

Zentralmatura – quo vadis?

REINHARD WINKLER (TU WIEN)

Angesagte Katastrophen finden nicht immer statt. Obwohl die Nervosität bei einigen Betroffenen groß war, gab es beim ersten österreichweiten Haupttermin der neuen, zentralen Mathematikmatura im Mai 2015 nicht nur keine Pannen. Der allgemeine Tenor war, wenn auch nicht überall enthusiastisch, so doch durchaus positiv. Im Folgejahr gab es zwar hitzigere Debatten wegen der im Durchschnitt schlechteren Ergebnisse. Bei genauerer Betrachtung erkennt man aber, dass die neue Form der Matura im Vergleich zur bisherigen Vorteile aufweist, die es lohnen, ausgebaut zu werden. Ich möchte beträchtliche, noch bei Weitem nicht ausgeschöpfte und nur langfristig zu verwirklichende Potentiale der neuen Matura ansprechen und einige Überlegungen vorstellen, wie diese Potentiale verwirklicht werden könnten.

1. Einleitung

Noch kaum eine bildungspolitische Reform hat in der Öffentlichkeit so viel Aufmerksamkeit erregt wie die Umstellung zur sogenannten Zentralmatura.¹ Tatsächlich zieht die Umstellung des organisatorischen Rahmens auch tiefgreifende Veränderungen im Unterricht nach sich, die auch fachliche Inhalte betreffen, ja betreffen sollen.

Ich möchte hier nicht über das BHS-, sondern nur über das AHS-Projekt sprechen. An der ursprünglichen Konzeption war ich nicht beteiligt. Ich halte wesentliche Grundideen aber für sehr sinnvoll und habe bei der Entwicklung und Umsetzung an einigen Stellen mitarbeiten dürfen. Meine Einschätzung von Stärken und Problemen beruhen nicht zuletzt auf den dabei gewonnenen Erfahrungen und Einsichten.

Im vorliegenden Artikel werde ich zunächst den früheren mit dem aktuellen Zustand der Mathematikmatura vergleichen (Abschnitt 2). Einen nicht sehr umfangreichen, aber zentralen Teil (Abschnitt 3) nehmen Reflexionen über sinnvolle Ansprüche einer Prüfung generell ein. In Bezug auf die Mathematikmatura wird ein Blick auf sehr wichtige, in der Praxis aber leider oft vernachlässigte Teile des Lehrplanes (siehe Lehrplan (2016)) großartige Anknüpfungspunkte aufzeigen. Verbindet man sie mit inhaltlichen Nachbesserungen, die allein aus fachmathematischer Sicht dringlichst indiziert sind (Abschnitt 4), eröffnen sich beeindruckende Möglichkeiten zur sinnvollen Weiterentwicklung von Zentralmatura, Lehrplan und Unterricht generell. Schließen werde ich mit einem Ausblick und mit Gedanken zur organisatorischen Umsetzung (Abschnitt 5).

2. Von der Vergangenheit zur Gegenwart

Dieser Abschnitt beginnt mit Reminiszenzen an die Situation vor der Umstellung auf die zentrale Form der Matura (2.1). Der Vergleich mit den neuen Möglichkeiten fällt eindeutig zu deren Gunsten aus (2.2). Allerdings dürfen dabei gewisse, teils problematische Aspekte nicht übersehen werden: die Schwierigkeiten rund um die Aufgaben zum Teil II der schriftlichen Mathematikmatura (2.3), Risiken des geplanten Technologieeinsatzes (2.4) und die Notwendigkeit einer permanenten Revision (2.5).

2.1. „Früher war alles besser!“

Sehnsucht nach früheren Zuständen bleibt bei Veränderungen, die nicht nur die Oberfläche der Dinge berühren, selten aus. Es lohnt, darüber nachzudenken, welche vermeintlich oder tatsächlich bessere Vergangenheit der Mathematikmatura Objekt dieser Sehnsucht ist.

In meinem persönlichen Umfeld an der TU Wien, wo in fast allen Studienrichtungen einführende Mathematikvorlesungen für viele Studienanfänger eine beträchtliche erste Hürde darstellen, höre ich oft Klagen der Lehrenden über die immer geringere Vorbildung aus der Schule, die man voraussetzen könne. Bei

¹ Anstatt offizieller Bezeichnungen verwende ich für die große Abschlussprüfung an Allgemeinbildenden und Berufsbildenden Höheren Schulen durchgängig die in Österreich umgangssprachlich übliche Bezeichnung *Matura*.

Rückschlüssen auf die fachliche Qualität des Mathematikunterrichts sollte man aber bedenken, dass hier auch Faktoren eine Rolle spielen, die ganz andere, vorwiegend gesellschaftliche Ursachen haben.

Zum Beispiel haben sich Autoritätsverhältnisse generell verändert. Für Lehrerinnen und Lehrer ist es heute wesentlich schwieriger, Vorgaben schlicht durch Anordnung durchzusetzen. Das hat Vor- und Nachteile. Gerade auf die Mathematik bezogen ist es aber sogar wünschenswert, wenn im Unterricht zu kritischen Fragen nach dem Warum und Wozu, also nach Sinn und Zweck des zu Erlernenden ermuntert wird. Wer Mathematik unterrichtet, sollte nie um eine Antwort verlegen sein, auch wenn diese Antwort zum gegebenen Zeitpunkt nicht immer erschöpfend ausfallen kann. Eine offene Diskussionskultur ist jedenfalls einem Autoritätsverhältnis vorzuziehen, das ständig Gefahr läuft, bloß inhaltliche Leere zu überdecken. Und das war früher mit dem Drill von speziellen, teils in artifizierlicher Weise komplexen Aufgaben, auf die der Unterricht vorwiegend abzielte, der Fall. Aus der Erinnerung an meine eigene Schulzeit – und meine Klasse galt als mathematisch stark – kann ich bezeugen, dass die Mehrzahl der Schüler (in meinem Jahrgang gab es keine Mädchen) nicht wirklich verstanden, was sie taten. Was damals möglich war und heute wahrscheinlich nicht mehr, sind also kaum Tugenden, denen wir nachweinen müssen. Auch die gesellschaftliche Vielfalt – wie immer man sie generell bewerten möchte – stellt Lehrerinnen und Lehrer heute vor Herausforderungen, die noch vor einer Generation unbekannt waren. Wohl oder übel sollten wir uns damit abfinden, dass das gute, alte Gymnasium als bildungsbürgerlicher Sehnsuchtsort in unseren Köpfen einer zeitgemäßen Revision zu unterziehen ist.

Doch rufen wir uns die frühere Form der Matura selbst in Erinnerung. Zur Vorbereitung reichte es aus, im Unterricht sechs bis acht Aufgabentypen zu trainieren. Der Klassenlehrer stellte ein paar Aufgaben zusammen, und die Schulbehörde wählte davon vier aus. So konnten Überraschungen, auf die mit echtem Stoffverständnis oder gar mit Ansätzen selbständigen Denkens zu reagieren gewesen wäre, von vornherein ausgeschlossen werden. Brave Schüler bekamen gute Noten, weniger brave, sofern sie nicht mit rarer mathematischer Begabung gesegnet waren, weniger gute.

Die Auswirkungen so eines Systems sind leicht abzusehen: Das mit gutem Grund verrufene *teaching to the test* ohne Ambition auf ein tieferes Verständnis war weit verbreitete Praxis der früheren Maturavorbereitung. Das kann man den Unterrichtenden gar nicht zum Vorwurf machen. Denn die eigenen Klassen regelmäßig mit tendenziell schlechteren Noten abschneiden zu sehen als andere, wäre nur sadistisch veranlagten Menschen zuzumuten.

Eine wesentliche Schwäche der früheren Matura lag in dieser Einheit von Lehrer und Prüfer. Unweigerlich entstanden Potemkinsche Dörfer, wo als Fassade eine Komplexität mathematischen Wissens vorgetäuscht wurde, der keinerlei fachliche Substanz entsprach. Die Matura war ein Spektakel, das (von sehr wenigen speziell begabten Vorzeigeschülerinnen oder -schülern, die meist auch mündlich antraten, abgesehen) keinen mathematischen Standards folgte, sondern nur mehr solchen der Darbietung, die sich im Laufe der Jahrzehnte etabliert hatten. An die Stelle des Wesentlichen, das hin und wieder auch intellektuelle Ansprüche stellen darf, unter denen nur mehr brillieren kann, wer sich auch mathematisches Verständnis angeeignet hat, traten die seltsamsten Blüten. Beispiele dazu werden in Abschnitt 4 noch folgen.

