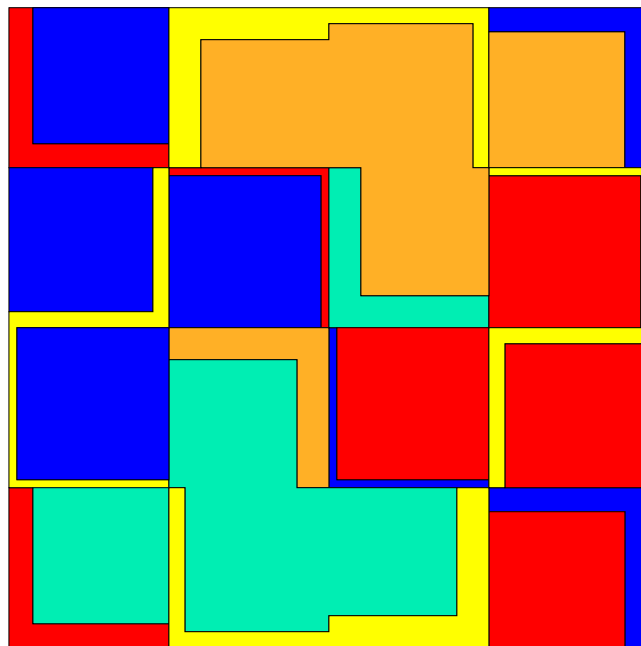


Putz, Mozart, Galois —  
Symmetrie und Asymmetrie  
als Vermittlerinnen zwischen  
Form und Inhalt

Reinhard Winkler

## 1 Oskar Putz und abstrakte Mathematik

### 1.1 Die Themenstellung

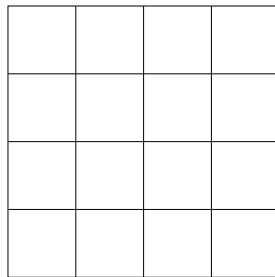


Welche Gedanken löst dieses Bild von Oskar Putz in mir als Mathematiker aus?

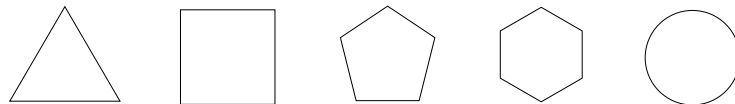
Weitschweifende! Offenbar herrschen quadratische Formen vor, im Großen wie im Detail. Gewisse Symmetrien erinnern mich an Strukturen, die mir schon vor längerer Zeit in ganz anderem Kontext aufgefallen sind, nämlich in den Beziehungen der Personen von Mozarts *Così fan tutte*. Den abstrakten Hintergrund finde ich in der Galoistheorie, einem besonders reizvollen Teilgebiet der Algebra. Gemeinsamkeiten der genannten Themen geben Aufschluss über unsere Wahrnehmung von Symmetrie in einem sehr umfassenden Sinn. Doch fangen wir von vorne an und lassen wir das Bild auf uns wirken!

## 1.2 Geometrische Grundstrukturen: Quadrat versus Dreieck

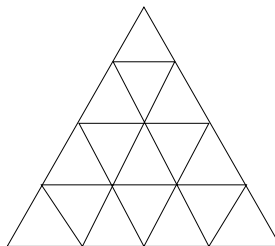
Wesentlich scheint das Muster:



Es ist eine Besonderheit des Quadrats, dass es immer wieder in kleinere Teile gleicher Art zerlegt werden kann. Von den folgenden geometrischen Formen

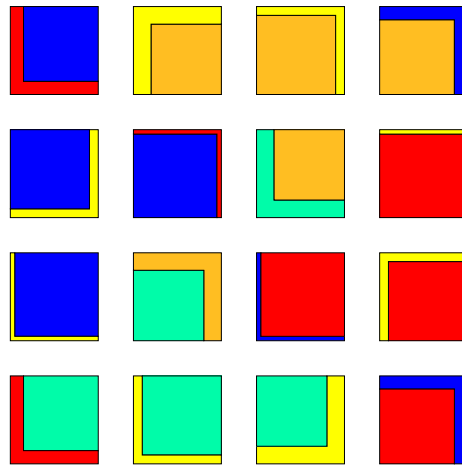


haben außer dem Quadrat nur noch Dreiecke diese Eigenschaft:



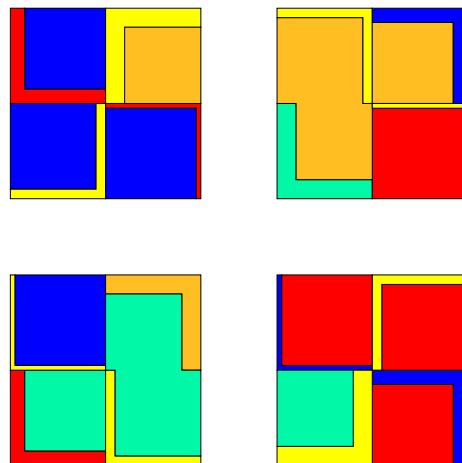
Manche Teildreiecke stehen auf dem Kopf, während bei einem Quadrat (wie auch bei Rechtecken) diese Modifikation der Betrachtungsweise nicht von vornherein

nötig ist. Im Bild von Oskar Putz nehmen wir jedenfalls eine Gliederung in 16 kleinere Teile wahr:



Diese elementaren Teile sind alle von ähnlicher Struktur. Sie bestehen aus einem noch kleineren Quadrat, das durch eine L-Form zu dem etwas größeren quadratischen Sechzehntel des Bildes ergänzt wird. Variabel sind Farbe (Rot, Blau, Grün, Orange und Gelb), Dicke der L-Form (einfach, zweifach, dreifach und vierfach) sowie Position innerhalb des Sechzehntelquadrats. Warum von den zahllosen denkbaren Kombinationen dieser Parameter gerade die vorliegenden vom Künstler gewählt wurden, ist aus dieser Zerlegung in elementare Teile noch nicht ersichtlich.

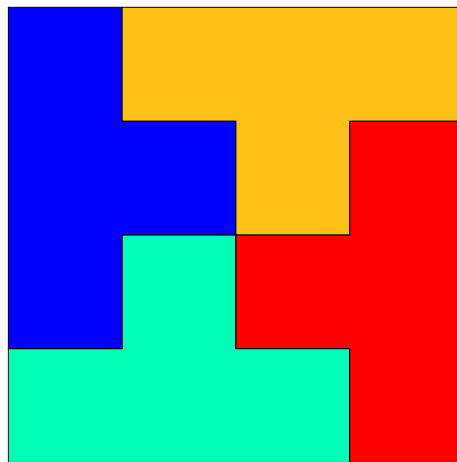
Mehr Aufschluss gibt eine Zwischenstufe in der Zerlegung des Quadrats. In der folgenden Darstellung korrespondieren die Viertel in der Zerlegung kreuzweise.



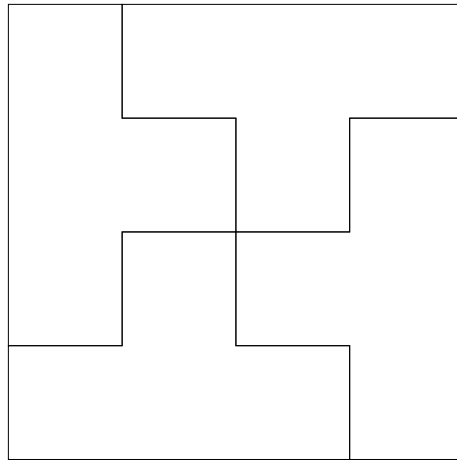
Die Art der Korrespondenz wird deutlicher, wenn wir noch andere Gesichtspunkte einnehmen.

### 1.3 Grob- und Feinstruktur

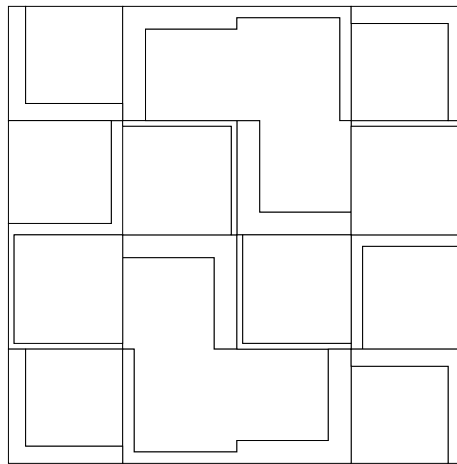
Wir wollen vorübergehend die L-Formen in den 16 elementaren Quadraten vernachlässigen. Wir tun dies, indem wir in jedem dieser Teile die L-Form mit der Farbe des kleinen Quadrats füllen und so mit diesem verschmelzen lassen. Setzen wir die resultierenden monochromatischen Sechzehntel wieder zusammen, erhalten wir folgende Grobstruktur:



Sehen wir auch noch von den Farben ab und beachten wir nur die Begrenzungen zwischen ihnen, so ergibt sich eine Form, die durch Drehung um  $90^\circ$  und damit auch um  $180^\circ$  und  $270^\circ$  in sich selbst übergeht.



Wir überprüfen diese Beobachtung an der feineren Struktur, die aus dem ursprünglichen Bild entsteht, wenn man Farben weiterhin ignoriert.

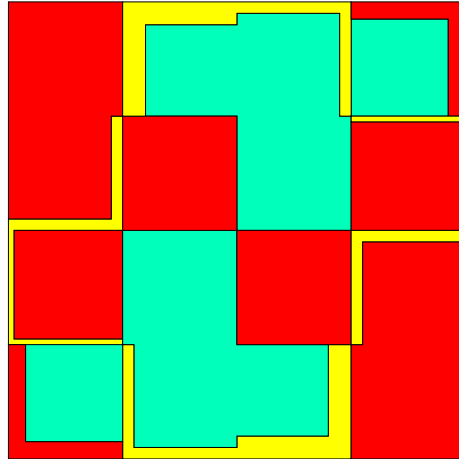


Diese Feinstruktur verträgt sich nicht mit einer Drehung um  $90^\circ$ , sie wird dadurch verändert. Wenn wir jedoch um  $180^\circ$  drehen, geht die gesamte Figur wieder in sich über<sup>1</sup>. Das betrifft sowohl die Dicke als auch die Position der L-Formen.

