

1 Mathematische Prozesse im Widerstreit

REINHARD WINKLER

ABSTRACT: Bei der Untersuchung von Prozessen, in denen Mathematik im Spiel ist, ergibt sich die Notwendigkeit einer sorgfältigen Unterscheidung verschiedener Arten und Betrachtungsweisen. Näher untersucht sollen hier werden: historische, gesellschaftliche, technologische, psychologische und innermathematische Prozesse, die jeweils selbst wieder in verschiedenen Ausprägungen auftreten.

Schnell fällt auf, dass sich die Verschiedenheit solcher Prozesse nicht nur auf ihre innere Natur bezieht, sondern auch auf oft gegenläufige Wirkungen, die – beabsichtigt oder unbeabsichtigt – von ihnen ausgehen. Nicht alle der zu beobachtenden Wirkungen können gleichermaßen als wünschenswert gelten. Daher stellt sich die Aufgabe einer sorgfältigen und kritischen Analyse, mit möglichen Konsequenzen für den Mathematikunterricht an den Schulen und Universitäten sowie für die Praxis des Wissenschaftsbetriebes.

1.1 Die Vielfalt mathematischer Prozesse

Zu Beginn sollen einige Gesichtspunkte behandelt werden, unter die mathematische Prozesse gestellt werden können. Ziel ist keinesfalls Vollständigkeit, geschweige denn eine verbindliche Systematik. Lediglich die Vielfalt der Möglichkeiten soll plausibel und für das Weitere greifbar gemacht werden. Dabei machen historische Prozesse den Anfang, sodann folgen gesellschaftliche, technologische, psychologische und schließlich innermathematische Prozesse. In allen Fällen führt eine Unterscheidung dahingehend, ob die Prozesse in einem kleinen oder großen Maßstab verstanden werden, zu weiteren Überlegungen.

1.1.1 Historische Prozesse

Historie ist nicht unbedingt jedes Mathematikers Sache. Interessiert den Historiker der Wandel der Welt im Laufe der Zeit, so kommen für den Mathematiker als Gegenstand seiner Disziplin vor allem solche Phänomene in Frage, die nicht nur für

den Menschen unwandelbar sind, sondern die sogar in anderen möglichen Welten als logisch zwingende Zusammenhänge anerkannt würden. Diesen inhaltlichen Unterschieden beider Disziplinen entsprechen Gegensätze in der Methode und im erkenntnistheoretischen Status ihrer Ergebnisse. Man kann Mathematik und Geschichte sogar als entgegengesetzte Pole in einem Spektrum der Wissenschaften zwischen Allgemeinem und Besonderem auffassen.

Dennoch empfinden viele Mathematiker auch historische Prozesse als wichtig für ein adäquates Verständnis ihrer eigenen Disziplin. Dabei will ich zwei Herangehensweisen unterscheiden, gewissermaßen Geschichte der Mathematik im Kleinen (episodisch) bzw. im Großen (ideengeschichtlich).

Im Kleinen interessiert die Dramaturgie bemerkenswerter Einzelereignisse, sofern diese gemeinhin als wichtige Fortschritte in der wissenschaftlichen Erkenntnis empfunden werden. Ich erwähne die Legenden rund um die Entdeckung irrationaler Zahlen zur Zeit des Pythagoras, den Apfel, dessen Herabfallen Newton die Idee der Gravitation eingegeben haben soll, die dramatischen letzten Stunden im Leben von Galois oder die in [Singh 2012] dargestellte Geschichte von Fermats letztem Satz. Auch wenn manchem Mathematiker dabei eher zum Schmunzeln zumute sein mag – dergleichen heroisch angehauchte Erzählungen können und dürfen auch durchaus fesseln.

Dem gegenüberstellen möchte ich Geschichte der Mathematik im Großen, und zwar als Ideengeschichte sowohl innermathematisch als auch im Wechselspiel mit den Entwicklungen in anderen Disziplinen aus Wissenschaft, Kunst und Kultur. Historiker wie auch Mathematiker werden dieser Betrachtungsweise vermutlich mehr Bedeutung beimessen als dem Episodischen. Umso anspruchsvoller sind Fragen wie etwa die folgenden: Inwiefern hat uns die Abfolge der Entwicklung verschiedener Teildisziplinen der Mathematik etwas Wesentliches zu sagen? Ist sie repräsentativ für die Entfaltung unserer Zivilisation als Ganzer? Folgte die Entwicklung der Mathematik in Europa, wie sie das Bild der modernen Mathematik immer noch prägt, einer kulturübergreifenden Notwendigkeit? Oder fänden wir eine andere Weltmathematik vor, wäre anstelle der abendländischen eine andere Kultur global ähnlich einflussreich gewesen? All diese Fragen beziehen sich auf historische Prozesse im großen Maßstab. Es mag sein, dass wir darauf keine vollständigen und abschließenden Antworten erwarten dürfen. Anregend nicht nur für Mathematiker und Historiker sind sie zweifellos.

