Auf welche mathematische Schulbildung möchte die Universität aufbauen können?

Stellungnahme der TU Wien

Zusammenfassung

Mathematk und somit auch mathematische Kompetenz ist generell ein sehr vielschichtiges Phänomen. Hier soll es vor allem um jene Aspekte gehen, die einerseits aus Sicht einer technischen Universität von besonderer Wichtigkeit sind und gleichzeitig von so allgemeiner Bedeutung, dass auf sie in der Schulmathematik Rücksicht genommen werden sollte.

1 Mathematik an einer technischen Universität

1.1 Klassische Anwendungen

Die traditionelle Aufgabe der Mathematik in den Anwendungen in Naturwissenschaft, Technik aber auch in der Ökonomie besteht darin, die empirische Wirklichkeit zunächst zu beschreiben, sodann Problemstellungen zu präzisieren, analysieren und schließlich Lösungen anzubieten. Die wichtigste Kompetenz für die Wahl der richtigen Mathematisierung besteht darin, mit mathematischen Begriffen adäquate Vorstellungen zu verbinden.

1.2 Die Mathematik der modernen Informationstechnologie

Die Entwicklung des Computers seit etwa einem halben Jahrhundert hat nicht nur die Entstehung der Informatik als neuer Wissenschaft nach sich gezogen, sondern auch die meisten anderen Disziplinen tiefgreifend verändert. Neue Teile der Mathematik sind dadurch ins Zentrum des Interesses gerückt, teils in enger Verbindung mit einer neuen Rolle von formaler wie natürlicher Sprache. Zentral dabei ist ein waches Bewusstsein für das Verhältnis von Syntax und Semantik: Das bezeichnende Symbol ist nicht identisch mit dem dadurch bezeichneten Inhalt (vgl. auch [2]).

1.3 Mathematische Fachstudien – begriffliches Denken

Die Mathematik als eigenständige Wissenschaft beschäftigt sich vor allem mit der logischen Analyse von Begriffen, insbesondere solchen, die sich unmittelbar oder mittelbar aus der Auseinandersetzung mit der empirischen Wirklichkeit ergeben. Damit einher geht als eines der wesentlichen Elemente der Mathematik die Abstraktion. Wichtigstes Ziel dabei ist, Zusammenhänge zwischen verschiedenen Phänomenen wahrzunehmen (Mustererkennung) und damit eine denkökonomische Einheitlichkeit zu schaffen, die wiederum den anderen Wissenschaften zugute kommt.

2 Geforderte Kompetenzen und Grundhaltungen

Mehr noch als in der Kenntnis konkreter Inhalte zeigt sich mathematische Reife vor allem an gewissen allgemeinen Kompetenzen und Grundhaltungen. Vier sollen hier hervorgehoben werden. Eine ausführlichere Behandlung findet sich in [3].

2.1 Entwicklung der Vorstellungskraft als Basis für Verständnis

Die Erfahrung in der Lehre wie auch Selbstbeobachtung zeigt, dass Schwierigkeiten beim Verständnis mathematischer Inhalte vor allem dann auftreten, wenn das Vorstellungsvermögen mangelhaft entwickelt ist. Dabei geht es nicht nur um konkret geometrisch Anschauliches, sondern um die adäquate kognitive Repräsentation auch abstrakter Inhalte.

2.2 Mathematik in der Welt

Viele Bereiche menschlicher Geistestätigkeit – wissenschaftlich wie kulturell – stehen in einer engen Beziehungen zur Mathematik. Wer sich dieser Vielfalt und Allgegenwart von Mathematik bewusst ist, wird mehr Offenheit mitbringen, auch Neuartigem mit Interesse zu begegnen; eine wesentliche Voraussetzung, um die weit verbreitete Schwellenangst vor der Mathematik abzubauen. Bildungsziel muss sein, dass Mathematik nicht nur von speziell Begabten als etwas erlebt wird, das grundsätzlich für jeden verstehbar ist.

2.3 Mathematik und Sprache

Das Verhältnis zwischen Mathematik und Sprache ist reichhaltig. Die Transformation von Inhalten, die in natürlicher Sprache ausgedrückt sind, über Mathematisierung vermittels Präzisierung und Formalisierung in mathematische Modelle und vice versa muss beherrscht werden. Formalisierung darf dabei nicht zum Selbstzweck werden, der sich in der Manipulation mathematischer Symbole erschöpft. Auch dürfen die Begriffe hinter den Wörtern nicht vergessen werden. Sprache ist wesentlich als verbindendes Element zwischen der Mathematik und allem, worauf sie sich bezieht. Bei der in [4] dokumentierten Podiumsdiskussion von Vertretern verschiedener Fächer an Universitäten wurde die besondere Wichtigkeit dieses Themas auch für Nichtmathematiker deutlich.

