

# Was leistet der Mathematik- unterricht in der Schule, und was soll bzw. kann er leisten?

**Reinhard Winkler**

TU Wien

**Einleitung** Wer die Einschätzung vertritt, dass es um den Mathematikunterricht an Österreichs Schulen nicht nur zum Besten steht, braucht von Seiten der Mathematiker an den Universitäten wenig Widerspruch zu fürchten. Eine zu deutliche Sprache sprechen unzählige Erfahrungen wie auch Ergebnisse von Tests, die an verschiedenen Universitäten – meist aus Eigeninitiative der dort Lehrenden – im Laufe der Jahre durchgeführt worden sind. (Nicht ausgeklammert sei dabei, dass nicht nur das Schulsystem, sondern auch die Universitäten selbst durchaus Anlass zu Selbstkritik haben.) Entsprechend widmet sich die Didaktikkommission der ÖMG seit Jahren der Frage nach Verbesserungsmöglichkeiten. Vor allem seit die internationale PISA-Studie darauf aufmerksam macht, dass Österreichs Schulsystem möglicherweise doch nicht das beste der Welt ist – also erst seit relativ kurzer Zeit – wird auch in einer breiten Öffentlichkeit über mögliche, ja nötige Reformen diskutiert.

Vieles deutet darauf hin, dass in nächster Zeit sehr langfristige und nachhaltige Weichenstellungen zu erwarten sind (Schlagwort Zentralmatura). Deshalb hat die Didaktikkommission ihre Anstrengungen verstärkt, auch die Sicht der Fachwissenschaft und Fachdidaktik in den Diskurs einzubringen.

So wurde bei der gemeinsamen Tagung von ÖMG und DMV in Graz im Rahmen der Sektion „Didaktik und Popularisierung“ am 24.9.2009 eine Podiumsdiskussion veranstaltet. Universitätslehrer, die unterschiedliche Studienrichtungen mit mehr oder weniger unmittelbarem Mathematikbezug vertreten, waren eingeladen, sich mit Impulsreferaten einzubringen. Rudolf Freund (TU Wien, Informatik, Studiendekan), Gabriel Maresch (TU Wien, Mathematiker mit Lehrerfahrungen insbesondere aus den Studienrichtungen Maschinenbau und Bauingenieurwesen so-

wie aus einem FH-Studiengang Angewandte Elektronik) und Bernhard Raschauer (Universität Wien, Professor am Institut für Staats- und Verwaltungsrecht der Juridischen Fakultät) konnten persönlich teilnehmen. Darüber hinaus stand schriftliches Material zur Verfügung, das ebenfalls in die Diskussion einfluss: von Marcel Widi (Mathematiker, bildet an der JKU Linz Studierende der Wirtschaftswissenschaften aus; außerdem FH Wels), von Gerhard Clemenz (Ökonomieprofessor an der Universität Wien) und die Dokumentation von Tests, die von Mathematikern an der Universität für Bodenkultur durchgeführt worden sind. Diese breite Streuung sollte der Rolle der Mathematik als eines allgemeinbildenden Faches, dessen Wirkung weit über unmittelbare technisch-naturwissenschaftliche Anwendungen hinausreicht, Rechnung tragen. Moderiert wurde die Veranstaltung vom bisherigen Vorsitzenden der Didaktikkommission Wolfgang Schlöglmann (Johannes Kepler-Universität Linz).

Als Ausgangspunkt der Diskussion waren die Referenten eingeladen, zu einigen der folgenden Fragen Stellung zu beziehen:

- Welche spezifischen Anforderungen in Bezug auf Mathematik bestehen zu Studienbeginn? Welche Inhalte benötigen Ihre Studierenden? Welche Algorithmen, Techniken, etc. erwarten Sie zu Studienbeginn?
- Welche Defizite in Bezug auf Inhalte, Operieren, Erfassen von Inhalten, Argumentieren etc. haben Sie bei Ihren Studierenden festgestellt? Haben Sie den Eindruck, dass dabei der Schultyp eine wichtige Rolle spielt?
- Österreich plant, eine zentrale schriftliche Reifeprüfung einzuführen. Was sollte aus Ihrer Sicht im Rahmen dieser Reifeprüfung geprüft werden? Könnten Sie dies eventuell anhand einer konkreten Aufgabenstellung verdeutlichen?
- Was bedeutet aus Ihrer Sicht mathematische Bildung?

Trotz einiger Besonderheiten, welche den unterschiedlichen Erfahrungshintergrund der Diskussionsteilnehmer – Referenten wie Publikum – reflektieren, und trotz einiger Auffassungsunterschiede in manchen Einzelfragen wurde zu einigen wichtigen Aspekten ein breiter Konsens deutlich. Nicht durch protokollartige oder gar vollständige Wiedergabe der Diskussion, sondern durch Nachzeichnung der wichtigsten Themen will ich versuchen, vor allem die auffälligsten Übereinstimmungen zusammenzufassen. Doch auch die (wenigen) kontroversiellen Themen sollen angesprochen werden. Eine Weiterentwicklung derselben durch feinere Differenzierung ließe durchaus auf Fortschritte des Diskurses und Klärung einiger Fragen hoffen.