Unterschiede zwischen episodischer und ideengeschichtlicher Aufarbeitung historischer Prozesse brauchen nicht näher erörtert zu werden, sie liegen auf der Hand. Überspitzt könnte man sagen: In der Episode werden mathematische Ideen zum Vehikel für ein Narrativ, welches das Objekt des Interesses ist. In der Ideengeschichte sind umgekehrt Erzählungen nur Vehikel für die Lieblinge des Mathematikers, die mathematischen Ideen.

1.1.2 Gesellschaftliche Prozesse

Auch unter einem gesellschaftlichen Gesichtspunkt bietet sich ein kleinerer Ausschnitt, jener der Forschungsgemeinschaft an, neben einem größeren, der die Gesellschaft als Ganzes auch im Sinne einer allgemeinen Öffentlichkeit vor Augen hat.

Alle Wissenschaften und die Mathematik ganz besonders erfahren heutzutage eine zunehmend den ganzen Globus umspannende Internationalisierung (was gewisse Tendenzen im Wissenschaftsbetrieb betrifft, könnte man auch sagen: Angloamerikanisierung). Das bedeutet aber auch eine Ausdifferenzierung und Verfeinerung bis hin zur Unterscheidung hunderter, wenn nicht gar tausender verschiedener Spezialgebiete, von denen viele nur mehr jeweils von einer Handvoll Experten weltweit betrieben und/oder verstanden werden. Nicht alle Gründe dafür liegen in der Natur des Gegenstandes selbst. In 1.2.3 und 1.3.3 werden wir uns noch eingehender damit beschäftigen.

Ganz anders ist das Bild, wenn man die Gesellschaft als Ganzes im Auge hat. Hier geht es nicht um Ausdifferenzierung, sondern um Breitenwirkung. Nicht Verfeinerung, sondern Vergrößerung verspricht hier Erfolg in der vielzitierten Ökonomie der Aufmerksamkeit ([Franck 1998]). Dennoch ist eine mindestens ebenso große Professionalität gefragt, wenn auch unter ganz anderen Zielvorgaben, und es gibt keinen Grund für eine grundsätzlich despektierliche Haltung von Forschern gegenüber Popularisierern. Denn nicht nur der Befriedigung narzisstischer Bedürfnisse dient eine große Breitenwirkung. Selbst aus einem aufklärerisch-idealistisch aufgefassten demokratischen Grundverständnis heraus muss uns daran gelegen sein, der nicht fachkundigen Mehrheit die Sinnhaftigkeit wissenschaftlicher Forschung verständlich zu machen. So unterschiedlich also die Tendenzen in Fach- und Populärwissenschaft auch sein mögen, ihre Koexistenz hat gute Gründe.

1.1.3 Technologische Prozesse

Dass unsere Zivilisation und damit nicht zuletzt die Ernährung von über sieben Milliarden Menschen zu einem guten Teil auf Mathematik basiert, ist schon fast ein Allgemeinplatz. Hier will ich hinsichtlich technologischer Prozesse weiter unterscheiden. Der Betrachtungsweise im kleinen Maßstab entspricht hier die (eventuell sehr originelle) mathematische Lösung einer speziellen, sehr konkret und lokal auftretenden Problemstellung.

Dem gegenüber steht im großen Maßstab eine systematische Methodik, die sich mathematischer Theorie auf der Höhe der Zeit bedient und diversen, teils standardisierten technologischen Prozessen als Grundlage dient.

Hinsichtlich der dem einzelnen Mathematiker abverlangten Fähigkeiten kann das durchaus einen Zwiespalt bedeuten. Denn originelle Problemlösung einerseits und Durchdringung von systematischer Theorie andererseits sind Fähigkeiten, die sich be-

kanntlich individuell sehr unterschiedlich ausprägen können. Auf den Arbeitsmarkt bezogen ergibt sich daraus das anspruchsvolle Anliegen, vorhandene Kompetenzen dort verfügbar zu machen, wo sie die wertvollste Wirkung entfalten. Nicht nur die Prozesse im eigentlichen technologischen Sinn verdienen also Aufmerksamkeit, sondern auch jene, welche den Arbeitsmarkt bestimmen.

Doch auch (patent-) rechtliche Fragen stellen sich: Können bzw. dürfen mathematische Erkenntnisse geheim gehalten werden (die Innovation sollte in der Privatwirtschaft dem Erfinder zugute kommen), oder sind sie Eigentum der gesamten Gesellschaft oder gar der Menschheit (möglichst alle sollen von den technischen Möglichkeiten profitieren)? Erstmals konstatieren wir also einen Widerstreit, der echte, nicht-triviale Probleme aufwirft.

1.1.4 Psychologische Prozesse

Die bisherigen Betrachtungen bestanden quasi in einer Außenschau der Mathematik, die nun durch eine Innenschau vervollständigt werden soll. Eine Möglichkeit dazu besteht in der Orientierung hin zum Subjekt. Wie also ereignet sich Mathematik aus der Sicht des Mathematik Lernenden, Lehrenden oder Forschenden?