Lassen wir nun wieder die Farben auf den Plan treten. Offenbar werden sie durch die  $180^\circ$ -Drehung verändert. Diese Veränderung erfolgt aber nicht in chaotischer Weise. Rote Flächen werden nämlich immer nur mit blauen vertauscht, grüne immer nur mit orangen. Gelbe Flächen bleiben gelb.

<sup>1</sup>Zur schnelleren Kontrolle mag die Tatsache hilfreich sein, dass eine Drehung um  $180^\circ$  auch als Spiegelung um den Mittelpunkt aufgefasst werden kann.

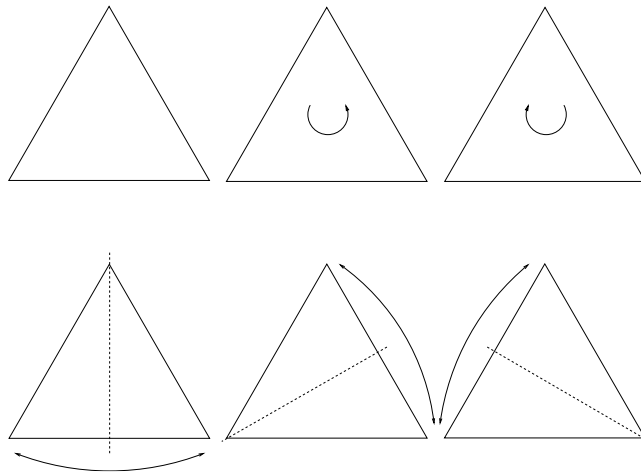
Wir stellen uns eine partielle Farbenblindheit vor, bei der Rot und Blau ununterscheidbar sind und zu einer einzigen Farbe zusammengefasst werden, ebenso Grün und Orange. Wählen wir zur Darstellung etwa Rot und Grün, so ergibt sich ein vollständig punktsymmetrisches Gebilde:



Gehen wir dem Begriff der Symmetrie auf den Grunde!

#### 1.4 Die Symmetriegruppe des Dreiecks

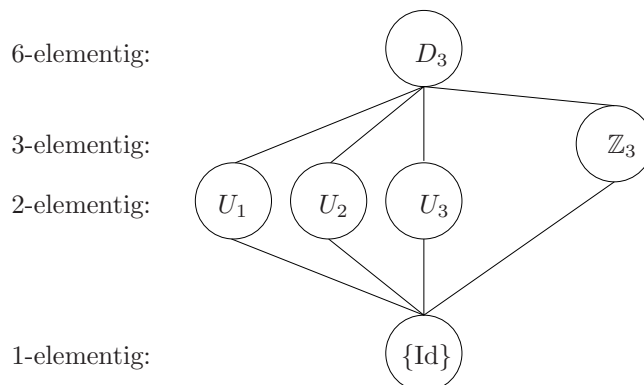
Unter Symmetrien wollen wir Transformationen wie Spiegelungen und Drehungen verstehen, die eine geometrische Figur mit sich selbst zur Deckung bringen. Um uns mit dem Denken in Symmetrien vertraut zu machen, studieren wir anfangs jene des gleichseitigen Dreiecks. Neben der Grundstellung (genannt auch *Identität*  $Id$ ) und zwei Drehungen gibt es drei Spiegelungen um Symmetrieachsen:



Kombiniert (verknüpft) man zwei Symmetrien, indem man sie hintereinander ausführt, erhält man wieder ein deckungsgleiches Dreieck. Also entspricht der gesamte Vorgang wieder einer Symmetrie. Zum Beispiel ergeben die beiden gegenläufigen Drehungen zusammen die Grundstellung, sie heben einander also auf. Allgemein nennt man zwei einander aufhebende Transformationen zueinander *invers*. Eine Spiegelung zusammen mit einer Drehung liefert wieder eine Spiegelung, allerdings um eine andere Achse, zwei verschiedene Spiegelungen ergeben eine Drehung etc. Solche Strukturen von Transformationen, die man miteinander verknüpfen kann und wo es stets Inverse gibt, spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle und heißen *Gruppen*. In diesem speziellen Fall sprechen wir von der *Symmetriegruppe* des regelmäßigen Dreiecks, die man auch mit  $D_3$  bezeichnet<sup>2</sup>. ( $D_4, D_5, \dots$  sind die des Quadrats, des regelmäßigen 5-Ecks, ...).

Lassen wir die Spiegelungen vorübergehend weg und beschränken wir uns auf Grundstellung und Drehungen. Auf diese Weise erhalten wir eine sogenannte *Untergruppe*, das ist eine Teilmenge, die selbst eine Gruppe ist. Dabei kommt es darauf an, dass die Verknüpfung zweier Transformationen aus der Untergruppe einer Transformation wieder aus der Untergruppe entspricht. Im Fall der Drehungen (inklusive Grundstellung) spricht man von der *zyklischen* Gruppe  $\mathbb{Z}_3$ .  $\mathbb{Z}_3$  ist sogar *kommutativ*, d.h. das Ergebnis einer Verknüpfung hängt nicht von der Reihenfolge ab. Drei weitere kommutative Untergruppen von  $D_3$ , nennen wir sie  $U_1, U_2$  und  $U_3$ , bestehen aus je zwei Elementen, der Identität und je einer Spiegelung. Auch die sogenannte *triviale* Untergruppe  $\{\text{Id}\}$ , die nur aus der Grundstellung (Identität) besteht, ist kommutativ. Sehr wohl Untergruppe von sich selbst, nicht aber kommutativ ist  $D_3$  als Ganzes: Verknüpft man eine Drehung und eine Spiegelung, so erhält man je nach Reihenfolge verschiedene Ergebnisse. Die Gesamtheit aller Untergruppen von  $D_3$  lässt sich so darstellen:

<sup>2</sup>Das  $D$  steht für *Diedergruppe*, der Index (hier 3) für die Anzahl der Ecken des regelmäßigen Polygons.



## 1.5 Die symmetrische Gruppe von Permutationen

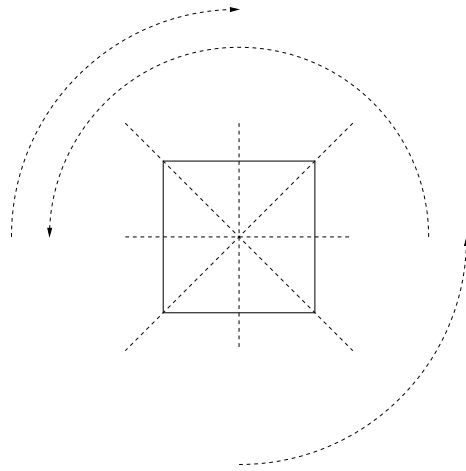
Man kann die Symmetrien des Dreiecks interpretieren als Vertauschungen der Eckpunkte. Spiegelungen vertauschen zwei miteinander und lassen den dritten Eckpunkt fest, Drehungen vertauschen zyklisch, und die Identität lässt alle Eckpunkte unverändert. Versetzen wir die Ecken mit den Nummern 1, 2 und 3, so handelt es sich bei diesen Vertauschungen um die sogenannten *Permutationen* der Menge  $\{1, 2, 3\}$ . Da man Permutationen genauso verknüpfen kann wie die entsprechenden Symmetrien des Dreiecks, haben wir es auch hier mit einer Gruppe zu tun. Wegen dieser Analogie zu geometrischen Symmetrien nennt man sie die *symmetrische Gruppe*  $S_3$ <sup>3</sup>. Die strukturelle Ähnlichkeit von  $D_3$  (Symmetriegruppe des Dreiecks) und  $S_3$  (Gruppe aller Vertauschungen von drei Elementen) wird in der Mathematik im Begriff der *Isomorphie* präzisiert. Wir kehren aber zurück zum Quadrat.

## 1.6 Die Symmetrien des Quadrats

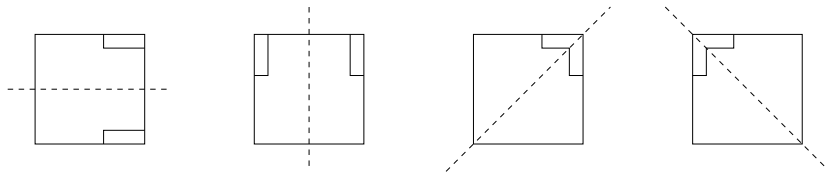
In unserer Analyse der quadratischen Formen im Bild von Oskar Putz war bisher nur von Drehungen die Rede. Wie steht es mit Spiegelungen? Bei einem leeren Quadrat gibt es davon vier, eine um die waagrechte Achse, eine um die senkrechte Achse und je eine um die beiden Diagonalen. Die Symmetriegruppe des Quadrats besteht also insgesamt aus acht Elementen: Grundstellung (Identität), drei Drehungen (um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$ ) und vier Spiegelungen.

<sup>3</sup> $S_4, S_5$  etc. schreibt man, wenn statt drei Elementen vier, fünf etc. zur Verfügung stehen.  $S_3$  besteht aus  $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$  Elementen,  $S_4$  aus  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ,  $S_5$  bereits aus  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$  etc. Die Gruppe  $S_4$  kann man sich auch geometrisch vorstellen als Symmetriegruppe eines regelmäßigen Tetraeders (dreiseitige Pyramide mit 4 gleichen Seitenlängen) im Raum, für  $S_5$  müsste man schon einen 4-dimensionalen Raum imaginieren etc.