Zahlreiche interessante Beiträge auch aus dem Publikum kann ich, um den Rahmen dieses Berichtes nicht zu sprengen, hier nicht angemessen würdigen. Auch bin ich nicht in der Lage, alle Autorinnen und Autoren solcher Beiträge namentlich zu erwähnen. Deshalb werde ich dies generell unterlassen, auch wo ich die Namen kenne, und bitte dafür um Verständnis.

**1. Hauptmotiv: Mathematik und Sprache** Die vielleicht auffälligste Gemeinsamkeit vieler Beiträge war die Betonung der vielfältigen Beziehungen zwischen Mathematik und Sprache. Aus Sicht der Informatik (Freund) z.B. ist die Fähigkeit zur Formalisierung, d.h. die Übertragung von Text in natürlicher in formale Sprache, von essenzieller Bedeutung. Dabei geht es keinesfalls darum, Symbol-sprachen um ihrer selbst willen zu pflegen. Wichtiger ist der Brückenschlag von zunächst vielleicht mehrdeutigen Formulierungen, wie sie für die Alltagssprache typisch sind, zu ihren mathematisch korrekten und eindeutigen, oft formalisierten Übertragungen. Programmspezifikation für Softwareentwicklung ist ein typisches Beispiel, wo solche Fähigkeiten gefragt sind, aus der Schule aber leider kaum mitgebracht werden.

Besonders bei der Ausbildung im Rahmen klassischer Ingenieursstudien falle eine „Sprachlosigkeit im Angesicht der Mathematik“ auf, wie es Maresch formulierte. Typisch sei, dass Studierende sehr wohl vernünftige mathematische Vorstellungen entwickeln, sehr häufig aber an der sprachlichen Umsetzung scheitern.

In der Rechtswissenschaft wird die große Bedeutung der Sprachkompetenz wenig überraschen. Raschauer brachte es auf den Punkt, indem er – einen Kollegen zitierend – als Testfragen für die Eignung zu einem Jusstudium vorschlug: „Wie warst Du in Deutsch? Könntest Du zu jedem beliebigen Thema 20 Seiten schreiben?“ Dabei – und hier wird die Relevanz für den Mathematikunterricht deutlich – komme es aber weniger auf Wörter an als auf Begriffe, jene gedanklichen Kategorien, mit denen wir die Welt ordnen. Begriffe müssen erarbeitet werden in einem Denken, das auch unerwartete Alternativen erlaubt. Der Jurist habe zwar große Freiheiten. Er müsse aber stets gute Argumente vorbringen, warum er eine bestimmte Position vertrete und keine andere. Sprachkompetente Argumentation wäre also aus juridischer Sicht eine sehr sinnvolle Zielvorgabe für den Mathematikunterricht, insbesondere wenn er über einen engen technischen Horizont hinaus wertvoll sein will.

Auch zahlreiche Meldungen aus dem Publikum griffen das Thema Sprache auf und ergänzten das Gesagte um weitere Aspekte, wobei teils auch interessante Unterschiede zwischen Sprachkompetenz aus mathematischer und juridischer Sicht zutage traten. Doch zurück zu den Gemeinsamkeiten.

**2. Hauptmotiv: Syntax versus Semantik** Bereits erwähnt habe ich das von Raschauer proklamierte Primat der Begriffe gegenüber den Wörtern. Eine mathematische Entsprechung dazu findet sich im Verhältnis von Semantik und Syntax, wie es in der mathematischen Logik im Zentrum des Interesses steht. Hierbei wird deutlich, dass jeder mathematische Begriff zunächst inhaltlich verstanden und möglichst in natürlicher Sprache gefasst werden muss, bevor Formalisierung am Platze ist. Maresch wies darauf hin, wie wichtig es sei, z.B. mit logischen Quantoren inhaltlich operieren zu können. Nicht zu sehr dürfe man sich von syntaktischen Gewohnheiten leiten lassen und den Symbolen falsche Autorität zu-

gestehen. Legion sind die Beispiele kurioser Fehler im Hochschulalltag, die bei rein symbolischer Formelmanipulation vorkommen, sofern das Verständnis für die mathematische Bedeutung abgeht. Das Klischee des Mathematikers vor einer Tafel mit kryptischen Zeichen befördere das sehr problematische Missverständnis von der Mathematik als Herrschaftsbereich der Symbole, anstatt sich für das zu interessieren, was mit diesen Symbolen bezeichnet wird. Raschauer erwähnte in analogem Zusammenhang Platons Höhlengleichnis, wo die Realität (Semantik = mathematische Objekte, primär) in Kontrast gesetzt wird zu den Schatten (Syntax = mathematische Symbolik, sekundär), die diese Realität wirft.