Denken wir dabei (im Kleinen) an das einzelne Individuum, so lässt sich dazu wenig Pauschales sagen, weil der eigentlich kreative Prozess schwer zu fassen ist. Umsomehr ergibt sich daraus aber eine große Herausforderung für Lehrende. Denn Vermittlung ist Kommunikation, und wirkungsvolle Kommunikation lebt von Individualität und Originalität. Gefragt ist die (sonst am ehesten von Künstlern erwartete) Fähigkeit, mathematische Prozesse vom eigenen Unbewussten ins Bewusstsein zu heben und dort in eine kommunizierbare Form zu übersetzen.

Demgegenüber bieten sich zum Studium allgemein verbreiteter psychologisch-mathematischer Prozesse (im Großen) jene Disziplinen an, die, unabhängig von individuellen künstlerischen Begabungen, empirisch abgesicherte Aussagen über Erwerb, Vermittlung und Verarbeitung mathematischer Inhalte im Bewusstsein machen können. Das sind vor allem Psychologie, Pädagogik und (Fach-)Didaktik. Da es sich hierbei um etablierte Wissenschaften handelt, die selbst einen Wissenschaftsbetrieb entwickelt haben, ließe sich auch dieser näher auf Prozesse untersuchen. Jedenfalls kommt es zu einer weiteren Auffächerung dessen, was wir (wenn auch vielleicht nur im weiteren Sinne) unter mathematischen Prozessen subsumieren können.

Auch echte Probleme erwachsen aus der Polarität zwischen Individualität und Allgemeinheit: Wer kennt keinen Mathematiklehrer mit einer Naturbegabung, die es ihm ermöglicht, alle wissenschaftlichen Erkenntnisse von Psychologie, Pädagogik und Didaktik beiseite zu wischen und dennoch sein Fach so zu vermitteln, dass viele brave Pädagogik- und Didaktikabsolventen daneben nur blass erscheinen? Doch folgt daraus keineswegs, dass wir aufgrund schillernder Einzelbeispiele systematische und empirisch abgesicherte Wissenschaften über Bord werfen sollen. Denn sie geben erstens

der Vielzahl der nur durchschnittlich begabten Lehrenden wertvolle Hilfen und liefern zweitens unverzichtbare Orientierungen für bildungspolitische Maßnahmen. Umgekehrt wäre es aber auch problematisch, begabten Individualisten mutwillig Ketten anzulegen, nur um irgendeine, abstrakt vielleicht wünschenswerte Standardisierung oder Objektivierung zu erzwingen.

1.1.5 Innermathematische Prozesse

Anstatt im Inneren des Subjektes kann man auch im Inneren des Objektes nach mathematischen Prozessen suchen. Denn obwohl manch einer die Mathematik in ihrer Beständigkeit durchaus als statisch empfinden mag, sind dennoch auch prozesshafte Aspekte an ihr nicht von der Hand zu weisen. In mancherlei Hinsicht bestimmen sie sogar die Art und Weise, wie Mathematik in unserem Bewusstsein repräsentiert wird. (Wohlgemerkt: Davon zu unterscheiden sind die psychologischen Prozesse der Aneignung von Mathematik.)

Im Kleinen verstehe ich darunter die Konstruktion mathematischer Objekte, den logisch folgerichtigen Ablauf mathematischer Beweise oder auch das offensichtlich Prozesshafte an mathematischen Algorithmen.

Spricht man dagegen vom *Aufbau einer Theorie* oder gar *des gesamten mathematischen Lehrgebäudes* so ist damit ein Prozess mitgedacht, der die Mathematik im Großen betrifft (ich darf auch auf [Winkler 2011a] verweisen). Der berühmteste, weil am weitesten ausholende systematische Anlauf in diese Richtung wurde von führenden französischen Mathematikern unternommen, die unter dem Pseudonym *Nicolas Bourbaki* seit 1939 die mehrbändigen *Éléments de Mathématique* herausgaben. Beginnend mit dem (im systematischen Sinne) ersten Band über Mengenlehre (Neuaufgabe [Bourbaki 2006]) wird Mathematik darin als ein umfassendes und dennoch einheitlich konzipiertes Gebilde vor dem geistigen Auge des Lesers, ja man möchte sagen: des Betrachters aufgebaut. Dieser Prozess ist langsam, aber extrem mächtig und nachhaltig. Die Wirkung ergibt sich aus der Vereinheitlichung, die allerdings ein beträchtliches Abstraktionsniveau erfordert. Abstraktion ist also nicht Selbstzweck, sondern dient als Fundament für ein außerordentlich breit konzipiertes Lehrgebäude. Eine besondere Ökonomie – man kann auch sagen: ästhetische Qualität – besteht darin, dass die Wiederholung weitgehend identischer Beweisfiguren für ähnlich wiederkehrende Zwecke tunlichst vermieden wird. Anstelle dessen wird der gemeinsame, allgemeine Sachverhalt herausgearbeitet und möglichst klar zur Geltung gebracht. Obwohl es sich bei den mitwirkenden Autoren der *Éléments* bekanntermaßen um Mathematiker allerersten Ranges handelte, wurde in den Büchern selbst keiner von ihnen individuell erwähnt. Damit kommt zum Ausdruck, dass die Mathematik eine kollektive Errungenschaft ist und keine Ansammlung klar voneinander unterscheidbarer Einzelleistungen. Hierin besteht trotz aller Analogien vielleicht auch der wichtigste Unterschied zur Kunst, wo die individuelle Leistung ein viel größeres Gewicht hat. Denn kaum eine mathematische Einzelleistung wäre mittelfristig nicht auch von jemand anderem zu erwarten