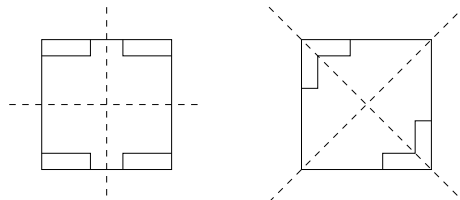




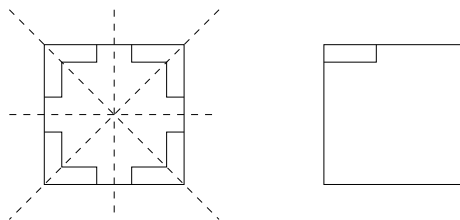
Das Bild von Oskar Putz lässt trotz quadratischem Umriss wegen seiner inneren Struktur keine Spiegelungen zu — im Gegensatz zum leeren Quadrat. Beispiele nichtleerer Quadrate mit einer Symmetrieachse sind:



Beispiele mit zwei Achsen:



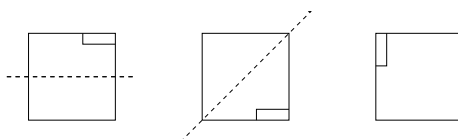
Aber auch vier Achsen oder gar keine sind möglich:



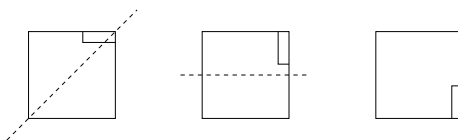
Wir wollen uns einen Überblick verschaffen, welche Kombinationen von Symmetrien auftreten. Folgende Beobachtung ist dafür sehr nützlich: Bleibt eine Figur durch gewisse Transformationen (Spiegelungen oder Drehungen) unverändert, so auch, wenn wir diese Transformationen beliebig kombinieren. Das heißt, Symmetrien können automatisch weitere nach sich ziehen. Also können nicht beliebige Teilmengen der Symmetriegruppe auftreten, sondern nur Untergruppen. Ich will an einem Beispiel ziemlich ausführlich durchspielen, wie zwei Symmetrien alle anderen erzeugen können.

Zum Beispiel seien die Spiegelungen um die waagrechte Achse und um die nach rechts geneigte Diagonale erlaubt. Wir suchen nach einer Untergruppe, die diese beiden Spiegelungen enthält, indem wir alle möglichen Kombinationen bilden. Es wird sich herausstellen, dass die gesuchte Untergruppe alle acht Symmetrien enthalten muss, also bereits mit  $D_4$  übereinstimmt.

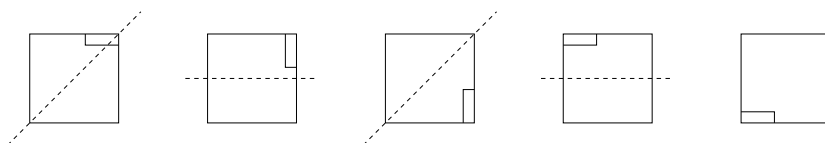
Die Drehung um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn ergibt sich, indem wir die beiden gegebenen Spiegelungen hintereinander ausführen:



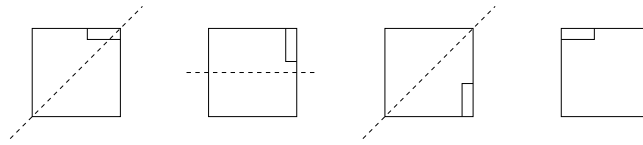
In umgekehrter Reihenfolge erhalten wir die Drehung in die andere Richtung:



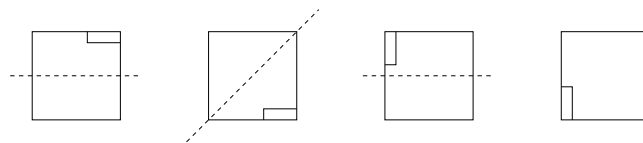
Die Drehung um  $180^\circ$  resultiert aus der doppelten Ausführung einer der Drehungen um  $90^\circ$ , insgesamt also z.B. durch diese Abfolge der ursprünglich gegebenen Spiegelungen:



So erhalten wir die Spiegelung um die senkrechte Achse:



Da die Grundstellung (Identität) in jeder Untergruppe enthalten ist, fehlt uns auf die vollständige Gruppe  $D_4$  nur mehr die Spiegelung um die zweite Diagonale, die wir ebenfalls leicht aus den beiden ursprünglichen Spiegelungen erzeugen können:



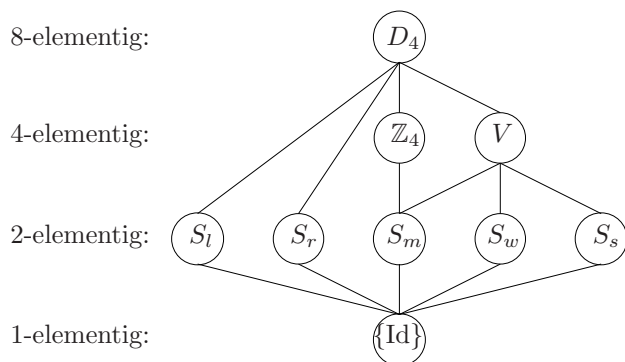
Tatsächlich erzeugt also, wie man sagt, die Spiegelung um die waagrechte Achse zusammen mit der Spiegelung um die nach rechts geneigte Diagonale ganz  $D_4$ . Das gleiche funktioniert, wenn man mit einer Achsenspiegelung und einer Drehung um  $90^\circ$  startet. Mit Spiegelung um die waagrechte Achse und um die senkrechte Achse zusammen bekommt man abgesehen von der Identität aber nur noch die Drehung um  $180^\circ$ . Wenn man alle Möglichkeiten systematisch untersucht (hier kann ein bisschen Theorie den Arbeitsaufwand sehr reduzieren), erhält man schlussendlich eine vollständige Liste der Untergruppen von  $D_4$ , der Symmetriegruppe des Quadrats.

1. Nur Grundstellung (= Identität = Id), keine echte Symmetrie:  $\{\text{Id}\}$
2. Id und Spiegelung um die waagrechte Achse:  $S_w$
3. Id und Spiegelung um die senkrechte Achse:  $S_s$
4. Id und Drehung um  $180^\circ$  = Spiegelung um den Mittelpunkt:  $S_m$
5. Id und Spiegelung um die nach rechts geneigte Diagonale:  $S_r$
6. Id und Spiegelung um die nach links geneigte Diagonale:  $S_l$
7. Id und Drehungen um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  und  $270^\circ$ : zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}_4$
8. Id und Spiegelungen um die waagrechte und um die senkrechte Achse sowie Drehung um  $180^\circ$ : Kleinsche Vierergruppe  $V$ <sup>4</sup>
9. Alle acht Symmetrien:  $D_4$ , volle Symmetriegruppe des Quadrats

---

<sup>4</sup>benannt nach Felix Klein

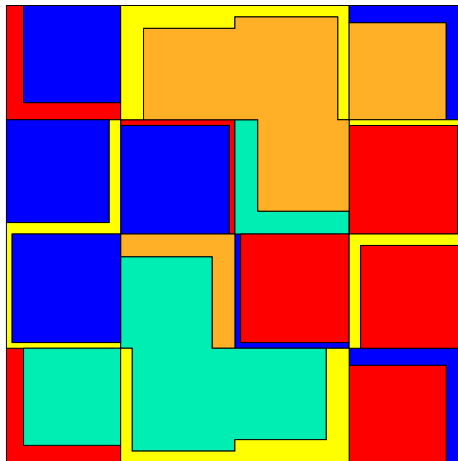
Die Darstellung der Untergruppen als Diagramm wie früher beim Dreieck sieht aus wie folgt:



## 1.7 Symmetrien versus Invarianten

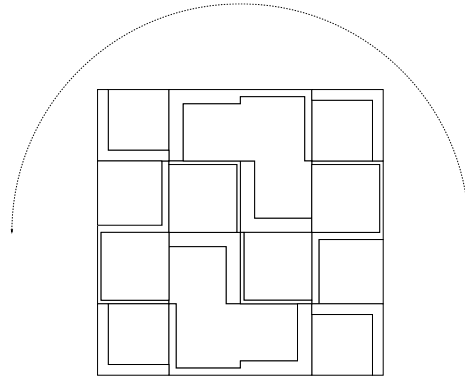
Wir beziehen die im vorigen Abschnitt dargestellten Untergruppen von  $D_4$ , der Symmetriegruppe des Quadrats, wieder auf das Bild von Oskar Putz. Dabei halten wir fest: Spiegelungen um Achsen zerstören die innere geometrische Struktur, während Drehungen die geometrische Grobstruktur unverändert (invariant) lassen, die 180°-Drehung sogar die Feinstruktur.

Für eine systematische Betrachtung der *Invarianten* sind also vor allem die Untergruppen  $\{\text{Id}\}$ ,  $S_m$ ,  $\mathbb{Z}_4$  und ganz  $D_4$  interessant. Die kleinste dieser Untergruppen besteht nur aus der Identität, unter der alles invariant bleibt:

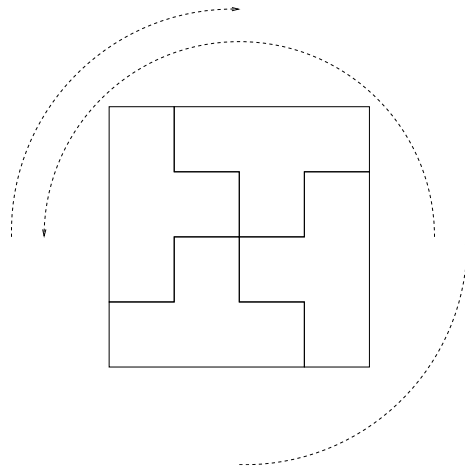


$S_m$  enthält die Punktspiegelung um den Mittelpunkt. Diese besitzt die rein

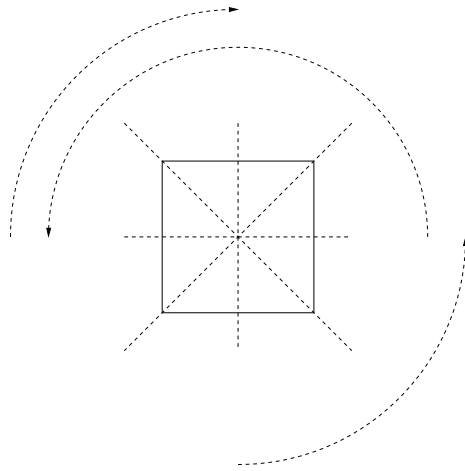
geometrische Struktur des Bildes als Invariante, vertauscht aber Farben (Rot-Blau und Grün-Orange).



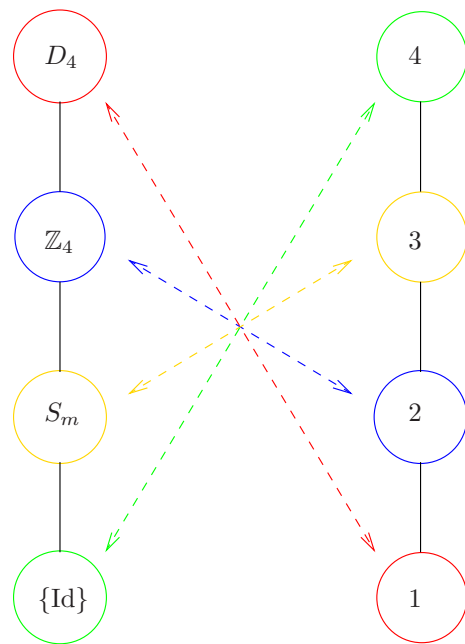
Mit  $\mathbb{Z}_4$  sind auch die Drehungen um  $90^\circ$  zugelassen, welche weder Farben, noch die geometrische Feinstruktur erhalten, lediglich eine geometrische Grobstruktur.