Nach dieser kritischen, vielleicht sogar etwas polemischen Beschreibung früherer Zustände wollen wir fragen, ob durch die Umstellung auf die Zentralmatura eine Verbesserung in Sicht ist.

2.2. Die Zentralmatura ist gelungener als viele denken

Die Umstellung der Matura auf die neue zentrale Form trifft in der Öffentlichkeit durchaus überwiegend auf Akzeptanz, weil mehrere Vorzüge überzeugen. Vergleichbarkeit von Abschlussnoten zwischen verschiedenen Schulen und Klassen ist ebenso ein offensichtlicher Vorzug gegenüber früher wie die Definition gewisser Mindeststandards, an denen sich Universitätscurricula in Studienrichtungen mit Mathematik orientieren können. Weniger bekannt dürfte sein, dass der Zentralmatura in Mathematik auch inhaltlich ein interessantes und überzeugendes bildungstheoretisches Konzept zugrunde liegt, und zwar die Bildungstheorie von Roland Fischer, siehe Dangl-Fischer-Heugl (2009) oder auch Fischer (2000).

Als wesentliches Ziel einer Allgemeinbildung, wie sie auch in der Matura abgebildet sein soll, wird darin die Fähigkeit zur Kommunikation mit Experten und mit der Allgemeinheit genannt. Um zu fundierten Urteilen und Entscheidungen zu kommen, sind dazu vor allem fachliches Grund- und Reflexionswissen bzw. Reflexionsfähigkeit erforderlich. Diese zunächst noch recht allgemeine Zielvorgabe gilt es weiter zu konkretisieren.

Angesichts solch anspruchsvoller und höchst sinnvoller Aufgaben, vor denen wir stehen, ist es bedauerlich, dass die öffentliche Diskussion rund um die Zentralmatura oft von medial angefeuerten Aufregungen übertönt wird, die alles auf eine sehr banale Ebene reduzieren. Erinnern wir uns an die beiden ersten österreichweiten Haupttermine. Beim ersten im Mai 2015 konzentrierte sich die Aufregung auf Probleme in anderen Fächern, so dass das weitgehende Gelingen in Mathematik trotz geringfügiger organisatorischer Pannen an ein paar Schulen und vereinzelter Querschüsse eher unterging. Hin und wieder wurde kritisiert, der erste Termin sei zu leicht gewesen. Beim allerersten Mal ist das sicher zu verkraften. Beim zweiten Haupttermin waren dann zur Lösung um eine Spur mehr (ziemlich harmlose) Überlegungen erforderlich, die aber ein kleines bisschen Verständnis verlangten, das über bloß oberflächliche Beherrschung der Grundkompetenzen hinausging. Diese geringfügige Steigerung im Anspruchsniveau ist sinnvoll, sowohl in der qualitativen Ausrichtung wie auch in der Dosierung. Deshalb finde ich die Matura vom Mai 2016 insgesamt sogar noch besser gelungen als die vom Vorjahr. Doch war (vor allem vor der Kompensationsprüfung) der Prozentsatz negativer Prüfungen höher, was große Aufregung auslöste. Man konnte Kommentare (auch von Schülern) hören, die, wenn auch mit etwas anderen Worten, im Wesentlichen sagten: „Die Aufgaben waren andere als im Vorjahr. Bei manchen musste man sogar selbständig denken. Das finde ich unfair.“ Natürlich sollen nicht alle Aufgaben einer Matura selektiv sein. Denn auch mathematisch mäßig bis wenig Begabte müssen bei solider Vorbereitung eine faire Chance haben durchzukommen. In einer Note „Gut“ oder gar „Sehr Gut“ darf aber sehr wohl tieferes mathematisches Verständnis und somit vielleicht auch ein bisschen spezifische Begabung dokumentiert sein. Wichtig ist das Signal: Nicht die Reproduktion von Aufgaben aus vergangenen Jahren ist das Ziel der Mathematikmatura, sondern das Bemühen um echtes Verständnis. Das zu erzeugen sollte daher bei der Vorbereitung auf die Prüfung wie auch schon im Unterricht die beste Erfolgsstrategie sein.

Der insgesamt positive Befund darf nicht verdecken, dass es noch manches zu verbessern und weiterzuentwickeln gibt. Drei problematische Aspekte auf allgemeiner, d.h. nicht fachmathematischer Ebene sollen nun zur Sprache kommen: Teil II-Aufgaben, Technologieeinsatz und die Gefahr der Erstarrung. Dabei geht es nicht darum, bestimmten Personen oder Gruppen die Schuld an möglichen bisherigen Irrtümern oder Fehlern zuzuschreiben. Es geht schlicht um eine laufende Weiterentwicklung, und zwar in vollem Bewusstsein dafür, dass eine Systemumstellung vom Ausmaß jener auf die neue Form der Matura, wo so viele verschiedene Menschen, insbesondere die gesamte Lehrerschaft ihren Beitrag leisten, schwerlich von einem Tag auf den anderen den Idealzustand erreichen kann.

2.3. Problematische Teil II-Aufgaben

Der Grundgedanke im Maturakonzept mit einem Teil I und einem Teil II hat viel Überzeugendes. Teil I enthält ausschließlich recht schlichte Aufgaben, die jeweils durch eine Grundkompetenz aus dem Katalog (bifie (2013)) abgedeckt werden können. Das Abschneiden in diesem Teil I ist hauptverantwortlich dafür, ob eine Prüfung positiv oder negativ zu beurteilen ist. Dieser Teil I funktioniert schon ziemlich gut.

Im Gegensatz dazu sehe ich bei Teil II noch Probleme, auch wenn der Haupttermin 2016 durchaus gelungen war. Denn neben den mannigfachen Qualitätskriterien, denen auch schon Teil I-Aufgaben genügen müssen, kommen bei Teil II noch beträchtliche Komplikationen hinzu.

Gedacht ist im Teil II wohl an Aufgaben, wo verschiedene Grundkompetenzen zusammenspielen dürfen. Das wäre zweifellos ein sinnvolles Kriterium zur Unterscheidung der Noten „Sehr Gut“ bis „Genügend“. Leider weisen viele Aufgaben aber in die falsche Richtung. Ihre höhere Komplexität besteht in langen Texten, wo zuerst umfangreiche außermathematische Inhalte verarbeitet werden müssen, bevor die mathematische Problemstellung erfasst werden kann. Dabei nehme ich nicht an Texten als solchen Anstoß. Etwas später werde ich dem großen Gewicht, das Sprache auch in der Mathematik hat und folglich auch

bei einer Prüfung verdient, noch viel Beachtung schenken. Doch die Beschäftigung mit außermathematischen Komplikationen – so interessant sie auch sein mögen – sollte nicht einen Großteil der Zeit in Anspruch nehmen, die für eine schriftliche Maturaprüfung in Mathematik zur Verfügung steht. Im Gegensatz dazu gibt es eine genuin mathematische Komplexität, die Gegenstand einer Fachprüfung sein könnte. Diese in Prüfungsaufgaben angemessen abzubilden wäre eine interessante, aber schwierige Herausforderung. Denn es soll nicht übers Ziel hinausgeschossen werden, und die Unterrichtspraxis braucht Zeit, um sich auf Aufgaben mit neuartigen Ansprüchen einzustellen. Denn neuartig wären sie allemal. Ich erinnere mich noch an Maturaaufgaben, wie sie früher typisch waren, und wo eine nur scheinbare innermathematische Komplexität üblich war, wie beispielsweise Kombinationen aus Extremwertaufgaben mit Volumsberechnungen von Rotationskörpern, vielleicht noch angereichert durch das Schneiden geometrischer Objekte im dreidimensionalen Raum. Solche Aufgaben wurden nur deshalb auch von schwächeren Schülern leidlich bewältigt, weil die Bestandteile nach schematisch trainierbaren Verfahren gelöst werden konnten. Die Kombination dieser Bestandteile war artifiziell und nicht mehr (eher weniger) als ihre Summe. Sie brachte deshalb keinerlei inhaltliche Bereicherung.