gewesen. Im Gegensatz dazu scheint der Gedanke absurd, dass Michelangelos, Shakespeares oder Beethovens Meisterwerke, hätten ihre Schöpfer nicht gelebt, von jemand anderem nachgeliefert worden wären.

Für das Weitere von besonderem Interesse ist die Spannung, die zwischen Differenzierung (als Tendenz im Kleinen) einerseits und Vereinheitlichung (als Tendenz im Großen) andererseits zutage tritt. Differenzierung erwächst innermathematisch aus dem Bedürfnis, wichtige Einzelheiten genauer zu verstehen, sofern diese an zu simplen Objekten nicht unterscheidbar sind. Folglich untersucht man kompliziertere Objekte, was das Gesamtbild bereichert aber auch verkompliziert. Besonders in der Mathematik ist aber die gegenläufige Tendenz, nämlich Vereinheitlichung, mindestens ebenso bedeutend. Sie ist der Hauptgrund dafür, dass im Laufe eines nur fünfjährigen Universitätsstudiums Jahrtausende mathematischer Entwicklung gebündelt und junge Menschen auf manchen Spezialgebieten sogar an die Front der Forschung gebracht werden können. Natürlich gilt das auch für andere Wissenschaften, bei der Mathematik ist es aber besonders bemerkenswert. Denn anders als in den empirischen Wissenschaften, wo kaum eine Theorie die Jahrhunderte ohne große Revision übersteht, gelten die mathematischen Erkenntnisse aller Zeiten im Wesentlichen unverändert. Trotz der resultierenden Wissensakkumulation hat – Dank der für die Mathematik charakteristischen Tendenz zur Vereinheitlichung – jede neue Generation die Chance, das gerade aktuelle Gebäude zu erklimmen und sogar noch weiter auszubauen.

1.2 Drei ausgewählte Gegenläufigkeiten

In diesem Kapitel sollen drei Arten von Prozessen ausgewählt und im Hinblick auf ihre teils problematischen Gegenläufigkeiten noch näher als bisher untersucht werden: der Forschungsbetrieb (als gesellschaftlicher Prozess), psychologische Prozesse unter dem Gesichtspunkt der Vermittlung von Mathematik und jene innermathematischen Prozesse, die das mathematische Lehrgebäude prägen.

1.2.1 Forschungsbetrieb versus Vermittlung von Mathematik

Nach allgemeinem Verständnis sind Universitäten neben ihrem Forschungsauftrag auch zuständig für die mathematische Lehre im sogenannten tertiären Bildungsbereich. Wissenschaftliche Laufbahnen werden aber fast ausschließlich durch die Erfolge auf dem Gebiet der Forschung bestimmt. Engagement und Reflexion im Bereich der Lehre wird daher von vielen Forschern als eine Vergeudung von Zeit und Energie empfunden. Obwohl wissenschaftliche Exzellenz einen wichtigen Einfluss auf die Qualität der Lehre hat, lässt sich vor allem angesichts der Spezifika von Massenuniversitäten (und diese stellen auch eine gesellschaftliche Errungenschaft dar!) deshalb ein Widerstreit zwischen Forschung und Lehre nicht leugnen.

1.2.2 Lehrgebäude versus Vermittlung von Mathematik

Offensichtlich wäre es absurd, Bourbakis *Éléments* als Grundlage für eine erste Einführung in die Mathematik zu verwenden. Und doch ist die Dissonanz hier vielleicht weniger schräg, als sie auf den ersten Blick anmutet. Denn jede gelungene systematische Darstellung bietet die klug strukturierte Zusammenschau gewisser Inhalte. Auf einem entsprechenden (im Falle Bourbakis zweifellos sehr hohen) Niveau der Vorbildung stößt eine solche Darstellung des Lehrgebäudes auch im didaktischen Sinn auf Resonanz und erzeugt das Gefühl: So und nur so sind diese Zusammenhänge am besten zu verstehen. Ungeachtet dessen stehen die Unterschiede zwischen systematischem und didaktischem Gesichtspunkt außer Frage.