Bei  $D_4$  schließlich bleibt von den uns interessierenden Aspekten nur die äußere Form des Quadrats gewahrt.



Offenbar liegt es ganz allgemein in der Natur von Symmetrien und Invarianten, dass zusätzliche Symmetrien die Menge der Invarianten einschränken. Es herrscht also ein Prinzip *je mehr, desto weniger* — und umgekehrt. In der folgenden schematischen Darstellung stehen die Ziffern rechts für folgende Invarianten: 1 = nur der quadratische Umriss, 2 = 1 + geometrische Grobstruktur, 3 = 2 + geometrische Feinstruktur, 4 = 3 + Farben.



Ein Zusammenhang dieser Art wird in der Mathematik *Galoiskorrespondenz* ge-

nannt. In seiner klassischen Spielart wird er uns in der Galoistheorie nochmals begegnen. Sobald er einmal erkannt wurde, mag er banal erscheinen. Hinsichtlich Abstraktion sind wir damit aber schon einigermaßen tief in die Mathematik eingetaucht — und das ohne mathematische Formeln! Es lohnt, von den speziellen geometrischen Beispielen zu abstrahieren und unsere bisherigen Erkenntnisse unter einem übergeordneten Standpunkt zusammenzufassen.

## 1.8 Zwischenresümee

Der Mensch hat eine tief verwurzelte Neigung, seinen Wahrnehmungen eine Struktur zu unterlegen, die für eine gedankliche Verarbeitung geeignet ist<sup>5</sup>. Besonders attraktive Strukturen sind Ähnlichkeiten zwischen verschiedenen Teilen der Gesamtwahrnehmung. Vermittelt werden solche Ähnlichkeiten besonders durch Symmetrien. Das sind Transformationen, unter denen ein Teil zum anderen wird. Bei visuellen Wahrnehmungen kommen vor allem Drehungen, Spiegelungen und Schiebungen<sup>6</sup> ebener geometrischer Figuren in Frage, also Transformationen, die geometrische Formen nicht verändern.

Als interessant empfinden wir aber auch solche Transformationen, wo nur gewisse Aspekte (zum Beispiel Form oder Farbe) unverändert bleiben, nicht notwendig das gesamte Gefüge. Auf diese Art und Weise entstehen einerseits Hierarchien von Merkmalen, die durch vorgegebene Transformationen bewahrt bleiben (Invarianten), andererseits Hierarchien sogenannter Gruppen von Symmetrien zu vorgegebenen Invarianten. Unser Bewusstsein hat die Tendenz, invariante Merkmale und Gruppen wechselseitig aufeinander zu beziehen, wobei ein Prinzip *je mehr, desto weniger* herrscht. Sogar ein Wechselspiel zwischen Form und Inhalt lässt sich daraus ablesen. Im Beispiel von Oskar Putz: Die geometrische Form besitzt gewisse Symmetrien, die am Inhalt (den wir hier als Farbe interpretieren) ganz bestimmte Vertauschungen bewirken. So können neue Aspekte in den Vordergrund treten, die wir als anregend empfinden.

Das Bild von Oskar Putz mit seiner sowohl geometrisch als auch farblich sehr eindeutigen Struktur war ein besonders geeigneter visueller Reiz, um unsere Suche nach Symmetrien auf natürliche Weise in Gang zu setzen. Doch Symmetrien schlummern überall!

---

<sup>5</sup>Eine umfassende Theorie dazu verdanken wir Rudolf Arnheim (1904-2007), vgl. z.B. [1].

<sup>6</sup>Schiebungen habe ich bisher nicht explizit erwähnt, da sie für unsere Betrachtungen nicht nötig waren.

## 2 Mozarts da Ponte-Opern im Lichte von Symmetrie und Asymmetrie

### 2.1 Vorbemerkungen

Im ersten Teil regte uns die geometrische und farbliche Struktur eines Bildes an zu Gedanken über Symmetrien, wie wir sie wahrnehmen und wie wir nach ihnen suchen. Nun wende ich mich einer völlig anderen Kunstgattung zu, nämlich dem Musiktheater, wo geometrische Gebilde nicht unmittelbar gegeben sind. Erst ein zusätzlicher Abstraktionsschritt legt eine Visualisierung nahe. Im Falle der Oper *Così fan tutte*, der letzten gemeinsamen Arbeit von Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) mit seinem Textdichter Lorenzo da Ponte (1749-1838), drängen sich durch das Thema *Partnertausch* Erwägungen über Symmetrien von selbst auf. Zur Verdeutlichung, wie sehr solche formalen Aspekte in enge Verbindung mit Inhaltlichem treten können, ist der Kontrast zu den beiden anderen gemeinsamen Werken derselben Autoren, nämlich *Don Giovanni* und *Le nozze di Figaro* aufschlussreich. Im Sinne der hier zu entwickelnden Gedanken gehe ich in dieser Reihenfolge vor, gegen die Chronologie der Entstehung.

### 2.2 *Così fan tutte* — Gestalt gewordene Austauschbarkeit

Bekanntlich bedeutet *Così fan tutte* übersetzt *So machen's alle*. Gehen wir davon aus, dass im Titel nur deshalb die weibliche Form *tutte* (im Gegensatz zu *tutti*) verwendet wird, weil diese Worte in der Oper aus dem Munde der männlichen Figuren zu hören sind. Für die kommenden Betrachtungen ordne ich die handelnden Personen in folgendem Sechseck an:

Fiordiligi ○  
(Schwester der Dorabella)

○ Guglielmo  
(Liebhaber der Fiordiligi)

Despina ○  
(Kammerzofe)

○ Don Alfonso  
(alter Philosoph)

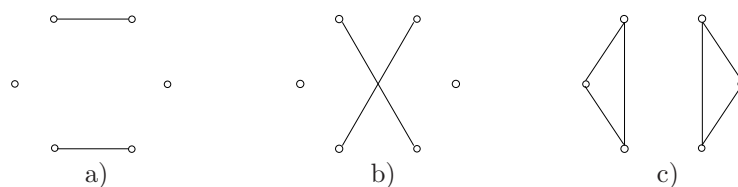
Dorabella ○  
(Schwester der Fiordiligi)

○ Ferrando  
(Liebhaber der Dorabella)

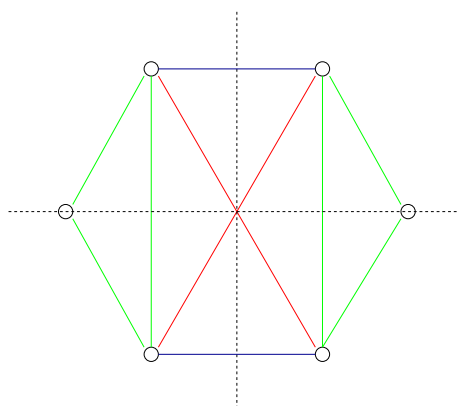


Die Handlung der Oper in Kürzestform: Die beiden jungen Offiziere Ferrando und Guglielmo preisen ihre Verlobten und werden vom sich selbst als lebenserfahrenen Philosophen darstellenden Don Alfonso zu einer Wette verleitet. Don Alfonso behauptet, dass — nicht anders als alle Frauen — auch die Bräute der beiden Soldaten, die Schwestern Dorabella und Fiordiligi, innerhalb nur eines Tages zur Untreue verführt werden können, vorausgesetzt Ferrando und Guglielmo verpflichten sich, einen Tag lang den Regieanweisungen Don Alfonsos zu folgen. Unter Mitwirkung von Despina, der von Don Alfonso bestochenen Kammerzofe von Fiordiligi und Dorabella, gewinnt Don Alfonso schlussendlich die Wette. Wesentliches Element dabei ist, dass die Verführung kreuzweise erfolgt: Guglielmo ist als neuer Werber bei der ursprünglich Ferrando zugeordneten Dorabella erfolgreich, Ferrando bei Guglielmos Braut Fiordiligi.

Beim ersten Blick auf die Personenkonstellation treten gewisse Verbindungen in den Vordergrund; ich will sie die *Primärstrukturen* nennen: a) die Paare zu Beginn, b) die neuen Paarbildungen im Laufe der Handlung und c) die dramaturgisch stark betonte Gruppierung in Frauen und Männer. Die graphische Veranschaulichung:



Eine Gemeinsamkeit dieser drei Strukturen fällt auf: Die Spiegelungen sowohl an der waagrechten als auch an der senkrechten Achse sind Symmetrien. Durch Färbung der Kanten lässt sich das alles in einem einzigen Diagramm darstellen.



Wie schon im vorangegangenen Kapitel anhand der Symmetriegruppe des Quadrats besprochen, erzeugen die beiden Spiegelungen durch Verknüpfung

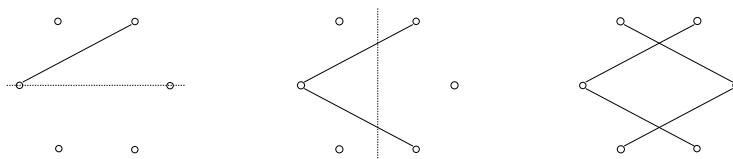
auch die Drehung um  $180^\circ$ , so dass wir die Kleinsche Vierergruppe  $V$  wiedererkennen, die schon bei den Symmetrien des Quadrats aufgetreten ist.

Mozart und da Ponte begnügen sich freilich nicht mit der stereotypen Verfestigung dieser Symmetrien. Immer wieder brechen sie diese auf oder variieren sie. Alles findet aber vor dem symmetrischen Hintergrund statt, von dem es sich nicht entkoppeln lässt und der für den unverwechselbaren Reiz von *Così fan tutte* eines der wichtigsten Elemente ist.