2.4 Mathematik als Schule des logischen Denkens

Die Leichtgängigkeit mathematischer Kalküle darf nicht davon ablenken, dass sie Teil eines viel umfassenderen Gedankengebäudes sind, in dem logisches Denken regiert, nicht formale Zeichenmanipulation. Dieses Denken folgt Regeln, die zwar formalsierbar sind (dass dies so ist, war eine der wesentlichen Erkenntnisse der mathematischen Logik im 20. Jahrhundert), die aber vor allem anhand von Inhalten erfasst werden müssen. Diese Fähigkeit ist weit über die Mathematik hinaus von entscheidender Bedeutung.

3 Geforderte Inhalte

Der Stoffumfang an Mathematik, den Studierende an unserer Universität bewältigen müssen, übertrifft in den meisten Studienrichtungen das aus der Schule Mitgebrachte um ein Vielfaches, wobei die Schwerpunkte variieren. Deshalb sind für den Studienerfolg allgemeine Kompetenzen wie oben beschrieben wichtiger als eine frühe Spezialisierung schon in der Schule. Dennoch gibt es einige Inhalte, deren Bedeutung für aufbauende Studien eine ausdrückliche Hervorhebung rechtfertigt.

3.1 Der Funktionsbegriff

Ein großer Teil der neuzeitlichen Mathematik kreist um den Begriff der Funktion oder Abbildung — sei es als mathematisches Modell für Kausalbeziehungen oder als Instrument für Strukturvergleiche. Wenigstens die einfachsten funktionalen Zusammenhänge (linear, quadratisch, polynomial, exponentiell, logarithmisch, periodisch) sollten vertraut sein.

3.2 Geometrie versus Algebra

Die Entdeckung, dass geometrische Sachverhalte algebraisch beschrieben und analysiert werden können, stellte zu Beginn der Neuzeit eine der großen mathematischen Revolutionen dar. In unserer Zeit sollte es auch für Schüler selbstverständlich sein, dass der Umgang mit algebraischen Gleichungen (fast) immer auch eine geometrische Entsprechung hat.

3.3 Der Grenzwertbegriff

Im Zentrum der mathematischen Analysis steht der Grenzwertbegriff. Entsprechend stellt Vertrautheit mit seinen wichtigsten Erscheinungsformen (Konvergenz von Folgen und Reihen, Stetigkeit von Funktionen, Differential- und Integralrechnung) eine der wichtigsten Voraussetzungen für ein technisch-naturwissenschaftliches Studium dar.

3.4 Ideenkomplexe statt Schemata (zwei Beispiele: Induktion, komplexe Zahlen)

Die Wichtigkeit einzelner mathematischer Themen variiert von Studienrichtung zu Studienrichtung. Es ist unrealistisch, von der Schulmathematik Vollständigkeit für alle zu fordern. Sinnvoll erscheint deshalb das Prinzip: Ein Thema, für das überhaupt Unterrichtszeit verwendet wird, soll dann auch in einen möglichst reichhaltigen Kontext gestellt werden; sei es innerhalb der Mathematik oder nach außen hin. Zwei Beispiele:

Hat man die Wahl zwischen vollständiger Induktion und den komplexen Zahlen, wird der Informatiker (und vielleicht auch der grundlagenorientierte Mathematiker) eher der Induktion den Vorrang geben, der Elektrotechniker möglicherweise den komplexen Zahlen. Ist nicht für beides Zeit, soll lieber eines der beiden Themen in befriedigender Weise behandelt werden, als beide nur schematisch. Für die vollständige Induktion bedeutet dies, dass sie nicht zu einem langweiligen Beweisschema zur Bestätigung artifizieller Identitäten verkommen soll, sondern in ihrer fundamentalen Rolle sowohl für die unendliche Zahlenreihe als auch für die Arbeitsweise des Computers erkannt wird. Entsprechend soll sich ein Kapitel über komplexe Zahlen nicht im rezepthaften Umgang mit einer formalen imaginären Größe erschöpfen; viel mehr soll vermittels Polarkoordinaten, Drehstreckungen etc. die Beziehung zu Exponential- und Winkelfunktionen mitgeliefert sowie die algebraische Abgeschlossenheit gewürdigt (wenn auch wahrscheinlich nicht bewiesen) werden.