1.2.3 Forschungsbetrieb versus Lehrgebäude

Die Gegenüberstellung von Prozessen im Forschungsbetrieb und jenen, die ein allgemein akzeptiertes Lehrgebäude hervorbringen, ist vielleicht die brisanteste. Denn der einzelne Forscher, sofern es ihm nicht vergönnt ist, an den bedeutendsten Fortschritten der Weltmathematik mitzuwirken (nämlich dort wo aktuelle Lehrgebäude um- und weitergeschrieben werden), sieht sich genötigt, den im Forschungsbetrieb wirksamen Erfolgskriterien Genüge zu tun. Und dieses Ziel erreicht man nicht zuletzt durch Quantität und Auffächerung der Aktivitäten. Diversifikation ist also eine natürliche Tendenz des Forschungsbetriebs, während ein Lehrgebäude vor allem durch Einheitlichkeit überzeugt.

Wir dürfen in Frage stellen, ob alle erwähnten Tendenzen auch in ihrem Widerstreit wünschenswert sind. Deshalb wollen wir die bisherige deskriptive Darstellung durch Erwägungen mit normativen Schlussfolgerungen ergänzen.

1.3 Ziele (Cui bono?)

Wollen wir widerstreitende Prozesse beurteilen und eventuell in positiver Weise beeinflussen, kommen wir nicht an den grundlegenden Fragen vorbei: Wie soll Mathematik sein, damit die Welt besser wird bzw. damit es den Menschen besser geht? Dies schließt die Frage mit ein: Wessen Wohlergehen wird überhaupt durch Mathematik berührt?

1.3.1 Mögliche Nutznießer der Mathematik

Denken wir an den einzelnen Menschen als Nutznießer (eventuell auch als Geschädigten) der Mathematik, so können wir unterscheiden: die Privatperson mit ihren in-

dividuellen Interessen, Neigungen und Bedürfnissen; den Menschen in seinem beruflichen Umfeld und auf dem Arbeitsmarkt; den Fachmathematiker. Andererseits kommen auch Kollektive und Institutionen in Betracht: wissenschaftliche Einrichtungen; die Volkswirtschaft und allgemeine Wohlfahrt eines Gemeinwesens; die Menschheit in ihrer Gesamtheit. Aber nicht all diese Instanzen treten als unabhängige Interessenträger auf.

1.3.2 Privatperson und Menschheit im Wettbewerb

Als Erben der abendländischen Aufklärung ist uns das Wohlergehen des Einzelnen und seine Chance auf ein Leben in Freiheit, Mündigkeit und Würde ein unbedingtes Anliegen. Über die Rolle, die ich dabei der Mathematik und insbesondere mathematischer Bildung beimesse, findet sich einiges in meinen Aufsätzen [Winkler 2006] und [Winkler 2009]. Gleichfalls vorbehaltlos begrüßen wir alles, was der Menschheit als Ganzer zugute kommt. Man kann dabei an auf Mathematik basierende Technologien denken, die der Produktion oder Allokation knapper Güter oder der Nachhaltigkeit bei der Nutzung von Ressourcen dienen; oder an eine politische Aufklärung mit dem Ziel der Befreiung unterdrückter Menschen oder der Befriedung irrational geschürter Konflikte etc. In allen genannten Fällen wirkt das kollektive Wohl in offensichtlicher und positiver Weise zurück auf das Wohl (fast) jedes Einzelnen.

Ein weniger klares Bild zeigt sich unter anderen Gesichtspunkten: Berufliches Fortkommen des Einen bedeutet oft Misserfolg und Frustration des Anderen, und Ähnliches gilt für Forschungsinstitutionen wie auch für ganze Volkswirtschaften. Das all diesen Konstellationen gemeinsame Element ist der Wettbewerb oder, spieltheoretisch ausgedrückt, das Nullsummenspiel. Klarerweise ist es weder möglich noch wünschenswert, Wettbewerb überall zu verhindern. Er kann aber nicht als Wert an sich gelten und bedarf einer Rechtfertigung, die sich auf ein übergeordnetes Ziel bezieht. Diese Erkenntnis wird uns nun mehrfach bei der Entscheidung helfen, wie mit Prozessen im Widerstreit umzugehen ist.

1.3.3 Diversifizierung versus Vereinheitlichung

Wir haben gesehen: Die Vereinheitlichung ist eine der Mathematik immanente Tendenz, vor allem wenn man das Lehrgebäude als Ganzes betrachtet. Auch die dazu gegenläufige Diversifizierung hat teilweise innermathematische, also in der Natur des Gegenstandes liegende Gründe. Wir haben aber auch externe Gründe vorgefunden, nämlich im Wissenschaftsbetrieb, wo für den einzelnen Akteur Anreize entstehen, sich in der Forschungslandschaft (hinreichend kleine) eigene Nischen einzurichten. Bei kleiner Konkurrenz stehen die Chancen, Sieger zu sein, besser. Das kann in einer hochkompetitiven Forschungslandschaft überlebensnotwendig sein. Wie bereits festgehalten, wollen wir aber den Wettbewerb alleine, wenn auch vielleicht als Erklä-

nung, so doch nicht als Rechtfertigung für die resultierende Zersplitterung anerkennen. Maßgeblicher sind für uns – ganz im Sinne von 1.3.2 – das Wohl des Einzelnen wie auch der Menschheit als Ganzer. Und hier spricht wenig für Zersplitterung. In einzelnen Fällen nützlicher Anwendungen mag es wünschenswert sein, einen spezifischen mathematischen Inhalt unabhängig von größeren Zusammenhängen zu verstehen. Der Normalfall ist das jedoch nicht.