Lassen wir uns in Analogie zu unseren Überlegungen zum Bild von Oskar Putz auch hier von den Symmetrien zu inhaltlichen Fragen verleiten! Haben wir dort die durch die geometrische Grobstruktur gegebenen Symmetrien auf die Feinstruktur und auf den Inhalt (die Farbe) angewendet, so wollen wir hier die durch die Primärstrukturen gegebenen Symmetrien benutzen, um weitere (sekundäre) Strukturen aufzudecken. Man wird schnell fündig:

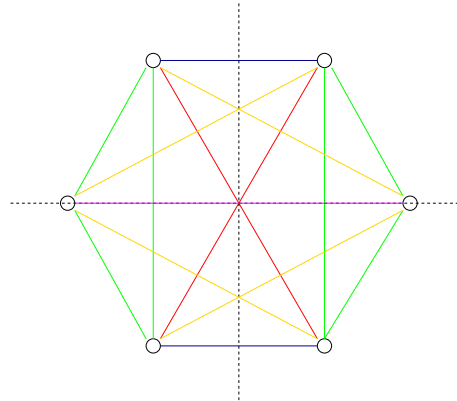
Die zentrale waagrechte Achse des Sechsecks bleibt invariant unter  $V$ , kann in die bereits vorliegende Struktur also ohne Symmetriebruch eingefügt werden. Inhaltlich entspricht dem die Ausgestaltung der Beziehung des ungleichen Paares Despina und Don Alfonso, die sich Mozart und da Ponte tatsächlich nicht entgehen lassen. Trotz aller Verschiedenheit in Alter und sozialer Stellung verbinden Despina und Don Alfonso ein Zweckbündnis (wenn die Wette gewonnen wird, gibt es pekuniäre Belohnung) und eine ausgesprochen zynische Haltung zu Treue und moralischen Fragen.

Unter allen möglichen Verbindungslinien gibt es vier, die wir noch nicht näher ins Auge gefasst haben: Despina-Guglielmo, Despina-Ferrando, Don Alfonso-Dorabella und Don Alfonso-Fiordiligi. Jede für sich bleibt unter den Spiegelungen nicht invariant. Ihre gespiegelten Bilder ergeben die anderen. Nachfolgend eine Veranschaulichung für die Verbindung Despina-Guglielmo, die nach Spiegelung um die waagrechte Achse zu Despina-Ferrando wird; Spiegelung an der senkrechten Achse macht daraus die Verbindungen Don Alfonso-Fiordiligi und Don Alfonso-Dorabella.

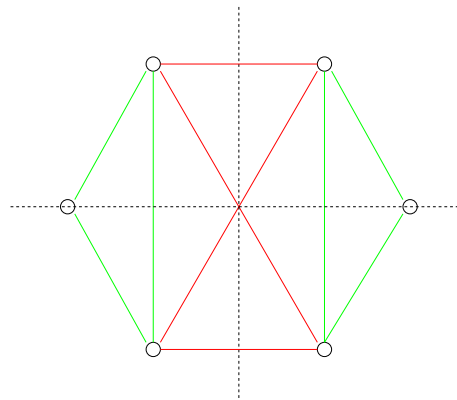


In den Inhalt der Oper übersetzt legt das die Frage nahe: Inwiefern bestehen Analogien in den Beziehungen Despina-Guglielmo, Despina-Ferrando, Don Alfonso-Fiordiligi und Don Alfonso-Dorabella? Die Oper dauert drei Stunden, während derer man nicht umhinkommt, sich auch mit dieser Frage zu beschäftigen.

Primär- und Sekundärstrukturen in einem Diagramm vereint ergeben folgendes Bild.



Noch eine Variante ist erwähnenswert. Sie ergibt sich, indem man die alten und neuen Partnerschaften als grundsätzlich gleichartig einstuft und im Diagramm der Primärstrukturen zu einer einzigen Art von Paarbildung verschmilzt, hier in roter Farbe:

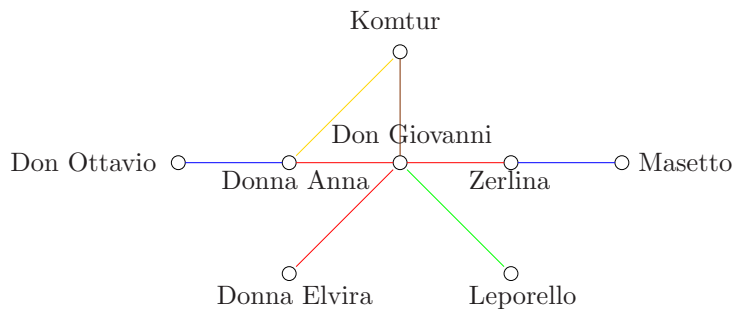


Alle bisherigen Symmetrien bleiben in diesem Diagramm erst recht erhalten. Es kommen aber neue hinzu, die sich nicht als geometrische Symmetrien eines regelmäßigen Sechsecks deuten lassen. Zum Beispiel die Vertauschung von Dora-bella und Fiordiligi bei Fixierung aller anderen Personen sowie die sich daraus ergebenden Verknüpfungen mit den anderen Symmetrien. Welche inhaltlichen Spekulationen lassen sich ausgehend von der resultierenden achtelementigen Symmetriegruppe anstellen? Die Leserin und der Leser mögen die Phantasie schweifen lassen!

### 2.3 Don Giovanni — Tanz ums dramaturgische Zentrum

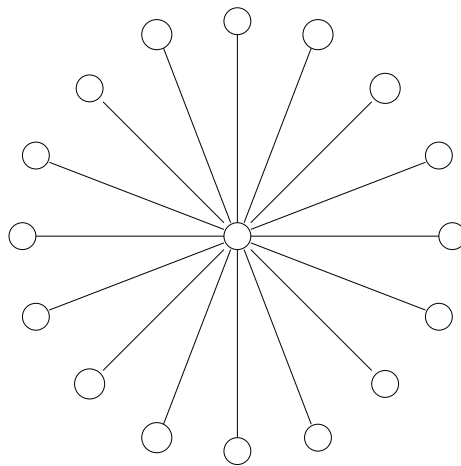
Über die Handlung der Oper *Don Giovanni* muss man für unsere Zwecke nur wenig wissen: Don Giovanni, ein Herr von noblem Stande mit einem wenig charakterstarken Diener namens Leporello, macht sich an alle Frauen heran, die ihm begegnen, verlässt sie aber nach kürzester Zeit wieder. Knapp vor Beginn der Handlung ist es, wie man etwas später erfährt, der vornehmen Donna Elvira so ergangen. Während der Vorhang aufgeht, versucht Don Giovanni im Verborgenen gerade, Donna Anna, die nicht minder vornehme Verlobte des Don Ottavio, zu vergewaltigen. Ihr Vater (der Komtur) eilt zu Hilfe, wird aber im Duell von Don Giovanni getötet. Nur wenig später bezirzt Don Giovanni auch noch das Bauernmädchen Zerlina, das von den Versprechungen des wohlhabenden Herrn nicht gänzlich unberührt bleibt, obwohl sie mit ihrem treuherzigen und etwas schwerfälligen Bräutigam Masetto und umgeben von einer Festgesellschaft gerade ihre Hochzeit feiert. Im Gegensatz zu seinen unzähligen früheren Eroberungen ist Don Giovanni im Verlauf der gesamten Oper selbst nicht mehr erfolgreich. Ganz im Gegenteil: Am Schluss wird er zur Strafe für seine Reulosigkeit sogar von den Flammen der Hölle verschlungen.

Ganz im Kontrast zu *Così fan tutte*, wo ein extrem ausgewogenes Gefüge von sechs Personen von gleichem Gewicht die Austauschbarkeit des Individuums dokumentiert, tanzt im *Don Giovanni* alles um die zentrale Titelfigur — auch wenn alle Personen sehr fein gezeichnet und keineswegs Nebenfiguren sind und Don Giovanni selbst wenig schmeichelhaft dargestellt wird. In einem schematischen Diagramm der wichtigsten Beziehungen der handelnden Personen untereinander kommt das wie folgt zum Ausdruck.



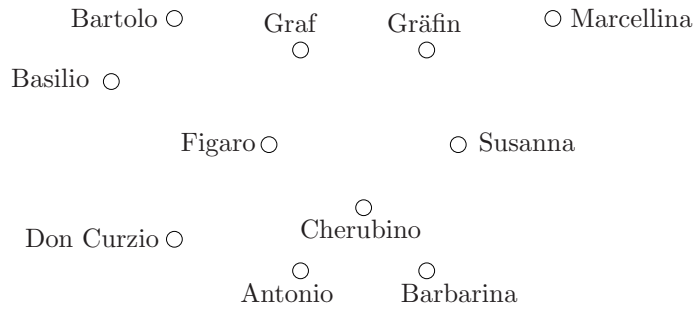
Gewisse Symmetrien lassen sich ausmachen, insbesondere, wenn man die symmetriestörende Verbindung zwischen Donna Anna und dem Komtur ignoriert. Sie spielen im *Don Giovanni* aber eine weit geringere Rolle als in *Così fan tutte*. Dennoch lässt sich Interessantes ausmachen. Die drei Frauen sind grundverschiedene Persönlichkeiten. Darauf geht Don Giovanni aber bestenfalls sehr oberflächlich und aus opportunistischen Gründen ein. Er ist zwar flexibel, aber nicht sensibel. Jedes Mittel ist ihm recht, an die Frauen heranzukommen. Individuelle Unterschiede zwischen ihnen werden also in Kontrast gesetzt zur

geradezu psychopathischen Manie eines egozentrischen und rücksichtslosen Verbrechers, der bei aller standesgemäßen Noblesse auch auf feinere Signale seiner Umgebung immer nur mit denselben primitiven Verhaltensweisen reagiert. Wenn man so will, handelt es sich also um einen Konflikt zwischen der Unterschiedlichkeit der Individuen (Asymmetrie) und dem Verhalten Don Giovannis, der Frauen behandelt, als wären sie alle austauschbar (Symmetrie). Mathematisch gesprochen: Don Giovanni unterwirft alle Frauen, oder wenigstens jene  $640 + 231 + 100 + 91 + 1003 = 2065$  Eroberungen, von denen Leporello berichtet, der vollen symmetrischen Gruppe  $S_{2065}$ . Das heißt, dass im folgenden Diagramm die (als 2065 zu denkenden) Strahlen, die von der zentralen Titelfigur ausgehen, untereinander beliebig ausgetauscht werden dürfen.

