik bei der Bewältigung der Aufgaben, die in der Welt von außen auf uns zukommen. Als reine Mathematik gibt sie uns Aufschluss vor allem auch über den Menschen. In einer ganz gewissen Hinsicht geht sie dabei tiefer als andere Disziplinen. Ich darf dazu mit Nietzsche schließen. Zweifellos bringt man von den großen Philosophen gerade ihn kaum mit Mathematik in Verbindung. Waren doch das Künstlerische, Ästhetische, Moralische und Psychologische viel eher seine Themen als das Wissenschaftstheoretische oder gar Systematische. Umso bezeichnender ist das nachfolgende Zitat von ihm, zu dem es in einem früheren Band der vorliegenden Schriftenreihe in einem sehr empfehlenswerten Artikel[9] schon einmal Ausführlicheres zu lesen gab. Es handelt sich bei dem Zitat um Abschnitt 246 der *Fröhlichen Wissenschaft*:

Mathematik. – Wir wollen die Feinheit und Strenge der Mathematik in alle Wissenschaften hineintreiben, so weit dies nur irgend möglich ist, nicht im Glauben, dass wir auf diesem Wege die Dinge erkennen werden, sondern um damit unsere menschliche Relation zu den Dingen festzustellen. Die Mathematik ist nur das Mittel der allgemeinen und letzten Menschenkenntnis.[10]

Literatur

[Bourbaki48] N. Bourbaki: The architecture of mathematics. Amer. Math. Monthly 57.4, S. 221-232, 1950.

[Liessmann06] K. P. Liessmann: Theorie der Unbildung. Paul Zsolnay Verlag, Wien 2006.

[8] [Winkler07b]
[9] [Radbruch01]
[10] [Nietzsche80]

[von Neumann47] J. v. Neumann: The mathematician. In: J. von Neumann, Collected Works, Volume I. Pergamon Press, S. 1-9, 1961. Erstabdruck in: The works of the mind, S. 180-197. Hrsg: R.B. Heywood. University of Chicago Press, Chicago 1947.

[Nietzsche80] F. Nietzsche: Werke. Kritische Gesamtausgabe. Hrsg: G. Colli und M. Montinari. dtv – de Gruyter, München/Berlin/New York 1980.

[Otte74] M. Otte (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1974.

[Radbruch01] K. Radbruch: *Die Mathematik ist nur das Mittel der allgemeinen und letzten Menschenkenntniss* (Nietzsche). In: Mathematik und Mensch. Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft 2, S. 161-172. Hrsg: K. Lengnink, S. Prediger und F. Siebel. Mühltal Verlag Allg. Wiss.-HRW e.K., Darmstadt 2001.

[Winkler07a] R. Winkler: Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht. Didaktikhefte der ÖMG 39, S. 155-165. Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien 2007. Auch http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/.

[Winkler07b] R. Winkler: What is mathematics? – a subjective approach. In: The language of Sciences – ISSN 1971-1352. Polimetrica, Monza 2007. Deutsche Originalversion: Was ist Mathematik? – Ein subjektiver Zugang, http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/.