Zu Gunsten der Vereinheitlichung hingegen finden sich auf allen Ebenen und in allen erdenklichen Kontexten übermächtige Argumente. Das liegt nicht an einem beliebigen Zusammentreffen unabhängiger Aspekte, die zufällig in eine ähnliche Richtung weisen. Sondern es gibt unzweifelhaft ein allgemeines menschliches Bedürfnis nach Einheit, dem die Mathematik besonders tiefe Befriedigung zu bieten imstande ist. Wir können das auch unter ökonomischen Gesichtspunkten begreifen, indem wir die Mathematik als Wissenschaft von der Ökonomie analytischen, begrifflichen Denkens ansehen. Denn Abstraktion und Verallgemeinerung im mathematischen Sinne bezwecken nichts anderes als Verbesserung der Denkökonomie: Bei gleichem oder nur geringfügig erhöhtem Einsatz der Mittel (d.h. des Begriffsapparates) lässt sich die Wirkung (d.h. das Verständnis) überproportional steigern. Und hierin liegt die Erklärung für die vereinheitlichende Tendenz, die an der Entwicklung des mathematischen Lehrgebäudes zu beobachten ist. Analoges gilt für die Vermittlung von Mathematik und für ihre effektive Nutzung in technologischen Prozessen im weitesten Sinn.

1.4 Konsequenzen – Prozess als Progress

Abschließend wollen wir uns die Frage stellen, ob beziehungsweise wie mathematische Prozesse in wünschenswerter Weise beeinflusst werden können.

1.4.1 Macht und Ohnmacht politischer Gestaltung

Bereits ein kurzer Blick auf die behandelten mathematischen Prozesse zeigt deutlich die engen Grenzen unserer Möglichkeiten: Historische Prozesse gezielt zu beeinflussen, ist wohl von vornherein unrealistisch. Innermathematische Prozesse, d.h. die Art und Weise, wie Theoreme bewiesen und Theorien entwickelt werden, unmittelbar kontrollieren zu wollen, bedeutete völlig absurden autoritären Durchgriff, den wir nicht in Betracht ziehen. Sehr wohl nachzudenken hat man aber über Initiativen zur Förderung des technologischen Transfers und – worauf ich mich im Folgenden konzentrieren möchte – über bildungs- sowie forschungspolitische Maßnahmen.

1.4.2 Wertschätzung von Lehre auf allen Ebenen

Die Diskrepanz zwischen den Bedürfnissen der Lehre an unseren Massenuniversitäten einerseits und den forschungsorientierten Bedingungen für wissenschaftliche Karrieren andererseits wurde bereits angesprochen. Es überrascht nicht, dass in der gegenwärtigen akademischen Welt, wo vor allem von wissenschaftlicher Exzellenz die Rede ist, qualitativere Lehre selten jene Wertschätzung entgegengebracht wird, die ihr zustünde. Das gilt, obwohl eine (diesbezüglich nicht besonders gut informierte) Öffentlichkeit umgekehrt die Universität fast ausschließlich als fortgesetzte Schule ansieht. Entsprechend widersprüchlich können Vergleiche von Universitäten ausfallen, je nachdem, ob die üblichen forschungspolitischen Parameter die Kriterien sind oder beispielsweise das subjektive Wohlbefinden von Studierenden. Allerdings wird in beiden Fällen wenig über die Qualität der Lehre ausgesagt, wie sie hier verstanden wird. Denn weder ist garantiert, dass hervorragende Forscher sich auch um die Lehre bemühen, noch sagt (besonders in den ersten Semestern) das subjektive Behagen von Studierenden viel über die Qualität des Gelernten aus. Noch aussagekräftiger als die zweifellos wertvollen üblichen Bewertungen von Hochschullehrern durch Studierende unmittelbar nach Ende einer Lehrveranstaltung zu Semesterschluss wären deshalb Befragungen von Absolventen mit größerem zeitlichen Abstand.

Bei der Mathematikvermittlung für andere Altersstufen verschieben sich die Gewichte graduell, aber nicht grundsätzlich. Ein besonderes Anliegen sollte die Verbesserung des Ansehens und somit der Attraktivität des Lehrerberufes sein. Dass es diesbezüglich nicht zum Besten steht, hängt speziell in der Mathematik mit einem weit verbreiteten Mangel an Einsicht in die subtile Beziehung zwischen fachlicher und didaktischer Kompetenz zusammen. Dabei geht es nicht zuletzt um den vereinheitlichenden Charakter der Mathematik und das damit verbundene Verständnis inner- und außermathematischer Zusammenhänge, sowohl aus fachmathematischer wie aus didaktischer Sicht (siehe [Neuweg 2011] und [Winkler 2011b]). Eine stärkere Kooperation beider Bereiche mit entsprechendem Arbeitsauftrag scheint daher wünschenswert, und zwar auf allen Ebenen des Bildungssystems.