Die Überbetonung von formaler Symbolsprache wird also sehr kritisch gesehen. Gefordert wird dagegen die Schulung des Abstraktionsvermögens. Es lohnt, sich die Unterschiede zwischen diesen beiden Phänomenen zu verdeutlichen.

**3. Hauptmotiv: Abstraktion** Aus Sicht der Didaktik besteht kaum ein Zweifel darin, dass mathematisches Verständnis nicht beim abstrakten Begriff beginnen kann, sondern zunächst der Anschauung des Konkreten bedarf. Je jünger die Kinder, desto offensichtlicher ist diese Tatsache. Ebenso unumstritten ist jedoch, dass Abstraktion ein Charakteristikum der Mathematik als Wissenschaft ist. Die Podiumsdiskussion zeigte, dass die innermathematische Rolle der Abstraktion aber nicht der einzige Grund ist, sich ihrer auch in der Schule anzunehmen, wenigstens anhand geeigneter Beispiele. Ziel sollte die Erfahrung sein, wie sehr der Weg der Abstraktion vom Konkreten hin zum Allgemeinen und Umfassenden ein wesentliches Element des Denkens ist; auch in vielen anderen Bereichen menschlicher Geistestätigkeit, außerhalb der Mathematik.

Entsprechend führten alle drei Referenten die Bereitschaft und das Vermögen zur Abstraktion als zentrales Bildungsziel an. Maresch wies darauf hin, dass es dabei um die universell maßgebliche Fähigkeit gehe, zwischen Wesentlichem und Unwesentlichem zu unterscheiden. Und diese Fähigkeit sei nicht ausschließlich Begabungssache, sondern könne durchaus auch in der Schule gefördert werden. Raschauer entwickelte das Thema noch weiter, indem er die Denkkategorien Subsumption, Distinktion und Relation unterschied, durchaus in enger Verbindung mit dem bereits erwähnten begrifflichen Denken.

**4. Hauptmotiv: Rezepte versus Konzepte** Jeder Universitätslehrer weiß: Vielen Studierenden fallen Rezepte leichter als Konzepte. Es verwundert nicht, dass alle Referenten dieses Phänomen als unerwünscht ansahen. Freund berichtete von einem Studenten, der allen Ernstes ein allgemeingültiges Rezept verlangte, wie man Computer-Programme schreibt. In den klassischen Ingenieursfächern äußere sich eine ähnliche Mentalität oft in einer beachtlichen Bereitschaft für schematisches Rechnen, das laut Maresch aber meist mit einer Beschränkung auf sehr enge Methoden einhergehe. Mutatis mutandis finden sich Analogien auch in Raschau-

ers Ausführungen. Er berichtete aus seiner eigenen Studienzeit. Einige Zeit trug er sich mit dem Gedanken, selbst Mathematik zu studieren. So lag es für ihn, nachdem er sich doch für Jus entschieden hatte, nicht fern, sich mit der algorithmischen Beschreibung juridischer Entscheidungsprozesse zu beschäftigen. Schließlich kam er aber zur Einsicht, dass dadurch nicht viel gewonnen werden könne. Denn juridische Regeln seien nicht starr und müssen fortlaufend weiterentwickelt werden. Auch sei der Gesetzestext unwichtig im Vergleich zu jenen Prozessen, die juridisches Denken im Kern ausmachen. Es sind also gerade nicht die schematisierbaren Aspekte der Mathematik, wo ihr Wert für die Jurisprudenz zu suchen sei, sondern die Schulung des konzeptuell-begrifflichen Denkens, von dem schon die Rede war.

Sehr lebendig war der Meinungs austausch über die Wichtigkeit des Rechnens bzw. Kopfrechnens. Freund und Widi z.B. kritisieren, dass die Mathematik in der Schule meist zu einem bloßen Rechnen verkomme. Maresch betonte, dass die Beherrschung von Rechenregeln zwar wünschenswert sei, nicht aber entscheidend für den Studienerfolg. Generell könne die Vermittlung technischer Fähigkeiten weitgehend einem Fachstudium überlassen bleiben (Clemenz). In diesem Zusammenhang seien auch Wortmeldungen erwähnt, die einen Niedergang der Rechenfähigkeiten im Laufe der letzten Jahrzehnte beklagten, und solche, die den Wert des Kopfrechnens priesen.