4 Häufige Defizite

4.1 Rezepte – Konzepte

Oft bringen Studierende eine verblüffende Bereitschaft mit, mathematische Methoden rezepthaft anzuwenden, während eine nur geringfügige Variation der Aufgabenstellung zur unüberwindlichen Hürde wird. Ursache ist ein nahezu totaler Mangel an Einsicht in die dahinter stehenden Konzepte und Zusammenhänge. Wenn der Schulunterricht eine solche Mentalität gegenüber der Mathematik generiert, muss er als gescheitert betrachtet werden. Einige konkrete Beispiele für Konzepte hinter Rezepten sind in [2] ausgeführt. Moderne Technologie (Computeralgebrasysteme) kann, richtig eingesetzt, eine wertvolle Hilfe beim Verständnis der Konzepte sein, indem dem Computer die Abarbeitung langweiliger Rezepte überlassen wird.

4.2 Missverhältnis: Komplexität – Trivialität

Angesichts der (scheinbaren) Komplexität mancher Maturaaufgaben erscheint es auf den ersten Blick unerklärlich, warum zu Studienbeginn oft elementarste mathematische Fähigkeiten aus dem Pflichtschulstoff abgehen. Auf den zweiten Blick stellt sich heraus, dass die Matura vielerorts zur Veranstaltung in einem Potemkinschen Dorf verkommen ist, wo offenbar besondere Virtuosität demonstriert werden soll. Allerdings beschränkt sich diese auf speziell gedrillte Beispieltypen, für die kaum mehr ein vernünftiger Kontext sichtbar ist. Hier ist Verbesserung durch eine Reform der Reifeprüfung dringend erwünscht.

4.3 Operieren verdrängt Modellieren, Argumentieren und Interpretieren

Im Zusammenhang mit Bildungsstandards werden vier mathematische Handlungskompetenzen unterschieden (vgl. auch [1]): Modellieren und Transferieren (Übersetzung realer Probleme in mathematische Sprache), Argumentieren und Kommunizieren (inner- wie außermathematisches Schließen), Operieren und Technologieeinsatz (Anwendung erlernter Methoden und Instrumente) und Interpretieren und Dokumentieren (Rückübersetzung mathematischer Aussagen in die Realität). Im traditionellen Unterricht deckt eine Überbetonung des Operierens die anderen drei Kompetenzen oft weitgehend zu. Als Erklärung bietet sich an, dass das Operieren am leichtesten in Schemata gepresst werden kann. Dieser Unausgewogenheit muss entgegengewirkt werden.

4.4 Sprachlosigkeit

Insbesondere in Ingenieursdisziplinen fallen zahlreiche Studierende auch deutscher Muttersprache auf, die sichtlich schwer mit mangelnder sprachlicher Ausdrucksfähigkeit zu kämpfen haben, obwohl das naturwissenschaftlich-technische Verständnis den Erfordernissen genügen würde. Ein sprachbewusster Mathematikunterricht soll von Anfang an klarstellen, dass Kommunikationsfähigkeit überall und erst recht in der Mathematik kein Luxus sonderen eine Notwendigkeit ist (vgl. [4]).

5 Vorschläge

5.1 Vereinheitlichung durch zentrale Reifeprüfung

Die unter 4.2 angesprochenen Potemkinschen Dörfer können nur dann durch Sinnvolleres ersetzt werden, wenn die Aufgaben bei der mathematischen Reifeprüfung wenigstens teilweise nicht vom Klassenlehrer bzw. von der Klassenlehrerin gestellt werden. Aus diesem Grunde sind zentrale Elemente einer Reifeprüfung grundsätzlich zu befürworten. Die Konsequenz ist eine gewisse Vereinheitlichung wenigstens von Kerngebieten des Stoffes quer über alle Schultypen, die allgemeine Studienberechtigungen vergeben. Über diese pragmatische, auf Prüfungen abzielende Notwendigkeit hinaus besteht bei kluger Auswahl der kanonisierten Themenbereiche auch die Chance, in der breiten Öffentlichkeit ein klareres Bewusstsein für die Bedeutung der ausgewählten Inhalte und somit der Mathematik generell zu fördern.

5.2 Lehrer $\neq$ Prüfer

Werden die Maturaaufgaben von außen gestellt, so sollte auch deutlich werden, dass Lehrer(innen) und Schüler(innen) vor allem Verbündete sind. Die Atmosphäre im Unterricht könnte dadurch profitieren.

5.3 Verbalisierung gegen teaching to the test

Wie aus dem Bisherigen bereits hervorgegangen ist, gilt es, inhaltliches Denken im Verein mit sprachlicher Ausdruckskraft zu fördern. Künftige zentrale Maturaaufgaben sollen sich entsprechend nicht auf die Vorgabe mathematischer Formeln beschränken, die dann weitgehend reflexartig und nach Schema abzuhandeln sind. Die damit verbundenen neuen Anforderungen müssen unbedingt erfüllt werden, soll die Prüfung auf relevante Kompentenzen abzielen. Zum Ausgleich wird man bei den Ansprüchen an die technische Komplexität (vgl. 4.2) realistischer sein. Wenigstens mittelfristig wird sich solch eine Systemkorrektur auch auf den Schulunterricht positiv auswirken.