1.4.3 Kritische Sensibilität gegenüber wissenschaftlicher Inflation

Hieß es vor einigen Jahren noch *publish or perish*, so werden im heutigen Wissenschaftsbetrieb vom Einzelnen nicht nur Publikationen erwartet, sondern außerdem die Einwerbung von sogenannten Drittmitteln, eine rege Vortragstätigkeit (möglichst auf Einladung, idealerweise als Hauptvortragender auf Tagungen), die Organisation von wissenschaftlichen Veranstaltungen, die Herausgabe von wissenschaftlichen Publikationen, die Beachtung durch Massenmedien etc. Entsprechende Evaluierungen nach komplizierten Schlüsseln mit anschließenden Rankings sind zunehmend der Forschungsinstitutionen und ihrer Vertreter täglich Brot. Zwar ist es sinnvoll, die Palette der Aktivitäten, die einem Wissenschaftler gutgeschrieben werden, zu erwei-

tern anstatt sie zu eng zu fassen. Doch entsteht, wenn der Wettbewerb zu sehr in den Vordergrund rückt, eine höchst fragwürdige Ankurbelung der Quantität, wobei sich Erfolge der Sieger schnell vervielfachen, während dauerhaft ins Abseits gerät, wer sich dieser Diktatur der Geschäftigkeit, wie der Philosoph und Schriftsteller Peter Bieri sie nennt, nicht unterordnet. Dabei spielen auch die explodierenden Entwicklungen im Bereich der elektronischen Kommunikation eine fragwürdige, weil inflationierende Rolle. Denn Beschleunigung der Übermittlung und resultierende Anhäufung von immer mehr Information alleine haben noch herzlich wenig mit dem zu tun, worum es in der Mathematik geht: um Gedanken, Ideen und um tiefes Verständnis – ganz im Sinne der vereinheitlichenden Kraft der Mathematik. Inflation wissenschaftlicher Aktivitäten bedeutet notgedrungen auch Entwertung. Mehr kritische Sensibilität diesbezüglich könnte ein erstes Ziel sein (vgl. auch [Liessmann 2006]).

1.4.4 Laufbahnmodelle für junge Mathematiker

Wer nach Abschluss eines Mathematikstudiums in die Forschung einsteigt, muss zeigen, dass er mathematische Ideen hat, diese methodisch einwandfrei zu Beweisen auszuarbeiten und schließlich in ansprechender Form niederzuschreiben imstande ist. Gleichzeitig ist ein umfassender Überblick über die gesamte Mathematik schon längst auch für sehr erfahrene Wissenschaftler unmöglich. Damit sich trotzdem auch Neulinge in der Forschung beweisen können, müssen sie sich meist mit relativ überschaubaren Spezialgebieten begnügen. Doch immer wieder gelingen jungen, beweglichen Geistern Erfolge, die ihren älteren Kollegen trotz größerer Erfahrung verwehrt sind. Wir haben es hier also mit einem Spezialistentum zu tun, das durchaus seine Meriten, wenn nicht gar seine innere Notwendigkeit hat.

Mit fortschreitendem Alter verliert sich aber oft die Begeisterung für das ursprüngliche enge Spezialgebiet und weitere Ausblicke mit entsprechend universelleren, anspruchsvolleren mathematischen Fragen gewinnen an Attraktivität. Leider bedeutet das aber nur selten, dass sich auch die mathematische Virtuosität im selben Ausmaß weiterentwickelt. Denn dafür bleibt vielen neben immer schwerer lastenden Aufgaben im Hochschulbetrieb zu wenig Zeit und Muße übrig. Entsprechend zäher fließen die Publikationen und umso wertvoller ist es, wenn statt dessen bei der Vermittlung von Mathematik Einsichten in größere Zusammenhänge wirksam werden. Deshalb entwickeln sich viele Mathematiker durch ihre gesamte Aktivzeit hindurch als Lehrer substantiell weiter, während das als Forscher nur Ausnahmereischeinungen gelingt.

Diese Not lässt sich zur Tugend wenden, wenn wir uns am Ziel der Vereinheitlichung orientieren. Die Produktion an neuer Mathematik ist weltweit unüberschaubar, nur ein kleiner Teil kann gewürdigt werden. Von großem Interesse jedoch wäre ein übersichtliches System zur Orientierung durch das Dickicht des Verfügbaren. Eine wertvolle Ergänzung zur üblichen Klassifikation der AMS (American Mathematical Society) wäre ein Referenzsystem mit mehr inhaltlichen Anknüpfungspunkten. Nicht für diesen Zweck konzipiert aber jedenfalls beachtenswert ist [Gowers 2009]. Zahlrei-

che höchstrangige Autoren haben an diesem Werk mitgearbeitet. Im Gegensatz zu Bourbaki wird darin nicht eine systematische Gesamtdarstellung als zentral erachteter Teile der Mathematik angestrebt, sondern eine ausgewogene, repräsentative und relativ leicht zugängliche Zusammenschau der wichtigsten Teilgebiete und Aspekte der Mathematik.