Mathematisch befriedigende Teil II-Aufgaben in ausreichender Zahl bräuchten also substanzielle Innovation. Ich kann dafür noch keine gemeinsame Vision erkennen und bin nicht sicher, ob die Kapazitäten reichen. Ein immer wieder auftauchender alternativer Vorschlag besteht darin, den zentralen Teil der schriftlichen Matura auf Teil I-Aufgaben zu beschränken. Er und nur er möge über das Bestehen der Prüfung entscheiden. Für die Feinabstimmung der Note könnte man zur dezentralen Prüfung zurückkehren. Ich kann diesem Vorschlag einiges abgewinnen, sehe damit andererseits aber auch das große Potential des Projektes Zentralmatura für manche wünschenswerte Weiterentwicklungen (siehe Abschnitt 4) gefährdet. Jedenfalls zu wünschen ist eine breite und offene Diskussion darüber.

2.4. Problematischer Technologieeinsatz

Den schwersten Fehler im aktuellen Konzept der Mathematikmatura sehe ich im geplanten Einsatz des Computers, insbesondere von mathematischen Programmpaketen. Drei Aspekte sind zu unterscheiden: erstens das Proargument, der Computer solle im Unterricht eingesetzt werden, und das sei erfahrungsgemäß nur zu erreichen, wenn entsprechende Kompetenzen auch in der Prüfung verlangt würden; zweitens die Frage, ob durch Computereinsatz mehr sinnvolle Aufgaben ermöglicht oder verunmöglicht werden; und drittens, damit eng zusammenhängend, die Gefahr des Missbrauchs.

Zum ersten Aspekt ist zu fragen, welche Rolle der Computer im Mathematikunterricht spielt bzw. spielen soll. Soll er auf einen Alltag mit mathematischer Software vorbereiten? Es mag sein, dass auf Mobiltelefonen und ihren technologischen Nachfahren mathematische Programmpakete (bald) leicht untergebracht werden können. Dass sie von ihren Besitzern auch gewohnheitsmäßig verwendet werden, um knifflige mathematische Probleme, die ohne Software zu schwierig wären, kompetent zu lösen, halte ich aber für unrealistisch, um nicht zu sagen absurd. Nur eine relativ kleine Gruppe von Menschen verwendet Mathematik in solcher Weise, und das fast ausschließlich aus beruflichen Gründen. Daran wird auch technologischer Fortschritt wenig ändern. Die wertvollsten Früchte mathematischer Bildung sind weniger auffällig, weil sie sich nicht aufs Drücken von Knöpfen beziehen, sondern auf das Verstehen von Sachverhalten. Darauf hat auch die Mathematikmatura abzielen. Wenn Prüfungsaufgaben eine Schreibhandlung einfordern, so nur deshalb, weil das die sinnvollste Möglichkeit ist, Verständnis zu überprüfen, das sich ja im Bewusstsein des Einzelnen abspielt, welches schwer direkt zu beobachten ist. Computersoftware in einem allgemeinbildenden Unterricht hat folglich primär die Aufgabe, das Verständnis zu fördern und dient deshalb vorwiegend als didaktisches Hilfsmittel und nicht als eigenständiges Bildungsziel. Hieraus entsteht also ebenso wenig die Notwendigkeit, die Bedienung von Computersoftware zum Prüfungsinhalt zu erklären, wie das in anderen Fächern der Fall ist, wo zu Demonstrationzwecken vielleicht auch Computertechnologie eingesetzt wird. Auch das Argument, was nicht geprüft wird, werde nicht unterrichtet, überzeugt nicht. Denn der Einsatz als didaktisches Hilfsmittel des Lehrers unterscheidet sich stark vom Zweck, eine bestimmte Prüfungsaufgabe möglichst rasch zu lösen.

Wir kommen zur Abwägungsfrage, welche sinnvollen Prüfungsaufgaben durch den Computer ermöglicht, welche verunmöglicht und welche davon gar nicht berührt werden. Theoretisch ermöglicht werden vor allem solche Aufgaben, wo relativ viel Datenmaterial verarbeitet und/oder aufwendige Rechnungen durchgeführt werden müssen. Doch erstens ist es praktisch sehr schwierig, bei einer Prüfung große Datenmengen bereitzustellen. Und zweitens handelt es sich dabei tendenziell gerade nicht um solche Aufgaben, mit denen die laut Fischerscher Bildungstheorie angestrebte Kommunikationsfähigkeit mit Experten überprüft wird. Sinnvoll sind vor allem Aufgaben, wo mathematische Sachverhalte richtig erkannt und aus ihnen die richtigen Schlüsse gezogen werden müssen. Die Mehrzahl solcher Aufgaben verhalten sich in Bezug auf Computersoftware auf den ersten Blick relativ neutral. Auf den zweiten Blick sticht aber die Rasanz technologischer Entwicklung ins Auge. Es gibt Programme wie *WolframAlpha*, die bereits auf sehr rudimentäre Schlagworte als Eingabe Antworten vorschlagen, die mit großer Wahrscheinlichkeit die gesuchten sind. Es ist überhaupt nicht absehbar, wie die technologische Entwicklung auch in nur wenigen Jahren voranschreiten wird und welche Prüfungsaufgaben auf diese Weise obsolet werden. Diese Unsicherheiten wiegen viel schwerer als vereinzelte interessante Aufgaben, die nur mit Computer möglich sind. Die für den Computereinsatz negative Bilanz wird durch meine persönliche Erfahrung als Prüfer an der Universität noch verschärft. Auch wenn es zweifellos wesentlich leichter ist, eine schriftliche Prüfung zu einer eigenen Vorlesung zusammenzustellen, als für einen österreichweiten Maturatermin, so wage ich zu behaupten: Mit wohl überlegten und sorgfältig ausgearbeiteten Aufgaben ist bei schriftlichen Prüfungen sogar ohne Taschenrechner viel mehr Sinnvolles möglich, als man auf den ersten Blick vermuten würde. Doch hat man beim Zusammenstellen viel Zeit, Gedankenarbeit und organisatorischen Aufwand zu investieren. So wie bei der Zentralmatura mache auch ich nach einer Prüfung die Angaben über das Internet öffentlich. Zwar muss ich deshalb für jeden Termin neue Fragen zusammenstellen. Für die Studierenden sind die zahlreichen verfügbaren früheren Prüfungsangaben aber ein wesentliches Hilfsmittel zur Prüfungsvorbereitung, die zwar unvermeidlich ein „learning to the test“ ist, aber weitgehend frei von den negativen Effekten eines „teaching to the test“.

Im Zusammenhang mit den zahlreichen potentiellen Prüfungsaufgaben, die mit Softwareeinsatz durch den technologischen Fortschritt sehr schnell obsolet werden können, steht, wie schon erwähnt, die Gefahr des Missbrauchs bei der Prüfung. Schwindeleien bei der Matura wären natürlich nichts grundsätzlich Neues. Genauso wenig neu ist aber die Erfahrung, dass computerbegeisterte Schüler ihre diesbezüglich weniger ambitionierten Lehrer in der Virtuosität der Computerbedienung leicht ausstechen. Neue technische Möglichkeiten werden auch neuen Missbrauch generieren. Überdies können Unterschiede zwischen verschiedenen Programmpaketen bei der Prüfung ungleiche Bedingungen zur Folge haben.

Aus den beschriebenen Gründen halte ich den Plan, die Matura bald für (fast?) jede Computerunterstützung zu öffnen, für einen gravierenden Fehler. Über kurz oder lang wird man diesbezüglich zurück rudern müssen. ALLE Fachmathematiker, mit denen ich dieses Thema jemals besprochen habe, teilen meine Skepsis. Insbesondere gilt das für jene zahlreichen, die (im Gegensatz zu mir selber) gleichzeitig auch Computerfachleute sind.

2.5. Gefahr der Erstarrung

Sie ist kein Spezifikum des aktuellen Maturaprojektes, für dieses aber besonders virulent. Jede Prüfung, die starken Reglementierungen unterworfen ist, neigt zu starren Routinen, die zum Selbstzweck werden und nicht mehr dem ursprünglichen Bildungsauftrag entsprechen. Auch bei der früheren Form der Matura war das zu beobachten, obwohl viel mehr Autonomie beim einzelnen Lehrer lag. Zu sehr lockte die Versuchung, die Schülerinnen und Schüler auf einige wenige spezielle Rechenabläufe zu trainieren, von denen man sicher sein konnte, dass sie die Aufgaben eines Maturatermins weitgehend abdeckten.