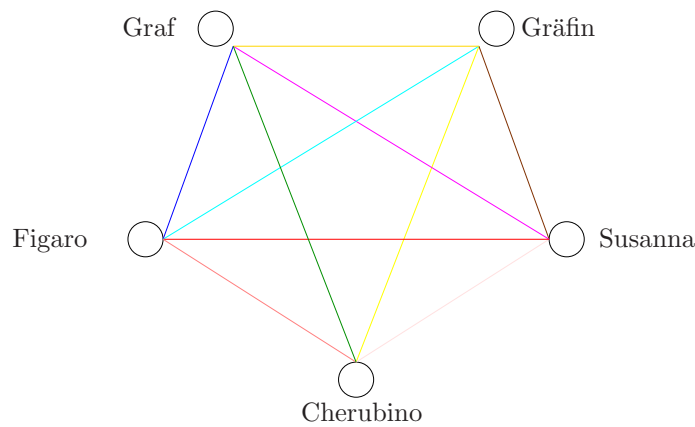


## 2.4 Le Nozze di Figaro — ein egalitäres Geflecht von Individualitäten

Lag der besondere Reiz von *Così fan tutte* im Reichtum an Symmetrien, der von *Don Giovanni* wenigstens teilweise im Kontrast zwischen Symmetrie und Asymmetrie, so ist in *Le Nozze di Figaro*, einem Hymnus auf Reichtum und Vielfalt menschlichen Zusammenlebens, gar nichts symmetrisch. Hier eine Kurzfassung der Handlung zu geben, führte angesichts der Schnelligkeit und Kompliziertheit der unzähligen Handlungsstränge viel zu weit. Fast alle kombinatorisch möglichen Beziehungen unter den Personen der Handlung sind nicht nur liebevoll gestaltet, sondern haben einen jeweils unverwechselbaren Charakter. In einem aussagekräftigen Diagramm müsste entsprechend ein großer Teil aller möglichen Verbindungen zwischen je zwei Punkten mit einer jeweils eigenen Farbe versehen sein. Darauf verzichte ich. Denn bei elf Personen



sind 55 Verbindungen möglich. Doch auch wenn man lediglich die besonders zentralen fünf Personen herausgreift,



hat man es mit immerhin zehn Beziehungen zu tun. Zu jeder davon wird dem Kenner dieser Oper viel Charakteristisches einfallen, was auf keine der anderen zutrifft.

Dennoch, oder vielleicht gerade deshalb ist diese Oper nicht nur formal besonders egalitär, sondern auch in einem politischen Sinn<sup>7</sup>. Die Verschiedenheit der Personen und ihrer Beziehungen erklärt sich nämlich vor allem aus den unterschiedlichen gesellschaftlichen Positionen, in die sie vom Schicksal gestellt worden sind, kaum aus Unterschieden in ihren durchwegs sehr allgemein menschlichen Anlagen und Bedürfnissen. Dass es dem Diener Figaro (unter entscheidender Mithilfe von Gräfin und Susanna) gelingt, die unmoralischen Absichten des Grafen zu durchkreuzen und dabei auch selber weitgehend anständig zu bleiben, liegt nicht an gottgegebenen Fähigkeiten. Figaro ist in seiner Position intellektuell wie moralisch nur weniger korrumpiert worden als der Graf. Auch das unterschiedliche Verhalten von Graf und Gräfin sagt uns vermutlich mehr über die gesellschaftlichen Rollen von Mann und Frau als über angeborene individuelle Unterschiede.

<sup>7</sup>Noch mehr gilt das für die literarische Vorlage, einem Theaterstück von Pierre Augustin Caron de Beaumarchais (1732-1799), das in den letzten Jahren vor der Französischen Revolution geradezu als politischer Sprengstoff wirkte.

## 2.5 Spekulation am Rande: Mozarts Desillusionierung

Das Thema *Symmetrie* legte es nahe, bei den drei Opern von Mozart und da Ponte mit *Così fan tutte* zu beginnen. Die tatsächliche Chronologie war aber die umgekehrte: Figaro war 1786 die erste der drei Opern, es folgte 1787 Don Giovanni, und *Così fan tutte* war 1790 das letzte gemeinsame Werk der beiden Autoren. Sucht man nach einem roten Faden in dieser Entwicklung, so zeugt der Blickwinkel dieses Artikels nicht gerade von Mozarts Optimismus hinsichtlich der Natur des Menschen.

Im *Figaro* agieren alle Personen individuell mit menschlichen Stärken und Schwächen von beeindruckender Glaubwürdigkeit. Schlussendlich setzt sich die Kraft solider und durch die Zeit bewährter Beziehungen durch und bringt alle Personen zurück auf den Weg eines zivilisierten Miteinanders. Auch die Privilegierten werden auf ein menschliches Maß zurechtgestutzt, sobald sie in Maß- und Schamlosigkeit abgleiten.

Im *Don Giovanni* bleibt Maßlosigkeit zwar auch nicht ungestüht. Bis es so weit ist, entstehen aber mancherlei Beschädigungen, die nicht so einfach rückgängig gemacht werden können. Der Anteil von Opportunismus und Rücksichtslosigkeit der handelnden Personen hat gegenüber der im Figaro vorherrschenden Liebenswürdigkeit sicher zugenommen.

In *Così fan tutte* schließlich ist die Austauschbarkeit der Menschen das eigentliche Thema, gestaltet vor allem durch Einsatz zahlreicher Symmetrien. Die Personen sind zwar nicht so böse wie Don Giovanni, der Betrug gegen andere wie auch sich selbst im Fall der beiden Liebespaare sowie der Zynismus von Despina und Don Alfonso gegenüber (vermeintlichen?) Werten treffen uns aber umso mehr; wahrscheinlich gerade in dem Ausmaß, in dem die vordergründig unrealistische Komödie in ihrer Tiefe Reales in uns anspricht.

Weitreichende Spekulationen — angeregt durch unsere tief angelegte Neigung, Symmetrien zu suchen, wo immer sie vorzufinden sind oder wo wir sie auch nur vermuten!

## 3 Galoistheorie: Symmetrien auf mehreren Abstraktionsstufen

Im vorliegenden kurzen dritten Kapitel besteht mein Ziel darin, auch dem Nichtmathematiker eine Ahnung zu vermitteln, worin die Schönheit abstrakter Mathematik typischerweise besteht: im Zusammenwirken von Symmetrien auf mehreren Abstraktionsstufen. Weil hier nicht der Platz für eine mathematisch schlüssige Einführung in die Galoistheorie ist, kann ich mein Ziel nur in einem metaphorischen Sinn verfolgen, indem ich mich auf die Andeutung von

Analogien zum Bisherigen beschränke.<sup>8</sup>

Mehr noch als im unmittelbar anschaulichen geometrischen Sinn spielen in der modernen Mathematik Symmetrien auf sehr hohen Abstraktionsstufen eine zentrale Rolle. Grundsätzlich lässt sich das genauso verstehen wie die Abstraktionen zu den Mozartopern im vorigen Kapitel: Irgendwelche Objekte (dort Personen der Handlung) stehen in irgendwelchen Beziehungen zueinander. Die sich so ergebenden Strukturen werden Transformationen (Vertauschungen der Objekte) unterworfen. Diejenigen Transformationen, bei denen die Beziehungen invariant bleiben, sehen wir als *Symmetrien* der Struktur an.

Historisch erstmals aufgetreten ist diese Denkweise um 1800 im Zusammenhang mit dem Lösen algebraischer Gleichungen. Nach wichtigen Vorarbeiten<sup>9</sup> war es vor allem Évariste Galois (1811-1832), der in der nach ihm benannten Theorie ein Ideengefüge schuf, das unter Mathematikern allgemein als der Inbegriff von Schönheit in ihrer Wissenschaft empfunden wird. Hermann Weyl (1885-1955) schreibt in [7] über die von Galois in der Nacht vor seinem tödlichen Duell im Alter von knapp 21 Jahren hastig festgehaltenen mathematischen Gedanken: *Ich wage die Behauptung, daß dieser Brief, auf die Originalität und die Tiefe der darin niedergelegten Ideen hin beurteilt, das inhaltreichste Stück Literatur ist, das wir besitzen.*

Interessanterweise dauerte es mehr als eine Generation, bis der bereits im Zusammenhang mit der Kleinschen Vierergruppe erwähnte Felix Klein (1849-1925) in seinem richtungsweisenden sogenannten *Erlanger Programm* vorschlug, auch Geometrie systematisch unter dem Gesichtspunkt zu betreiben, welche Eigenschaften geometrischer Objekte durch welche Transformationen invariant bleiben. Unsere Untersuchung des Bildes von Oskar Putz im ersten Kapitel lässt sich im Sinne dieses Programms interpretieren.

Werfen wir nun einen oberflächlichen Blick auf vier Symmetriephänomene in der Galoistheorie. Lassen Sie sich nicht verunsichern, wenn einiges unscharf bleibt; die Knappheit der Darstellung kann unmöglich ein Detailverständnis gewährleisten.

---

<sup>8</sup>Wer mehr wissen möchte, sei auf [6] verwiesen, ein aktuelles Musterbeispiel für mathematische Tiefe in populärwissenschaftlichem Kontext. Für eine mathematisch vollständige Darstellung kann man irgendein Lehrbuch der Algebra oder speziell der Galoistheorie bemühen. Besonders bemerkenswert ist die sehr schlanke und gut verständliche Einführung [2] von Emil Artin (1898-1962), einem Mathematiker allerersten Ranges. Auch für Interessenten am großen Thema *Symmetrie* insgesamt gibt es einen Klassiker aus der Feder einer mathematischen Autorität von historischer Größe: Das Buch [7] von Hermann Weyl. Über Galoiskorrespondenzen im Kontext der Allgemeinen Algebra kann man in [4] nachlesen.

<sup>9</sup>Genannt seien Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Paolo Ruffini (1765-1822) und Niels Henrik Abel (1802-1829).



### 3.1 Erste Stufe: Symmetrien von Gleichungslösungen

Die algebraische Gleichung  $x^2 - 2 = 0$  hat die beiden Lösungen  $\sqrt{2}$  und  $-\sqrt{2}$ . Denn wenn man einen dieser Werte in der Gleichung für  $x$  einsetzt, erhält man auch auf der linken Seite den Wert 0. Dass es genau zwei Lösungen gibt, hängt damit zusammen, dass die Gleichung den Grad zwei hat, d.h. dass  $x^2$  die höchste auftretende Potenz der Variablen  $x$  ist. Ohne dass ich näher auf Feinheiten (komplexe Lösungen, Vielfachheiten) eingehe, sei nur erwähnt, dass ganz allgemein algebraische Gleichungen so viele Lösungen haben, wie ihr Grad beträgt.