Mir scheint dazu folgende Unterscheidung sinnvoll: Kopfrechnen zwecks Entwicklung des Vorstellungsvermögens und die Fähigkeit, mit Quantitäten zu operieren, ist besonders für Kinder am Anfang ihrer mathematischen Entwicklung eine unerlässliche geistige Erfahrung. Viel hat später darauf aufzubauen. Rechnen hingegen als Virtuosität in der Manipulation mathematischer Symbole (siehe auch weiter oben unter Syntax versus Semantik) ist, insofern sie über die Beherrschung der elementaren Grundrechenarten hinausgeht, nur von lokalem Nutzen für den jeweiligen Kontext. Nie jedoch kann sie Selbstzweck und Hauptziel des Mathematikunterrichts sein. Jedenfalls vermittelt werden muss die grundsätzliche Einsicht, dass Formalisierung möglich und nützlich, weil der automatisierten Verarbeitung durch den Computer zugänglich ist.

**5. Hauptmotiv: Technologieeinsatz** Widi z.B. sieht im ubiquitären Einsatz des Taschenrechners eine Gefahr, welche die elementare Fähigkeit des Kopfrechnens oder auch die schriftlich-algorithmische Beherrschung einfachster Rechenoperationen untergräbt. Er empfiehlt, den Taschenrechner im Schulunterricht überhaupt abzuschaffen und gleich vernünftige Computeralgebrasysteme einzusetzen. Für letzteres sprechen auch Untersuchungen, wonach Schulklassen, die den Computer regelmäßig verwenden, bei Tests besser abschneiden als Klassen ohne Erfahrung damit. Bemerkenswerterweise, so wurde berichtet, beziehe sich das auch auf computerunabhängige Fähigkeiten. Zieht man auch Stellungnahmen von Skeptikern des Computereinsatzes in Betracht, so lässt sich auf allgemeiner Ebene ein

Konsens wahrscheinlich in der Einschätzung finden, dass Computereinsatz sowohl Chancen als auch Gefahren berge und daher besondere Sorgfalt verdiene.

**Resümee und Ziele, auch für eine standardisierte („zentrale“) Reifeprüfung**  
Abschließend will ich auszugsweise noch einige allgemeine Ziele erwähnen, die sich nicht speziell auf eines der fünf ausgeführten Hauptmotive beziehen, die aber in der Diskussion zur Sprache kamen.

Freund betonte, dass Mathematik ihrem Wesen nach ein aufbauendes Fach sei. Deshalb sei im Unterricht Nachhaltigkeit von ganz besonderer Wichtigkeit. Ein Grund für die gegenwärtig unbefriedigende Situation sei die zu große Anzahl von Prüfungen, in der Schule wie an der Universität. Laut Maresch solle keineswegs Perfektion das Ziel sein, sondern die Bereitschaft, sich auf mathematisches Denken einzulassen. Hierfür sei es wichtig, wenigstens an einfachen Beispielen zu vermitteln, dass mathematische Einsichten jedem möglich sind und ein Gefühl der Autonomie und Sicherheit im eigenständigen Denken geben. In eine ähnliche Richtung ging eine andere Wortmeldung, wonach man im Unterricht Fehler zulassen müsse, auch um das Selbstvertrauen zu stärken. Dies wäre sicher auch einem anderen wichtigen Ziel (Clemenz) dienlich, nämlich die leider sehr häufig zu beobachtende Schwellenangst gegenüber der Mathematik abzubauen. Mathematik müsse, so eine andere Wortwahl in ähnlichem Zusammenhang, als Denktechnologie verfügbar gemacht werden.

Die Einschätzungen, wie weit diese Ziele durch bevorstehende Reformen, insbesondere durch die Einführung der standardisierten Reifeprüfung erreicht werden können, variierten erwartungsgemäß. Einerseits war Zuversicht zu vernehmen, dass zur Zeit ein Paradigmenwechsel stattfinde, der mit dem Schlagwort des kompetenzorientierten Unterrichts verbunden sei. Für die Umsetzung sinnvoller Reformen seien unbedingt zentrale Vorgaben notwendig. Nur dann gebe es Chancen für Verbesserungen. Insbesondere scheint die neue Reifeprüfung mehrheitlich als taugliches Instrument eingestuft zu werden, um mehr Aussagekraft und gewisse verbindliche Mindeststandards zu garantieren. Es gab aber auch skeptische Stimmen, die eine teilzentrale Lösung bevorzugen, wo den einzelnen Schulen und Lehrkräften ein gewisser Spielraum zur autonomen Gestaltung gelassen wird. Nur zwei Mathematikstunden wöchentlich, wie es in gewissen Schultypen vorkomme, sei aber sicher zu wenig, um einen vernünftigen einheitlichen Standard zu erreichen. Hier sollte die Schulautonomie Grenzen haben.

Anzustreben sei jedenfalls ein engerer Kontakt zwischen Schulen und Universitäten. Beide Seiten können, wie Freund abschließend meinte, sicher einiges voneinander lernen.

*Adresse des Authors: Reinhard Winkler, TU Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, 1040 Wien*