Will man diese Gefahr vermeiden, muss das Projekt Zentralmatura permanent in Bewegung gehalten werden. Das heißt nicht, dass der Stoffumfang ad infinitum wachsen muss; schon allein deshalb, weil fachliche Entwicklungen an der Front der Mathematik selbst erfahrungsgemäß erst mit extremer zeitlicher Verzögerung bis in den Schulunterricht durchsickern. (Der allergrößte Teil des Schulstoffes ist älter als 300 Jahre.) Ich denke an einen fachlichen Rahmen, innerhalb dessen Lehrplan und Matura sich per-

manent bewegen ohne zu erstarren. Dieser Rahmen muss größer sein als der einem Jahrgang zumutbare Maturastoff, aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer aber gut überschaubar. In Teilen, die nicht zum permanenten verbindlichen Kernstoff gehören, könnte der Maturastoff von Jahr zu Jahr maßvoll variieren, wobei die konkrete Festlegung relativ kurzfristig (unverbindlicher Vorschlag: ein Jahr im Voraus) erfolgt. Aus Sicht der Lehrenden wäre die optimale Strategie dann, bis dahin so zu unterrichten, dass auf Spezifikationen des Stoffes (wie gesagt: innerhalb eines bekannten Rahmens) flexibel reagiert werden kann. So ein Unterricht müsste darauf bedacht sein, für unterschiedliche aufbauende Kapitel eine breite und tragfähige Basis zu schaffen.

Erstarrung kann am besten verhindert werden, indem man den Unterrichtenden die Verantwortung für eine sinnvolle Stoffauswahl und Gestaltung nicht gänzlich aus der Hand nimmt. Unveränderliche Kompetenzkanons hingegen kämen einer Entmündigung gleich, von der ich langfristig nichts Positives erwarte.

3. Anspruch und Wirklichkeit

Prüfungen sind nicht Selbstzweck, sondern sollen bestimmte Kenntnisse oder Fähigkeiten sicherstellen. Zum Erwerb derselben soll, wer zur Prüfung antritt, möglichst effizient motiviert werden. Da dieser Erwerb im Normalfall nicht bei der Prüfung selbst stattfindet, sondern in der Vorbereitung, geht es also darum, durch die Art der Prüfung Anreize für eine sinnvolle Vorbereitung zu bieten – für Lernende wie auch für Lehrende. Für die Mathematik bedeutet das: Je deutlicher die Prüfung signalisiert, dass sie am verlässlichsten mit echtem Verständnis bewältigt werden kann, desto redlicher werden sich alle (oder wenigstens jene, die begriffen haben, worum es geht) um echtes Verständnis bemühen.

Abgesehen von diesem Hauptzweck hat eine Prüfung noch weitere Funktionen. Ein Zeugnis über die Prüfung bezeugt gegenüber der Allgemeinheit gewisse Fähigkeiten des Absolventen bzw. der Absolventin. Schlussendlich schätzen auch die Lehrenden Prüfungsergebnisse als wertvolle Information über den Erfolg ihres Wirkens. Auch diese Funktionen einer Prüfung sind dann am besten gewährleistet, wenn der oben beschriebene Hauptzweck möglichst gut erreicht ist.

Eine zentrale Prüfung enthebt überdies die Lehrenden der manchmal zwar bequemen, aber sicher nicht wünschenswerten Schizophrenie, gleichzeitig auch als Prüfer zu fungieren. Nicht nur sagt ein Prüfungsergebnis wesentlich mehr über den Lernerfolg aus, wenn der Lehrende die Prüfungsfragen selbst nicht kannte. Darüber hinaus haben Lehrer und Schüler dann wirklich ein und dasselbe Ziel, nämlich bei der Prüfung möglichst gut abzuschneiden. Aus dieser natürlichen Allianz sollten sich positive Impulse auch für den Unterricht gewinnen lassen.

Trotzdem erweisen sich die Ansprüche an die Gestaltung einer zentralen Prüfung als besonders komplex. Wer irgendwann am Projekt Zentralmatura mitgearbeitet hat, wird das bestätigen. Konstruktive Kritik muss das im Auge behalten und darf nicht einzelne Unvollkommenheiten zum Skandal aufblasen, als wäre das Projekt dadurch insgesamt gescheitert. Führen wir uns die enormen Ansprüche, die man stellen kann (und soll!), doch etwas genauer vor Augen!

Vor uns liegt ein weites Spektrum zwischen sehr allgemeinen Bildungsidealen der Fischerschen Theorie auf der einen und konkreten, teils elementaren, manchmal sogar banalen Prüfungsaufgaben auf der anderen Seite. Dazwischen liegen der Lehrplan mit allgemeinen Zielen und konkreter Semestrierung des Stoffes, der Kompetenzkatalog und alles, was sonst noch im Unterricht eine Rolle spielt, schematisch:

Bildungstheorie – Lehrplan allgemein – Semestrierung – Kompetenzkatalog – Maturaaufgaben

Bei etwas näherer Betrachtung fällt auf, dass der wirklich große Bruch zwischen hehren Idealen und Unterrichtspraxis quer durch den Lehrplan verläuft. In der Präambel ziemlich zu Beginn ist von sechs Aspekten der Mathematik die Rede. Ich zitiere wörtlich:

1. *Schöpferisch-kreativer Aspekt*: Mathematik ist eine Schulung des Denkens, in der Strategien aufgebaut, Phantasie angeregt und Kreativität gefördert werden.
2. *Sprachlicher Aspekt*: Mathematik ist ein elaboriertes Begriffsnetz, ein ständiges Bemühen um exakten Ausdruck, indem die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen entwickelt sowie die sprachliche Ausdrucksfähigkeit gefördert werden. Das Verwenden von Symbolen bildet dabei eine Basis für exaktes Formulieren und Arbeiten.
3. *Erkenntnistheoretischer Aspekt*: Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt. Sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen. Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.
4. *Pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt*: Mathematik ist ein nützliches Werkzeug und Methodenreservoir für viele Disziplinen und Voraussetzung für viele Studien und Berufsfelder.
5. *Autonomer Aspekt*: Mathematische Gegenstände und Sachverhalte bilden als geistige Schöpfungen eine deduktiv geordnete Welt eigener Art, in der Aussagen – von festgelegten Prämissen ausgehend – stringent abgeleitet werden können. Mathematik befähigt damit, dem eigenen Denken mehr zu vertrauen als fremden Meinungsmachern, und fördert so den demokratischen Prozess.
6. *Kulturell-historischer Aspekt*: Die maßgebliche Rolle mathematischer Erkenntnisse und Leistungen in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens macht Mathematik zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Allgemeinbildung.

Überzeugender geht es kaum! Für mich als Mathematiker sind alle sechs Aspekte von essenzieller Bedeutung für mein Bild von Mathematik; und umgekehrt wird das allermeiste, was mir an Mathematik wichtig ist, in diesen sechs Aspekten auch angesprochen. Überdies entsprechen sie durchwegs dem Fischerschen Anliegen der Kommunikationsfähigkeit mit Experten. Denn wie sollte man mathematische Expertisen ohne Bewusstsein für die wesentlichen Aspekte der Disziplin richtig einordnen und reflektieren? Dem Autor dieser Passage des Lehrplans gebührt deshalb allerhöchste Anerkennung! Dennoch müssen wir uns der Frage stellen: Was von diesen sechs Aspekten der Mathematik kommt im Schulunterricht zur Geltung?

Man frage selbst hochgebildete Menschen nach ihrem Mathematikbild. Wer es nicht auf universitärem Niveau erweitern durfte und von Schulunterricht und Matura als jüngster Erinnerung geprägt ist, wird wahrscheinlich bestenfalls den pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekt plausibel finden, und selbst das kaum aus eigener verständiger Erfahrung. Alle anderen Aspekte wird er bzw. sie vermutlich überhaupt nicht sinnvoll mit Mathematik in Verbindung bringen können. Und selbst der Lehrplan gibt dazu keine konkretere Auskunft. Das liegt nicht zuletzt daran, dass eine inhaltliche Konkretisierung allgemeiner Bildungsziele alles andere als trivial ist. Doch ist sie möglich!