Die Lösungen einer gegebenen Gleichung lassen wir nun eine ähnliche Rolle spielen wie die Eckpunkte von Dreiecken oder Quadraten im ersten Teil oder wie die Personen in einer Oper im zweiten Teil. Wir unterwerfen sie Vertauschungen. Im Fall der Gleichung  $x^2 - 2$  beispielsweise könnte man  $\sqrt{2}$  mit  $-\sqrt{2}$  vertauschen. Allgemein gibt es Vertauschungen, die die relevante Struktur respektieren und solche, die sie verletzen. Im ersten Teil bestand die relevante Struktur in geometrischen Verhältnissen, im zweiten Teil in Beziehungen zwischen handelnden Personen. Nun geht es um die arithmetische Struktur, die durch die Grundrechnungsarten gegeben ist. So wie die Eckpunkte eines Dreiecks bei Drehungen und Spiegelungen das ganze Dreieck mit sich ziehen, ziehen die Lösungen von Gleichungen auch ihre Summen, Produkte, Differenzen und Quotienten mit sich. Mengen von Zahlen, die derart mitgezogen werden, heißen *Körper*. (Wohlgermerkt: Körper weder in einem geometrischen noch in einem physikalischen, sondern eben in einem spezifisch algebraischen Sinn.) Die Transformationen nennt man (*Körper-*)*Automorphismen*. Sie sind die Symmetrien auf der ersten Stufe.

### 3.2 Zweite Stufe: Die Galoiskorrespondenz

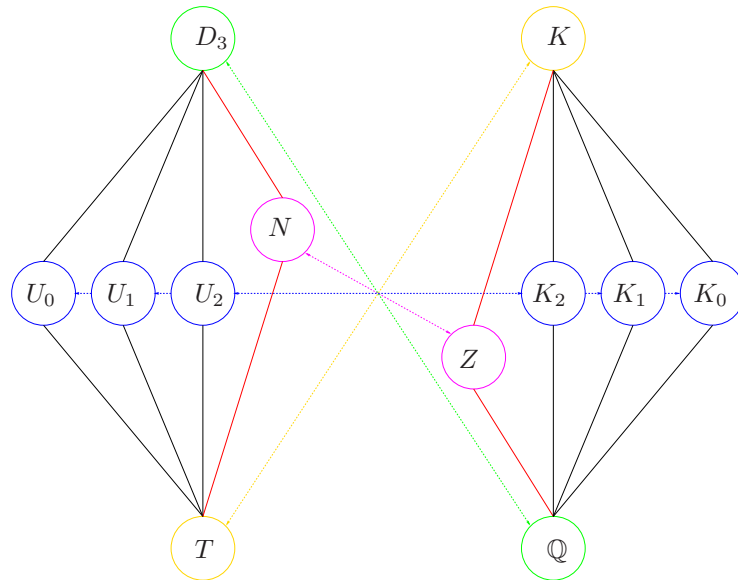
Auf der zweiten Stufe geht es um das schon in Abschnitt 1.7 formulierte Prinzip *je mehr desto weniger*, das zwischen Symmetrien und Invarianten herrscht. Eingangs ein paar kurze Bemerkungen.

So wie es nur acht geometrische Symmetrien des Quadrats gibt (obwohl vier Punkte sogar 24 Permutationen erlauben), lässt die arithmetische Struktur der Körper, die sich mit den Lösungen einer algebraischen Gleichung ergeben, nur gewisse Automorphismen zu. In jedem Fall bilden diese eine Gruppe, die sogenannte *Galoisgruppe* der Gleichung. Im Fall einer Gleichung dritten Grades beispielsweise gibt es drei Lösungen, die permutiert werden können. Es kommen also die Untergruppen der Gruppe  $S_3$  in Frage. Wir haben sie in Abschnitt 1.4 in der Sprache der Symmetriegruppe  $D_3$  des Dreiecks kennengelernt. Und zwar gibt es vier Typen von Untergruppen: Alle sechs Symmetrien, die dreielementige Drehgruppe, zweielementige Spiegelungsgruppen (in drei Exemplaren) und die

einelementige Gruppe.<sup>10</sup>

Beim Bild von Oskar Putz waren die Invarianten geometrische und farbliche Beziehungen, bei den Mozartopern persönliche. In der Galoistheorie sind die den Untergruppen zugehörigen Invarianten sogenannte *Fixpunktkörper*, bestehend aus jenen Zahlen, die durch die Automorphismen der Untergruppe nicht verändert werden.

Die Symmetrie auf dieser zweiten Stufe wird durch den Hauptsatz der Galoistheorie präzisiert. Er besagt, dass in einem Diagramm der Untergruppen (links) und der Fixpunktkörper (rechts)<sup>11</sup> durch die geschilderte Invariantenbeziehung eine exakte Punktsymmetrie — auch interpretierbar als Drehung um  $180^\circ$  — herzustellen ist, hier dargestellt für die Gleichung  $x^3 - 2 = 0$  als Beispiel.<sup>12</sup>



Die Sonderrolle der roten Kanten stellt die Überleitung zur nächsten Stufe von Symmetrien dar.

### 3.3 Dritte Stufe: Der Übergang zur Grobstruktur

Wir erinnern uns an die Grobstruktur im Bild von Oskar Putz (Abschnitt 1.3), dort in einem geometrischen Sinn. Aber auch bei Gruppen, aufgefasst als al-

<sup>10</sup>Tatsächlich treten alle Typen auch wirklich auf, wie sich mit Hilfe der Theorie an den Beispielen  $x^3 - 2 = 0$ ,  $x^3 - 3x + 1 = 0$ ,  $x^3 - 1 = 0$  und  $x^3 - x = 0$  nachprüfen lässt.

<sup>11</sup>Tatsächlich treten dabei sogar alle Unterkörper des im Diagramm mit  $K$  bezeichneten sogenannten *Zerfällungskörpers* der Gleichung auf.

<sup>12</sup>vergleiche auch die Diagramme jeweils am Ende der Abschnitte 1.4 und 1.7.

gebraische Strukturen, spielen Strukturvergrößerungen eine wichtige Rolle. Das lässt sich an folgendem einfachen Beispiel verstehen.

Die ganzen Zahlen  $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  bilden eine (unendliche) Gruppe, wenn wir als Verknüpfung die Addition verstehen. Wir vergrößern diese Struktur, indem wir nicht mehr alle Zahlen unterscheiden, sondern nur mehr nach *gerade* und *ungerade*, wodurch zwei Klassen zustandekommen. Diese beiden Klassen gehorchen den Additionsregeln

$$\text{gerade} + \text{gerade} = \text{ungerade} + \text{ungerade} = \text{gerade}$$

sowie

$$\text{gerade} + \text{ungerade} = \text{ungerade} + \text{gerade} = \text{ungerade}$$

und lassen sich zusammen wieder als Gruppe auffassen, bestehend aus nur zwei Elementen.

Eine analoge Strukturvergrößerung ist generell bei Gruppen möglich, zum Beispiel bei der Gruppe von Dreieckssymmetrien. Nennen wir aus Analogiegründen Identität und Drehungen *gerade*, Spiegelungen *ungerade*, so gelten dieselben Rechenregeln wie oben: Drehung verknüpft mit Spiegelung liefert Spiegelung, also  $\text{gerade} + \text{ungerade} = \text{ungerade}$  etc. Dabei bilden die geraden Symmetrien eine Untergruppe, die ungeraden nicht. Untergruppen, die wie die der geraden Symmetrien mit einer Vergrößerung der Gruppenstruktur einhergehen, nennt man *Normalteiler*. Die vergrößerte (hier zweielementige) Struktur heißt *Faktorgruppe*. Normalteiler zeichnen sich durch eine besondere Symmetrie aus, nämlich durch die Invarianz unter gewissen Gruppenautomorphismen, den sogenannten *inneren Automorphismen*. In diesem Sinne hängen die rote Farbe und die Bezeichnung  $N$  im Diagramm des vorigen Abschnitts mit einer weiteren, wieder ganz neuartigen Symmetrie auf einer dritten Stufe zusammen. Doch wozu diese Betrachtungsweise?

### 3.4 Vierte Stufe: Auflösbarkeit und Vertauschbarkeit

So ästhetisch die besprochenen Zusammenhänge für sich bereits sind, für Galois waren sie nicht Selbstzweck. Ihm ging es um Lösungsformeln für algebraische Gleichungen. Für Grad 2, also für quadratische Gleichungen, kannten schon die Babylonier Lösungsmethoden. Die allgemeine Lösungsformel, mit der heutzutage jeder Schüler Bekanntschaft macht, ist in ihrer Substanz über 1000 Jahre alt. Formeln für Gleichungen dritten und vierten Grades wurden in der Renaissance gefunden. Ab Grad 5 scheiterten aber alle Bemühungen. Erst knapp vor Galois gelang Niels Henrik Abel (1802-1829) der Beweis, dass es keine allgemeingültige Formel geben kann. Manche speziellen Gleichungen höheren Grades sind aber sehr wohl durch eine Formel auflösbar. Galois' große Leistung war die Erkenntnis, dass es dabei nur auf die Struktur der Galoisgruppe der Gleichung ankommt. Und wie zeigt sich diese sogenannte *Auflösbarkeit* an der Gruppe?

Nehmen wir zur Illustration nochmals die Gleichung  $x^3 - 2 = 0$ . Die Untergruppen ihrer Galoisgruppe liegen so wie im symmetrischen Diagramm in Abschnitt 3.2 dargestellt. Entscheidend für die Auflösbarkeit ist die aufsteigende Kette  $T - N - D_3$  auf der linken Seite des Diagramms.  $D_3$  insgesamt ist zwar nicht kommutativ, weil die Verknüpfung von zwei Transformationen von der Reihenfolge abhängt,  $ab = ba$  also nicht immer gilt. Jedoch ist  $N$  (entspricht den Drehungen eines Dreiecks) kommutativ, ebenso wie die resultierende zweielementige Faktorgruppe. In der allgemeinen Definition einer auflösbaren Gruppe lässt man auch längere aufsteigende Ketten dieser Art zu. Somit lautet das Theorem von Galois in heutiger Sprechweise: *Eine algebraische Gleichung ist auflösbar genau dann, wenn ihre Galoisgruppe auflösbar ist.* Als tieferer Grund für die Unmöglichkeit allgemeiner Lösungsformeln für algebraische Gleichungen fünften und höheren Grades erweist sich, dass die symmetrischen Gruppen  $S_5, S_6, \dots$  nicht auflösbar sind.