5.4 Zusammenhänge herstellen

Mathematik lebt in hohem Maß von den inneren Zusammenhängen zwischen ihren Teilgebieten wie auch von den Verbindungen nach außen. Dem soll auch der Mathematikunterricht in der Schule gerecht werden, was am ehesten über entsprechende Aufgabenstellungen bei Prüfungen, insbesondere bei abschließenden Reifeprüfungen bewirkt werden kann.

5.5 Diversität des Schulsystems ausgleichen

Als Hauptschwierigkeit, die einer zentralen Reifeprüfung entgegensteht, wird oft die Diversität des österreichischen Schulsystems, insbesondere im BHS-Sektor ins Treffen geführt. Im Sinne der Studierfähigkeit kann aber kein Zweifel daran bestehen, dass von allen Schultypen, die allgemeine Studienberechtigungen vergeben, auch gewisse gemeinsame Standards gewährleistet werden müssen. Die (vermutlich unerwünschte) Alternative wären schulabhängige Zugangsprüfungen zu Studien mit Mathematik. Gangbare Kompromisse mit dem Ziel einer gewissen Angleichung sind vorzuziehen und sollen daher erarbeitet werden. Instrumente: Klarere Gewichtung und Bündelung des Schulstoffs, Aufwertung der Mathematik an gewissen besonders mathematikarmen Schultypen, Bereicherung des allgemeinen Stoffkanons um ausgewählte wichtige Anwendungen aus gewissen BHS-Typen. Möglicherweise ist angesichts der fortschreitenden Internationalisierung auch mit einer Angleichung der Schulsysteme zu rechnen, welche der extremen Diversität des österreichischen Schulsystems entgegenwirken könnte.

5.6 Teilzentral statt vollzentral

Vielerorts wird eine teilzentrale Gestaltung auch des schriftlichen Teils der Reifeprüfung in Mathematik empfohlen. Der Großteil, aber nicht alle Aufgaben sollen von einer zentralen Stelle vorgegeben werden. Damit könne den Unterschieden der Schultypen, der Schulautonomie wie auch der Individualität der Lehrkräfte Rechnung getragen werden, ohne gleichzeitig die unbestrittenen Vorzüge zentraler Elemente zu verlieren. Im Sinne einer besseren Motivation der Lehrerschaft für einen eigenständigen und engagierten Unterricht scheinen diese Argumente unterstützenswert.

5.7 Kooperation Schule – Universität

Hochschullehrer, denen die Weiterentwicklung der Schulmathematik ein Anliegen ist, sollten die Möglichkeit haben, einen Teil ihrer Lehrverpflichtung durch Unterricht an Schulen zu leisten. Dies sollte einerseits den fachlichen Wissenstransfer an die Schulen fördern und andererseits an den Universitäten das Bewusstsein für die Realität an den Schulen stärken. Dem Bildungssystem als Ganzem kann beides nur nützen.

5.8 Permanente Steuerungsmechanismen zur Systemverbesserung

Die Umstellung der Reifeprüfung vom jetzigen auf den künftigen zentralen Modus wird so tiefgreifend sein, dass mit der Notwendigkeit beträchtlicher Nachjustierungen zu rechnen ist, nicht nur unmittelbar nach der Umstellung sondern auch langfristig. Dafür werden dauerhaft eingerichtete Arbeitsgruppen nötig sein, die mit Fachleuten insbesondere aus Schule, Fachwissenschaft und Fachdidaktik besetzt sind.

Literatur

[1] Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. *Bildungsstandards Berufsbildende Schulen, Angewandte Mathematik BHS.*
http://www.berufsbildendeschulen.at/fileadmin/content/bhs/AGBroschueren/AngewMathe-jan09.pdf

[2] Reinhard Winkler, *Sinn und Unsinn des Rechnens im Mathematikunterricht*, Didaktikhefte der ÖMG, Heft 39 (2007), 155-165.

[3] Reinhard Winkler, *Nachhaltigkeit von Mathematikunterricht durch Förderung der Phantasie*, Professionalität und Professionalisierung. Einige aktuelle Fragen und Ansätze der universitären LehrerInnenbildung. Hrsg.: Ilse Schrittesser. ISBN: 978-3-631-56393-9. Peter Lang GmbH Internationaler Verlag der Wissenschaften. Frankfurt am Main (2009), 179-205.

[4] Reinhard Winkler, *Was leistet der Mathematikunterricht in der Schule und was soll bzw. kann er leisten?*, Internationale Mathematische Nachrichten, Nr. 212, 23-28 (2009).