4. Konkrete mathematische Beispiele im Licht allgemeiner Bildungsziele

In diesem Abschnitt greife ich vier Beispiele fachmathematischer Schwächen in Unterrichtspraxis, Lehrplan und/oder Grundkompetenzkatalog auf, wo Verbesserungen gleichzeitig auch den Aspekten der Mathematik aus dem allgemeinen Teil des Lehrplans gerecht würden. (Von den sechs Aspekten scheint mir lediglich der schöpferisch-kreative – so wichtig er als Bildungsziel auch ist – schwer in einer Prüfung wie der Matura abzubilden.) Die nötigen Revisionen werden durch geringfügige Korrekturen oder Ergänzungen des aktuellen Lehrplans bzw. Kompetenzkatalogs allerdings kaum zu bewerkstelligen sein. Sie bedürfen einiger Begleitmaßnahmen, die ich erst in Abschnitt 5 ansprechen werde.

Hier behandle ich konkret in 4.1 die aktuelle Stoffgliederung, insbesondere die problematische Rolle des Inhaltsbereichs Funktionale Abhängigkeiten, in 4.2 die Potentiale mathematischer Grundlagen und Sprache, in 4.3 den Grenzwertbegriff mit seinen zahlreichen Facetten und in 4.4 das Problemfeld der Stochastik im Schulunterricht.

4.1. Gliederung und Querverbindungen

Im Grundkompetenzkatalog wird der gesamte Stoff in die vier Inhaltsbereiche Algebra und Geometrie (AG), Funktionale Abhängigkeiten (FA), Analysis (AN) und Wahrscheinlichkeit und Statistik (WS) gegliedert. Das Kuriosum dabei sind die Funktionalen Abhängigkeiten FA. Denn diese durchziehen die gesamte Mathematik und sind im Gegensatz zu den anderen drei Inhaltsbereichen keinesfalls als Teilgebiet der Mathematik aufzufassen, sondern als gemeinsamer sehr grundlegender Begriff.

An einer unglücklichen Gliederung allein wäre vielleicht noch nicht Anstoß zu nehmen. Sie zeitigt aber mehrere seltsame Blüten. So wird selbst der titelgebende Begriff der Funktion (oder, formal gleichbedeutend, Abbildung) äußerst stiefmütterlich behandelt. Zwar gibt es die wichtige Grundkompetenz FA 1.1: *Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann.* Aufgaben dazu sind aber äußerst rar. Ein Grund dafür ist schnell identifiziert: Im Schulstoff fehlt ein begrifflicher Rahmen, innerhalb dessen sich funktionsähnliche Objekte beschreiben lassen. So einen Rahmen böte der Begriff der Relation. Informell gesprochen handelt es sich dabei um irgendeine Zuordnung zwischen Elementen a einer Menge A und Elementen b einer Menge B . Anstatt lange um den heißen Brei herumzureden, könnte man aber schon in der Schule die übliche Definition lehren: *Eine Relation R (zwischen den Mengen A und B) ist eine Teilmenge von $A \times B$, dem kartesischen Produkt von A und B (dessen Elemente definitionsgemäß genau alle geordneten Paaren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ sind). Liegt ein Paar (a, b) in R , so sagt man, a stehe zu b in der Relation R .* Steht diese Definition zur Verfügung, lässt sich viel klarer verstehen, was eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist, nämlich *eine Relation zwischen den Mengen A und B derart, dass zu jedem $a \in A$ genau (also nicht mehr und nicht weniger als) ein $b \in B$ in der Relation f steht. Für dieses eindeutige b schreibt man $b = f(a)$.*

Lehrte man auch noch die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv und Umkehrfunktion explizit (peinliche Lücken angesichts von Wurzel- und Logarithmusfunktion!), so ließe sich noch deutlicher herausarbeiten, worauf es bei einer Funktion ankommt. Ein bisschen Begrifflichkeit ist also keineswegs nur eine Belastung des Lehrplans, sondern eine wesentliche Hilfe für das Verständnis von Mathematik. Auch im Schulunterricht wäre das kein Luxus. Im sprachlichen Aspekt aus dem allgemeinen Teil des Lehrplans wird ziemlich genau das verlangt. Überdies ist die mengentheoretische Modellierung ein hervorragendes Beispiel für Abstraktion, wie sie im erkenntnistheoretischen Aspekt vorkommt (siehe auch Winkler (2009/10)). Die Vernachlässigung des Funktionsbegriffs wird uns übrigens in 4.4 zum Inhaltsbereich WS nochmals beschäftigen.

Noch eine generelle Bemerkung zur Gliederung des Stoffes: In der Mathematik sind Querverbindungen nicht nur Gerüst sondern Substanz. Deshalb haftet jeder Gliederung eines größeren Stoffgebietes, so unvermeidlich sie auch sein mag, etwas Willkürliches an. Folglich haben Querverbindungen besonderes Gewicht. Beispiel: Die verschiedenen Vorkommnisse der Winkelfunktionen in den Inhaltsbereichen AG, FA und AN sollten deutlich zueinander in Beziehung gesetzt werden. Auch zu WS wäre zwanglos ein Bezug herzustellen, wenn man beispielsweise das Buffonsche Nadelproblem als klassisches Beispiel zu stetigen Verteilungen behandelte. Wichtige Einsicht: In der Mathematik steht fast alles auf die eine oder andere Weise miteinander in Verbindung.

Querverbindungen dienen überdies dazu, die historische Entfaltung mathematischer Teilgebiete und Beziehungen auch zu anderen Disziplinen zu illustrieren. Man denke an die prominente Rolle der Mathematik in der antiken griechischen Philosophie; an das Galileische Paradigma von der Mathematisierung der Physik, das bei Newton einen ersten Höhepunkt erreichte; an das neue Licht, das Cantors Mengenlehre (warum nicht im Schulunterricht über die Abzählbarkeit von \mathbb{Q} und die Überabzählbarkeit von \mathbb{R} sprechen?) und die folgenden Grundlagenrevolutionen in der Mathematik auf uralte Diskussionen über Unendlichkeit und generell auf Erkenntnistheorie werfen; an die Riemannsche Geometrie als Rahmen für Einsteins Relativitätstheorie; an stochastische Methoden bei der DNA-Analyse samt ihren Konsequenzen für die Biologie und darüber hinaus und vieles andere mehr. Ohne tief in die oft viel zu komplizierten technischen Details eintauchen zu müssen, ließen sich im Mathematikunterricht also schon allein durch die Verdeutlichung inner- und außermathematischer Bezüge wesentliche Beiträge zum „kulturell-historischen“ wie auch zum „pragmatisch-anwendungsorientierten Aspekt“ leisten.

Noch nicht explizit angesprochen wurde der „autonome Aspekt“. Doch nicht, weil er so schwer zu erläutern ist, sondern eher umgekehrt. Indem er die deduktive Methode betrifft, durchzieht er die gesamte Mathematik und kann als Querschnittsthema fast an beliebiger Stelle thematisiert werden; je nach Geschmack und Laune von Lehrenden und Lernenden.

4.2. Grundlagen und Sprache

Wer an der Universität Studienanfänger unterrichtet, dem springt ein weit verbreitetes Defizit besonders ins Auge: mangelnde sprachliche Ausdrucksfähigkeit auch dort, wo dem Sprecher intuitiv alles klar erscheint. Die unerwünschten Auswirkungen dieses Defizits reichen weit über die Wissenschaft hinaus. Anscheinend hat es das öffentliche Bewusstsein noch nicht einmal wahrgenommen. Doch neben dem Unterricht in der Muttersprache kann vor allem der in Mathematik diesbezüglich besonders Wertvolles leisten. Denn die klaren Begriffe und eindeutigen Aussagen der Mathematik liefern geradezu unbeschränktes Lehr- und Übungsmaterial.