Die vierte Stufe von Symmetrien in der Galoistheorie erblicken wir also in der Vertauschbarkeit  $ab = ba$  aller Elemente in gewissen Faktorgruppen.

Nachdem wir den vierten und letzten Gipfel in der Kaskade der Galoisschen Symmetrien gesichtet haben, dürfen wir in Ruhe unsere Eindrücke verarbeiten.

## 4 Fachübergreifendes Resümee

### 4.1 Grundsätzliches und Persönliches zum Verhältnis von Kunst und Mathematik

Keinesfalls lässt sich Kunst auf Mathematik zurückführen, und umgekehrt wird die Mathematik zu den Wissenschaften gezählt, nicht zu den Künsten. Dennoch hat die Beschäftigung mit den wechselseitigen Verflechtungen der beiden Bereiche jahrtausendealte Tradition. Als ziemlich aktuelle Beispiele erwähne ich Ausstellungen in 2007 in Würzburg und 2008 in Wien<sup>13</sup>. Wenn ich dieser Tradition — hier ausgehend von einem Bild von Oskar Putz — ein weiteres Mosaiksteinchen hinzufüge oder, realistischer betrachtet, ein altbekanntes nur minimal variere, so ist es angebracht, den Gesichtspunkt, unter dem ich das tue, klarzustellen.

Wenigstens zu Beginn nähere ich mich dem Thema mit folgender, traditioneller Einschätzung: Ein überzeugendes Kunstwerk wirkt unmittelbar durch sein ureigenes Medium, unabhängig von einer theoretischen Analyse. Und umgekehrt ist einem Werk, das in seiner unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmbarkeit weniger überzeugt, auch durch den Nachweis abstrakter Tiefenstrukturen schwer Leben als Kunstwerk einzuhauchen. Mathematik und Kunst sind nicht einan-

---

<sup>13</sup>siehe [5] und [3]

der unter- oder übergeordnete Sphären, sondern gleichrangige Ausdrucksformen derselben Grundfunktionen menschlichen Bewusstseins.

Obwohl Mathematiker, sehe ich es nicht als mein primäres Anliegen, mathematische Strukturen in Kunstwerken aufzudecken. Ich halte es für unmöglich und auch gar nicht erstrebenswert, Kunst als Mathematik zu entlarven. Es gilt viel mehr, universelle Bewusstseinsprozesse zu erkennen, die sich als gemeinsames, oft nur in abstrakten Kategorien fassbares Substrat von Phänomenen erweisen, die äußerlich wenig gemeinsam haben — in unserem Fall Bildende Kunst, Oper und Mathematik. Das ist nicht nur von theoretischem Interesse. Analogien helfen, ausgehend von Vertrautem neue Bereiche zu erschließen.

Mein zentrales Anliegen in diesem Aufsatz war, Assoziationen nachvollziehbar zu machen, die sich mir als Mathematiker (und Opernliebhaber) angesichts eines Bildes mit ausgeprägter geometrischer — genauer gesagt: symmetrischer — Struktur aufdrängen. Der mathematische Gesichtspunkt ist alles andere als artifizuell. Keineswegs läuft er der menschlichen Intuition zuwider, sondern er präzisiert diese auf natürliche und gleichzeitig konsequente Weise.

Dass ich die Gelegenheit benutze, am Beispiel der Galoistheorie nicht nur den Erkenntniswert, sondern vor allem auch den ästhetischen Reiz meiner Disziplin anzupreisen, möge man mir nachsehen.

## 4.2 Symmetrie als Grundbedürfnis unseres Bewusstseins

Ich rufe die äußerlich sehr unterschiedlichen Gegenstände der ersten drei Kapitel in Erinnerung: Ein Bild von Oskar Putz, die drei gemeinsamen Opern von Mozart und da Ponte und die Theorie von Galois aus der Algebra. Sehr schnell und zwanglos sind wir auf einen gemeinsamen Gesichtspunkt gestoßen — nämlich den von Symmetrie und Asymmetrie — und haben dabei Einsicht in offenbar sehr fundamentale Funktionsweisen unseres Bewusstseins gewonnen. Ich will sie nun zusammenfassen.

Womit immer wir auch konfrontiert sein mögen, unser Wahrnehmungsapparat versucht, komplexe Gebilde als aus voneinander unterscheidbaren Einzelteilen zusammengesetzt zu interpretieren. Finden wir keine solche Untergliederung, so haben wir es mit einer amorphen Masse zu tun. Sie enthält keine Information, und wir verlieren bald das Interesse daran.

Wenn wir dagegen fündig werden, kommt es uns sehr darauf an, ob die Teile — seien es nun kleinere Teilquadrate, aus denen sich ein größeres Bild zusammensetzt, seien es Personen einer dramatischen Handlung oder seien es mehrere Lösungen einer algebraischen Gleichung — in einer für uns erkennbaren sinnvollen Beziehung zueinander stehen. Können wir keine erkennen, entsteht der Eindruck von Chaos. Obwohl dies streng genommen an einem Übermaß von Information liegt, also das extreme Gegenteil einer amorphen Masse vorliegt,

reagieren wir dennoch wieder mit Desinteresse, weil wir verwirrt sind und die Informationen nicht verarbeiten können.

Als sinnvolle Beziehungen zwischen Teilen sind uns begegnet: Geometrische Transformationen wie Drehungen und Spiegelungen, die einen Teil in den anderen überführen; Austausch von Personen, wobei soziale Gefüge mehr oder weniger verändert werden; Permutationen von Lösungen von Gleichungen, die zu strukturerhaltenden Transformationen der gesamten algebraischen Struktur führen. Für all diese Situationen bringt das Wort *Symmetrie* das, worauf es uns ankommt, am besten zum Ausdruck.

Weil Symmetrien eines beliebigen Objektes stets reversibel sind und auch miteinander zu weiteren Symmetrien verknüpft werden können, stößt man auf den Begriff der (Symmetrie-)Gruppe, einem der wichtigsten Konzepte der modernen Mathematik. Je nachdem, welche invarianten Strukturelemente man im Auge hat, erhält man unterschiedliche Symmetriegruppen. Je mehr Strukturelemente, desto weniger Transformationen enthält die Symmetriegruppe — und umgekehrt.

Konzentrieren wir uns auf gewisse Strukturelemente und die zu ihnen gehörigen Symmetrien, so kann es sein, dass unter diesen Symmetrien noch zusätzliche Strukturelemente invariant sind. Unsere Aufmerksamkeit wird unwillkürlich auf diese zusätzlichen Invarianten gelenkt.

Entsprechendes gilt auch umgekehrt: Gehen wir von gewissen Symmetrien und den dazu gehörigen Invarianten aus, so könnten letztere zusätzliche Symmetrien zulassen, die unser Interesse gewinnen.

In der Wissenschaft stellt sich in solchen Situationen die Frage: *Wie sind die neuen Invarianten bzw. Symmetrien inhaltlich zu interpretieren?* Die Mathematik ist voll von Beispielen dafür. Immer läuft alles darauf hinaus, den sogenannten Abschluss in einer Galoiskorrespondenz zu beschreiben. Theoreme, die das leisten, werden stets als Kernstücke der jeweiligen Theorie empfunden.

Dem Künstler eröffnet sich die Wahlmöglichkeit, vorhandene Symmetrien auszugestalten oder zu brechen. Vielleicht entsteht sogar ein reizvoller Schwebezustand.

Gemeinsam ist uns allen, dass wir Symmetrien wahrnehmen und unwillkürlich Stellung beziehen. Die damit verbundenen ästhetischen Empfindungen bedürfen keiner Bewertung. Was der eine als symmetrisch, ausgewogen und angenehm empfindet, mag den anderen langweilen. Bei Symbolen und Codierungen variiert das Verständnis individuell stark, weil es in hohem Maße von kulturellem und sozialem Hintergrund oder von sonstigem externen Kontext abhängt. Symmetrien dagegen sind in der Lage, auf einer sehr allgemein menschlichen Ebene Form mit Sinn aufzuladen und so zwischen Form und Inhalt zu vermitteln. Wer immer sich auf ein mit Symmetrien behaftetes Kunstwerk einlässt, wird die dem Wesen unserer Wahrnehmung innewohnenden Fragen stellen —

wahrscheinlich ohne Verwendung mathematischer Terminologie, aber intuitiv geradezu unausweichlich.

## Literatur

- [1] Rudolf Arnheim, *Anschauliches Denken. Zur Einheit von Bild und Begriff*. Aus dem Amerikanischen übersetzt vom Verfasser. DuMont Buchverlag Köln (1977), 6.Auflage 1988. Originaltitel: *Visual Thinking*, The Regents of the University of California (1969).
- [2] Emil Artin, *Galoissche Theorie*, Übersetzung nach der zweiten englischen Auflage. Verlag Harri Deutsch, Zürich–Frankfurt am Main (1973).
- [3] *Genau und anders. Mathematik in der Kunst von Dürer bis Sol LeWitt*. Ausstellungskatalog. Herausgegeben vom Museum Moderner Kunst, Stiftung Ludwig, Wien, Wolfgang Drechsler. Verlag für moderne Kunst Nürnberg (2008).
- [4] Thomas Ihringer, *Allgemeine Algebra*, B. G. Teubner Stuttgart (1988).
- [5] Marlene Lauter (Hrsg.), *Mathematik und konkrete Kunst*, Ausstellung im Museum Kulturspeicher, Würzburg, in Kooperation mit dem Institut für Mathematik der Universität Würzburg, 10. Februar – 29. April 2007.
- [6] Peter Pesic, *Abels Beweis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, Korrigierter Nachdruck (2007). Deutsche Übersetzung von Markus Junker. Englische Originalausgabe *Abel's Proof*, MIT Press, Cambridge, MA, USA (2003).
- [7] Hermann Weyl, *Symmetry*. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1952), Neudruck 1989.