In der typischen Karriere eines Mathematikers darf die bereits zitierte Diktatur der Geschäftigkeit nicht von Dauer sein. Die wertvollsten Beiträge sind immer noch dann zu erwarten, wenn es weitgehend dem Experten selbst überlassen ist, in welcher Weise er seine jeweiligen individuellen Stärken am sinnvollsten einbringt. Natürlich bedarf es dabei guter Auswahlmechanismen beim wissenschaftlichen Nachwuchs. Wichtig aber ist, dass die Auswahl rechtzeitig erfolgt. Gegenwärtig gibt es zum Beispiel in Österreich eine große Zahl ausgezeichnete Mathematiker an die 40 oder auch schon darüber, die trotz sehr solider Leistungen noch immer keine dauerhafte, ihren Lebensunterhalt sichernde Position im wissenschaftlichen Bereich ergattert haben und permanent den unterschiedlichsten Frustrationen ausgesetzt sind. Die Gelegenheit für einen Umstieg in einen anderen Beruf haben sie verpasst, weil ihnen das akademische System trügerische Hoffnungen gemacht hatte. Deshalb kann man zur Zeit selbst herausragenden jungen Talenten die wissenschaftliche Laufbahn kaum vorbehaltlos empfehlen. Angesichts der allgemein anerkannten Wichtigkeit von Wissenschaft und Forschung, insbesondere auch in der Mathematik, ist dieser Zustand nicht nur für den Einzelnen höchst problematisch, sondern auch für die gesamte Gesellschaft. Wissenschaftliche Karrieren müssen sich früher entscheiden, so dass die Ausgeschiedenen rechtzeitig nach einer anderen Berufslaufbahn Ausschau halten können. Wer sich für den Verbleib in der Wissenschaft über sein 30. bis 35. Lebensjahr hinaus qualifiziert hat, soll weitgehend in Ruhe arbeiten können. Maßgeblich für die Arbeit soll sein eigenes mathematisches Gewissen sein und nicht das Diktat anonymer Mächte und kafkaesker Prozesse.

Literatur

- [Bourbaki 2006] BOURBAKI, Nicolas: *Théorie des ensembles*. Springer, 2006 (Nachdruck).
- [Franck 1975] FRANCK, Georg: *Die Ökonomie der Aufmerksamkeit*. München, Hanser Verlag, 1998 (10. Auflage).
- [Gowers 2009] GOWERS ET AL., Timothy: *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton, GOWERS, Timothy (Hrsg.): BARROW-GREEN, June; LEADER, Imre (Ko-Hrsg.): Princeton University Press, 2008.
- [Liessmann 2006] LIESSMANN, Konrad Paul: *Theorie der Unbildung – Die Irrtümer der Wissensgesellschaft*. Wien, Paul Zsolnay Verlag, 2006 (spätere Auflagen bei Piper, München).

- [Neuweg 2011] NEUWEG, Georg Hans: Das Wissen der Wissensvermittler – Problemstellungen, Befunde und Perspektiven der Forschung zum Lehrwissen. In: TERHART, Ewald; BENNEWITZ, Hedda; ROTHLAND, Martin (Hrsg.): *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf*. Münster/New York/München/Berlin, Waxmann, 2011, S. 451–477.
- [Singh 2012] SINGH, Simon: *Fermats letzter Satz*. München, dtv, aktuelle Auflage 2012.
- [Winkler 2006] WINKLER, Reinhard: Von Nutzen, Wert und Wesen mathematischer Bildung. In: GEPP, Roman; MÜLLER-FUNK, Wolfgang; PFISTERER, Eva (Hrsg.): *Bildung zwischen Nutzen und Notwendigkeit*. Basel u. a., Lit-Verlag, 2006, S. 163–183.
- [Winkler 2009] WINKLER, Reinhard: Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht durch Förderung der Phantasie. In: SCHRITTESSER, Ilse (Hrsg.): *Professionalität und Professionalisierung. Einige aktuelle Fragen und Ansätze der universitären LehrerInnenbildung*. Frankfurt am Main, Peter Lang GmbH Internationaler Verlag der Wissenschaften, 2009, S. 179–205.
- [Winkler 2011a] WINKLER, Reinhard: Der Organismus der Mathematik – mikro-, makro- und mesoskopisch betrachtet. In: HELMERICH, Markus; LENGNINK, Katja; NICKEL, Gregor; RATHGEB, Martin (Hrsg.): *Mathematik Verstehen – Philosophische und Didaktische Perspektiven*. Wiesbaden, Vieweg + Teubner Verlag | Springer Fachmedien GmbH, 2011, S. 59–70.
- [Winkler 2011b] WINKLER, Reinhard: Mathematik: Die unauflösbare Verflochtenheit von Fachwissenschaft und Didaktik. In: *Best Spirit : Best Practice – Lehramt an Österreichischen Universitäten*. Wien, Braumüller Verlag, Gedruckt mit Förderung aller beteiligten Universitäten sowie der Österreichischen Universitätenkonferenz, 2011, S. 90–99.