Man lernt sprachliche Genauigkeit am besten anhand von Beispielen, die inhaltlich bereits vertraut sind. Dann hinterlässt der Aha-Effekt, der zwischen der noch vagen Beschreibung einer intuitiven Vorstellung und ihrer Präzisierung liegt, den tiefsten Eindruck. Als Beispiel wähle ich hier das System \mathbb{N} der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \dots$. Schon früh eignen sich Kinder das Gefühl an, sehr genau zu wissen, was damit gemeint ist. Fragt man nach einer präzisen Erklärung, wäre eine befriedigende Antwort aber selbst von Erwachsenen eine große Überraschung. Das liegt nicht an deren Dummheit, sondern am hohen intellektuellen Anspruch einer solchen Frage. Nicht umsonst sind Schlagworte wie Peano-Axiome oder das mengentheoretische Modell von John von Neumann mit berühmten Namen verbunden.² Die Peano-Axiome fassen in fünf (kurzen) Aussagen die wesentlichen Eigenschaften von \mathbb{N} als System zusammen, während John von Neumann jede einzelne natürliche Zahl auf sehr elegante Weise als Menge interpretiert. In Winkler (2007/08) findet sich mehr darüber. Jetzt begnüge ich mich mit einer kurzen Rekapitulation der Peano-Axiome zu unserem Zweck. Sie lauten, hier rein verbal und ohne mathematische Symbolsprache formuliert:

1. Null ist eine natürliche Zahl.³
2. Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
3. Null ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
5. Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die Null und mit jeder Zahl auch deren Nachfolger, so enthält sie alle natürlichen Zahlen. (Induktionsprinzip)

Interpretiert man $n + 1$ als Nachfolger von n , so sind erstens alle fünf Aussagen wahr. (Das ist fast trivial.) Zweitens kann man ersatzlos auf keine von ihnen verzichten, ohne wesentliche Information zu verlieren. Drittens, und das ist der entscheidende Punkt, bestimmen alle fünf Aussagen gemeinsam das System \mathbb{N} eindeutig, d.h. je zwei Strukturen mit diesen Eigenschaften sind zueinander isomorph. Somit bilden die Peano-Axiome eine Beschreibung von \mathbb{N} , wie sie konziser kaum vorstellbar ist.

Die Fähigkeit, Gedanken möglichst klar in Worte zu fassen, muss eines der wichtigsten Bildungsziele sein. In den meisten Fällen ist eine Erfolgskontrolle sehr schwierig. Denn sie erfordert den Vergleich von Gedanken und Worten. Die Beschreibung von \mathbb{N} durch die Peano-Axiome ist ein sehr überzeugendes Beispiel dafür, dass die Mathematik dafür besonders gut geeignet ist. Auch wenn man Wittgensteins berühmtes Diktum, wonach sich alles Sagbare auch klar sagen lasse, nicht in allen Lebensbereichen uneingeschränkt anerkennt, so lehrt die Mathematik: Es lohnt, sich um klaren sprachlichen Ausdruck zu bemühen; denn es ist viel mehr möglich, als Ungeübte auf den ersten Blick glauben würden. Außerdem

² Giuseppe Peano (1858-1932), John von Neumann (1903-1957)

³ Peano begann bei der Eins statt bei der Null. Ich folge hier aber den meist zweckmäßigeren modernen Usancen.

verfeinert sprachliche Präzisierung das begriffliche Unterscheidungsvermögen und somit das Denken generell.

4.3. Der Grenzwertbegriff

Für große Teile der Mathematik ist der Begriff des Grenzwertes der zentrale schlechthin. Denn er ist, wie sich erst im 19. Jahrhundert klar herauskristallisierte, der Kern der im Wesentlichen von Leibniz und Newton⁴ begründeten Infinitesimalrechnung, jenes Teils der Mathematik, in dem gewissermaßen das unendlich Kleine gezähmt wird. Auf ihr fußen Mathematisierung der Physik ebenso wie viele Teilgebiete der reinen und angewandten Mathematik inklusive der modernen Stochastik. Auch für den Schulstoff ist der Grenzwert von Folgen, Reihen, Funktionen (im Zusammenhang mit Stetigkeit), Differenzenquotienten (Differentialquotient, Ableitung) sowie von Ober- und Untersummen (Integral) von zentraler Bedeutung. Umso bedauerlicher ist es, dass sich eine präzise Definition nicht als selbstverständlicher Teil des Schulstoffes etabliert hat. Noch dazu lässt sich die Definition, hier für einen Folggrenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, äußerst kurz fassen. Als Formel:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

Verbal ohne Symbolsprache: *Egal wie klein eine (positive) Fehlertoleranz vorgegeben ist; für alle hinreichend späten Folgglieder liegt die Abweichung vom Grenzwert innerhalb dieser vorgegebenen Toleranz.* Oder, vielleicht noch griffiger: *In jeder noch so kleinen Umgebung des Grenzwertes liegen fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgglieder.*

Zugegeben, diese Definition ist anspruchsvoll, und es hat, wie schon gesagt, lange gedauert, bis sie zum Standard wurde.⁵ Doch gilt Ähnliches wie für die Peano-Axiome: Mittlerweile stehen exakte Formulierungen zur Verfügung. Es geht nur mehr darum, zu verstehen und zu würdigen, dass sie wirklich den intendierten Begriff präzise zum Ausdruck bringen. Auch wenn selbst das keine völlige Trivialität ist, lässt sich selten mit solcher Berechtigung wie beim Grenzwert sagen: Ein kleiner Schritt für einen Menschen, doch ein großer in der Geschichte der Mathematik und des Denkens.

Hat man einmal den Folggrenzwert verstanden, erhält man die anderen Varianten fast geschenkt. Für den Grenzwert von Reihen hat man lediglich an die Stelle der Folgglieder x_n die Partialsummen $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ einer Folge von Reihengliedern a_n zu setzen. Beim Grenzwert einer Funktion f für $x \rightarrow x_0$ tritt ein reelles $\delta > 0$ an die Stelle von $n_0 \in \mathbb{N}$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ an die Stelle von $n \geq n_0$, $f(x)$ an die von x_n und, wenn man Stetigkeit von f bei x_0 definieren will, $f(x_0)$ an die Stelle von α . Der Differentialquotient ist davon ein Spezialfall, nämlich für Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ statt für das ursprüngliche $f(x)$. Beim Integral einer Funktion f schließlich muss es heißen: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Feinheit, so dass für alle Zerlegungen, die feiner sind, Ober-, Unter- wie auch Riemannsummen vom Wert des Integrals um weniger als ε abweichen.

Diese wenigen, zugegebenermaßen etwas gedrängt dargestellten Definitionen enthalten die Quintessenz des Inhaltsbereiches Analysis. Es geht um eine einzige logische Struktur, die den fünf behandelten Ausformungen des Grenzwertbegriffs gemeinsam ist. Sie besteht in der Abfolge dreier logischer Quantoren: $\forall \exists \forall$. Das stellt zwar gewisse intellektuelle Anforderungen. Wer sie aber bewältigt, gewinnt damit eine bedeutende Einsicht, wie sie kaum sonst irgendwo derart konzise auf den Punkt gebracht werden kann. Von vornherein auf dieses Bildungsziel zu verzichten würde bedeuten, vielen aufnahmefähigen Schülerinnen und Schülern ein bedeutendes Aha-Erlebnis vorzuenthalten. Überspitzt formuliert: Mathematiker ist, wer mit dem Grenzwertbegriff verständig operieren kann. Von der Mehrzahl der Schüler wird man das zwar nicht verlangen können, die Chance auf ein passives Verstehen sollte man ihnen aber unbedingt geben. Ich selber erinnere mich mit Dankbarkeit daran, als mein Mathematiklehrer eine korrekte Definition des Folggrenzwertes formulierte und mir damit ein Heureka bescherte, das mir auch noch nach über 35 Jahren lebendig in Erinnerung ist.

⁴ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1643-1727)

⁵ Schon Archimedes im 3. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung war sehr nahe dran.

Für die Zentralmatura wären sehr viele sinnvolle und neuartige Prüfungsaufgaben möglich, wenn aus dem Unterricht ein sorgsamer Umgang mit natürlicher wie auch mit symbolisch formalisierter Sprache vertraut wäre. Das gilt für Aussagen im Stile der Peano-Axiome genauso wie für solche im Geiste des Grenzwertes. Man denke beispielsweise an jene Modifikation der Grenzwertdefinition, die aus dem Grenzwert einen Häufungspunkt macht (Quantorenvertauschung: $\forall \forall \exists$ statt $\forall \exists \forall$; eine etwas ausführlichere Diskussion mit Beispielen auch abseits der Mathematik finden sich in meinem noch unveröffentlichten Artikel Winkler (2016)).

4.4. Stochastik

Die Stochastik (Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik) ist leider noch ein großes Problemfeld. Einerseits handelt es sich um einen Bereich mit enormer gesellschaftlicher Relevanz, andererseits stellt er intellektuelle Ansprüche, die allem Anschein nach vielen gar nicht bewusst sind. Wahrscheinlich aus diesem Grunde fristete die Stochastik im Lehrplan lange Zeit ein Schattendasein. Seit ein paar Jahrzehnten versucht man aus gutem Grunde, sie auch in der Schule zu verankern. Leider ist das meines Erachtens noch nicht auf befriedigende Weise gelungen. Viele Mängel haben sich mittlerweile etabliert und schlagen auch im Kompetenzkatalog für die Zentralmatura durch. Nicht zuletzt deshalb habe ich in Winkler (2012/13) versucht, die mathematischen Hintergründe der Schulstochastik eingehender zu beleuchten. Es folgt eine knappe Andeutung einiger besonders schmerzhafter Defizite.

Es beginnt beim grundlegenden Begriff der Wahrscheinlichkeit selbst. Es ist eine große Errungenschaft der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie (fundamental dazu ist Kolmogorow (1933)), dass sie ohne Bezugnahme auf metaphysische Unschärfen auskommt und den höchsten Ansprüchen begrifflicher Strenge entspricht. Dabei ist es entscheidend, Wahrscheinlichkeit – übrigens in völliger Analogie zur Messung von Längen, Flächen etc., wo auch eine seltsame Scheu vor klaren Begrifflichkeiten auffällt (siehe Winkler (2010/11)) – als $[0, 1]$ -wertige, additive Mengenfunktion P zu begreifen: Für zwei disjunkte, d.h. einander ausschließende Ereignisse A und B ist die Wahrscheinlichkeit $P(A \cup B)$, dass eines der beiden eintritt, gleich der Summe $P(A) + P(B)$.⁶ Zusammen mit den trivialen Forderungen $P(\emptyset) = 0$ und $P(X) = 1$ für die Menge X aller möglichen Ereignisse weiß man damit über den Wahrscheinlichkeitsbegriff alles Notwendige, um im Mathematikunterricht sinnvoll damit arbeiten zu können. Natürlich soll dabei trotzdem auf philosophische Schwierigkeiten etwa rund um den Begriff des Zufalls hingewiesen werden. (Man denke nur an den kulturell-historischen Aspekt!) Doch tut das der Klarheit in der mathematischen Modellierung keinen Abbruch. Um dieser gerecht zu werden, wäre noch der Definitionsbereich der Funktion P zu thematisieren. Bei endlichem oder abzählbar unendlichem X wird das in der Regel die volle Potenzmenge von X sein. Bei überabzählbarem X wie zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ kann man sehr grundlegende Fragen der Maßtheorie (nicht messbare Mengen, Paradoxon von Banach-Tarski, siehe Winkler (2001/02)) ansprechen, die vor allem den erkenntnistheoretischen Aspekt der Mathematik betreffen. Auf diesem überschaubaren Begriffsapparat aufbauend ließen sich bereits zahlreiche wahrscheinlichkeitstheoretische Prüfungsaufgaben formulieren, die sehr sinnvoll, bisher aber noch nicht gebräuchlich sind.

Statt dessen dominieren zur Zeit ganz wenige Aufgabentypen wie beispielsweise Boxplot⁷ nur deshalb, weil keine anderen Typen korrekt funktionieren. Dabei gäbe es so wichtige Begriffe wie Zufallsgröße oder -variable, Erwartungswert, Varianz etc., die sehr wohl im Lehrplan vorkommen, jedoch in der Praxis eine viel sorgfältigere Behandlung verdienen.

⁶ Die entsprechende Forderung nicht nur für zwei, sondern auch für eine Folge (eine abzählbar unendliche Menge) von paarweise disjunkten Ereignissen heißt σ -Additivität. Dass sie erfüllt werden kann, ohne Widersprüche zu generieren, ist für die Theorie wichtig und soll deshalb durchaus erwähnt werden. Für den Schulunterricht spielt sie aber nur im Hintergrund eine Rolle und soll keine Verwirrung stiften.

⁷ Boxplotaufgaben sind zweifellos sinnvoll. Im Kern geht es darum, für eine empirische Verteilung spezielle α -Quantile zu bestimmen. Noch sinnvoller wäre es allerdings, diese Aufgabe nicht ausschließlich auf die fünf Werte $\alpha = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ zu beschränken. Statt dessen birgt die standardisierte schematische Darstellung („Boxplot“) die Gefahr, dass sie aufgrund ihrer repetitiven Wiederkehr bei jenen Schülern, die nicht dahinter blicken, die Aura tieferer stochastischer Weisheit bekommt. Dabei könnte man die Essenz der Aufgabe schon jedem durchschnittlich begabten Volksschulkind beibringen: eine Gruppe von Zahlen der Größe nach ordnen, in möglichst gleich große Viertel teilen und die Trennlinien zwischen den Vierteln markieren.

Die Unklarheiten beschränken sich leider nicht auf die Grundbegriffe der Stochastik, sie betreffen auch ihre wichtigsten Ergebnisse. So tritt das Gesetz der großen Zahlen nur in sehr diffuser Weise auf. Die entscheidende Rolle der stochastischen Unabhängigkeit wird überhaupt nicht erwähnt. Ähnliches gilt für den zentralen Grenzwertsatz, der nicht ausdrücklich zum Stoff gehört. An seine Stelle treten sehr schematische Aufgaben, wo Normalverteilung und Binomialverteilung (die einzigen Verteilungen, die explizit vorkommen) einander wechselseitig approximieren, oft in die praktisch weniger relevante Richtung. Doch zur stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen: Anstatt sie zu definieren (was, da bedingte Wahrscheinlichkeiten ja zur Verfügung stehen, besonders leicht zu motivieren wäre), ist von einem sogenannten Multiplikationssatz die Rede, der gleichrangig neben einem sogenannten Additionssatz (schulische Bezeichnung für die definatorisch geforderte Additivität von P) steht, als scheinbar universell gültiges, aber nicht weiter kommentiertes Gesetz. Es überrascht dann nicht mehr, wenn Unabhängigkeit als entscheidende Voraussetzung an Stichproben auch beim Testen von Hypothesen und beim Schätzen von Parametern vergessen und folglich vieles falsch wird. Auch die logisch komplizierte Struktur hinter statistischen Tests und Konfidenzintervallen im klassischen Sinn kommt in den gebräuchlichen Sprechweisen nicht zum Ausdruck. Letztere suggerieren nämlich unterschwellig den Eindruck, die gesuchten Parameter (Mittelwert, Varianz u.ä.) unterlägen (so wie in der Bayesianischen Statistik) einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, was aber nicht der Fall ist.

Die Konsequenz der Missstände in der Stochastik für die Zentralmatura: Mit dem korrekt verfügbaren Material können zur Zeit nur sehr wenige Aufgabentypen bedient werden. Soll die Prüfung in diesem Inhaltsbereich aussagekräftig bleiben, ist längerfristig eine sehr grundlegende Revision, die mathematische Korrektheit und Schultauglichkeit unter einen Hut bringt, erforderlich. Natürlich werden dabei Kompromisse nötig sein. Ziel muss dabei aber immer Aufklärung sein und nicht Mystifikation.

5. Ausblick

Aus meinen Darlegungen ergeben sich zahlreiche Wünsche an die politisch Verantwortlichen. Diese Wünsche weisen in zwei Richtungen. Einerseits gilt es, das Positive am noch jungen Projekt Zentralmatura samt seinen Potentialen zu erkennen und auch zu verteidigen. Es wäre schade, wenn aus Überreaktion auf einzelne Pannen das Kind mit dem Bade ausgeschüttet würde. Auf der anderen Seite müssen die vielfach noch tief schlummernden Potentiale erst durch neue Initiativen zum Leben erweckt werden.

Die Stärken des Konzeptes verdienen es, auch in der Öffentlichkeit mit dem nötigen Selbstbewusstsein verteidigt zu werden. Die medialen Aufregungen – und es gab in den letzten beiden Jahren viel zu viele – betrafen fast ausschließlich Äußerlichkeiten, die, wenn auch tatsächlich ärgerlich für einige Beteiligte, keine substanziellen Fragen berührten. Eine der Stärken des Projektes ist die zugrunde liegende Bildungstheorie von Fischer. Aus ihr können zwar bei Weitem nicht alle Details abgeleitet werden. Man wird ihr vielleicht auch nicht immer sklavisch folgen. Sie liefert aber eine sinnvolle Orientierung in vielen Fragen. Die allermeisten Anliegen, die man mit einer Zentralmatura zu verbinden geneigt ist, lassen sich sehr überzeugend auch mit der Fischerschen Theorie argumentieren.

Viele der mit der Zentralmatura eröffneten Chancen müssen aber erst genutzt werden. Das ist ein schwieriger Prozess. Revolutionen pflegen viel zunichte zu machen und viele Verlierer zu produzieren, also muss man sich um eine Evolution bemühen. Und da sind langfristige Perspektiven gefragt. Die seit kurzem institutionalisierte Kooperation der bildungspolitisch Verantwortlichen mit der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und ihrer Didaktikkommission ist jedenfalls ein Schritt in die richtige Richtung.

Zur Kontrolle von Lehrplan, Kompetenzkatalog, Prüfungsaufgaben etc. waren bereits Arbeitsgruppen tätig. Die Arbeiten fanden allerdings durchwegs mit sehr eingeschränktem Zeithorizont statt. Korrekturen waren daher nur lokal und in bescheidenem Maßstab möglich. Substanzielle Verbesserungen der mathematischen Bildung an unseren Schulen – einige inhaltliche Vorschläge habe ich gemacht – erfordern aber langfristige Perspektiven und ein Vorgehen auf breiterer Front. Davon wäre die Zentralmatura nur ein Teil, allerdings ein unverzichtbarer.

Zur inhaltlichen Orientierung wäre eine Art mathematischer Leitfaden für Lehrkräfte wünschenswert. Er sollte den Stoff des Lehrplans umfassen und um solide mathematische Hintergründe ergänzen. Die Mehrzahl meiner Artikel in den Didaktikheften der ÖMG ist aus einer solchen Motivation entstanden. Neben den bereits erwähnten handelt es sich dabei um die Artikel Winkler (2006/07), Winkler (2008/09), Winkler (2011/12), und Winkler (2013/14); lediglich Winkler (2014/15) ist wegen seiner stark außermathematischen Orientierung von anderer Art. Doch sollen diese Beispiele nur zur Illustration und Anregung dienen. Sie sind keinesfalls als Vorgaben gemeint. Der Schwerpunkt im Leitfaden sollte weniger auf einem in sich geschlossenen systematischen Aufbau liegen, wie er in fachmathematischen Vorlesungen üblich ist, sondern auf den Querbeziehungen zwischen den wichtigsten Inhalten. Notgedrungen wäre solch ein Leitfaden umfassender als der obligatorische Lehrstoff, der seinerseits nur teilweise in den Grundkompetenzen für die Zentralmatura abgebildet ist. Da sich der Leitfaden primär an Lehrkräfte und nicht direkt an Schüler wendet (wenngleich er natürlich öffentlich zugänglich sein sollte), könnte er konzise in der Darstellung sein und die Dimensionen eines soliden Lehrbuchs wahren. Um sicherzustellen, dass der in so einem Leitfaden waltende Geist auch in den Mathematikunterricht durchschlägt, lautet meine bereits erwähnte Empfehlung: Wohl dosierte, aber relativ kurzfristig (etwa im vorangehenden Schuljahr) veröffentlichte Variationen des jeweils aktuellen Lehrplans und Maturastoffs sollten einen Unterricht befördern, der mit einem „teaching to the test“ erst gar nicht liebäugelt. Er sollte auf eine solide und breite Basis abzielen, auf der ein relativ großes Spektrum potentiell prüfungsrelevanter Themen aufbauen könnte – auch wenn für jeden einzelnen Jahrgang davon nur Teile zum Tragen kommen.

Abschließend noch einige Gedanken zur Umsetzung: Damit alles mit angemessenem zeitlichen Vorlauf vonstatten gehen kann, wäre zuerst eine Arbeitsgruppe einzurichten, die unter rein fachlichen Gesichtspunkten einen konzeptuellen Rahmen ausarbeitet, der einen gewissen Minimalstoff (etwa im Umfang des aktuellen Lehrplans) umfasst, darüber hinaus aber auch das Wichtigste, das zur Abrundung des Verständnisses dienlich ist. Sodann wäre die Expertise von Fachdidaktikern und Praktikern mit Schulerfahrung einzuholen. Ihr wesentlicher Beitrag wären Anregungen zur adäquateren Darstellung und gegebenenfalls Ergänzung der Inhalte unter didaktischen und schulpraktischen Gesichtspunkten. Der gemeinsam zu erarbeitende Leitfaden sollte unter allen genannten Gesichtspunkten überzeugen. Mit ihm müssen sodann die Lehrerinnen und Lehrer vertraut gemacht werden. Erst wenn auch das hinreichend weit gediehen ist, kann ein Unterricht eingefordert werden, der sich am neuen Leitfaden orientiert.

All diese Prozesse brauchen ihre Zeit. Viel wichtiger als Geschwindigkeit sind Solidität und Nachvollziehbarkeit. Doch selbst wenn die erste Matura im Sinne des neuen Leitfadens erfolgreich über die Bühne gegangen ist, muss die Arbeit weitergehen. Weder Lehrplan noch Kompetenzkatalog dürfen als immerwährende dogmatische Schriften betrachtet werden, und auch der Leitfaden muss offen bleiben für allfällige Veränderungen; sei es aufgrund von Innovationen oder aufgrund von praktischen Erfahrungen. Zwar ist nicht zu erwarten, dass sich die Mathematik selbst so grundlegend wandelt, dass davon in absehbarer Zeit der Schulunterricht nennenswert betroffen würde. Um einer Erstarrung vorzubeugen, muss aber eine maßvolle Elastizität der Rahmenbedingungen der Zentralmatura zum selbstverständlichen Dauerzustand werden.

Gut Ding braucht Weile und erfordert viel Arbeit. Das gilt besonders in Bildungsangelegenheiten, wo weder Nürnberger Trichter noch Stein der Weisen zur Verfügung stehen. Daher lauten die Maximen: langfristig denken, schrittweise und koordiniert vorgehen, nicht alles auf einmal übers Knie brechen, vernünftige Aufgabenteilung unter genügend vielen Akteuren und verantwortungsvoller, pragmatischer Blick aufs Ganze.

Literatur

Bundesinstitut für Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Am 9.8.2016 verfügbar unter:
https://www.bifie.at/system/files/dl/srdp_ma_konzept_2013-03-11.pdf
Bundesministerium für Bildung und Frauen. *AHS-Lehrpläne Oberstufe neu: Mathematik*. Am 9.8.2016

- verfügbar unter:
https://www.bmb.gv.at/schulen/unterricht/lp/lp_neu_ahs_07_11859.pdf
- Martin Dangl, Roland Fischer und Helmut Heugl. *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“ – Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen*. Version 9/09. Klagenfurt: AECC. Am 9.8.2016 verfügbar unter
https://www.uni-klu.ac.at/idm/downloads/SRP-M_September_2009.pdf.
- Roland Fischer. *Universitäre Allgemeinbildung*. In: Studium Integrale. Hrsg: Markus Arnold und Roland Fischer, SpringerWienNewYork. iff texte Band 6, 35-40. Springer-Verlag/Wien (2000).
- Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin, Springer (1933, 1973).
- Reinhard Winkler. *Wie macht man 2 aus 1? Das Paradoxon von Banach-Tarski*. DH⁸ 33 (2001/02), 166-196.
- Reinhard Winkler. *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*. DH⁸ 39 (2006/07), 155-165.
- Reinhard Winkler. *Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus*. DH⁸ 40 (2007/08), 129-141.
- Reinhard Winkler. *Die reellen Zahlen sind anders*. DH⁸ 41 (2008/09), 140-153.
- Reinhard Winkler, *Logischer und mengentheoretischer Formalismus – Ärgernis und sonst nichts?* DH⁸ 42 (2009/10), 102-117.
- Reinhard Winkler. *Das Maß aller Dinge aus mathematischer Sicht – zu den Grundlagen der Integralrechnung*. DH⁸ 43 (2010/11), 146-160.
- Reinhard Winkler. *Im Anfang war die Exponentialfunktion*. DH⁸ 44 (2011/12), 98-109.
- Reinhard Winkler. *Stochastik – ein Fest der Unabhängigkeit*. DH⁸ 45 (2012/13), 122-136.
- Reinhard Winkler. *Dynamische Systeme als Chance für den Schulunterricht*. Langversion online verfügbar unter:
<https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html>
 Kurzversion: DH⁸ 46 (2013/14), 108-122.
- Reinhard Winkler. *Die Geburt der Mathematik aus den Bedingungen der Musik*. DH⁸ 47 (2014/15), 108-122.
- Reinhard Winkler. *Mathematik als zentraler Teil des Projektes Aufklärung auf breiter Front*. Manuskript (2016).

⁸ Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG) – ehemals Didaktikhefte der ÖMG, online unter <https://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html>, meine eigenen Artikel auch unter <http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/>.