Was ist Mathematik? — ein subjektiver Zugang

Reinhard Winkler (TU Wien)

1 Zu den mannigfaltigen Aspekten der Fragestellung

Fast so wie bei den Fragen „Was ist der Mensch?“ oder gar „Was ist die Welt?“ sprengt eine Antwort auf die Frage „Was ist Mathematik?“, sofern sie gleichermaßen präzise wie umfassend sein will, jeden Rahmen. Zu viele Facetten nämlich kann man dieser Frage abgewinnen.

Fragt man etwa „Welche Bereiche umfasst die Mathematik?“, so könnte man mit der international gebräuchlichen Klassifikation durch die American Mathematical Society antworten, welche etwa 4000 Spezialgebiete unterscheidet. So beeindruckend und auch notwendig für den Wissenschaftsbetrieb so eine Feingliederung sein mag - bezogen auf die Frage, was Mathematik ist, sind Aufzählungen langweilig und nicht sehr fruchtbar.

Vor allem dem Nichtmathematiker wird eher mit einer Antwort auf die Frage „Welche Rolle spielt die Mathematik in der Welt?“ geholfen sein. Viel gibt es zu sagen über die praktische Nützlichkeit mathematischer Grundkenntnisse für den Einzelnen, über die Unerlässlichkeit mathematischer Sprache und Begrifflichkeiten zum Verständnis von Natur, Ökonomie etc. aber auch über die Ausstrahlung der Mathematik in Philosophie, Geisteswissenschaften und Kunst. Dem inneren Wesen der Mathematik wird dieser Blick von außen jedoch kaum gerecht.

Eher leistet das ein methodischer Ansatz, der mit der Frage zusammenhängt: „Was darf im mathematischen Lehrgebäude als Baustein gelten?“ Darauf gibt es eine erstaunlich präzise Antwort: Alles, was (prinzipiell) mit den Mitteln der Prädikatenlogik und Mengenlehre beschrieben und somit im Rahmen der logisch deduktiven Methode abgehandelt werden kann. In diesem zugegebenermaßen formalistischen Standpunkt kommen immerhin tiefe Erkenntnisse der modernen Mathematik zum Ausdruck. Wollte ich dies hier angemessen illustrieren, müsste ich allerdings gewissen Ergebnissen der mathematischen Logik (vor allem Kurt Gödels Vollständigkeits- und Unvollständigkeitssatz) so viel Raum geben, dass in der Literatur weniger reichlich behandelte Aspekte, die mir aber ein mindestens ebenso großes Anliegen sind, zu kurz kämen.

Und zwar will ich die Frage nach dem Wesen der Mathematik hier verstehen als eine subjektive Lesart der Frage: „Worin besteht mathematische Aktivität?“ Ich glaube, dass die redlichste Antwort darauf im Versuch besteht, persönliche Erfahrungen als Mathematiker nachvollziehbar zu machen. Außerdem lässt sich so besser verstehen, warum es Menschen gibt, die Mathematik sogar mit großer Leidenschaft betreiben. Zum besseren Verständnis scheinen mir zuvor einige Unterscheidungen hilfreich.

2 Drei Stufen von Mathematik — und einige weitverbreitete Missverständnisse

Die Einschätzung, was im Kopf von Mathematikern während der Ausübung ihrer Wissenschaft vorgeht, ist von der jeweiligen persönlichen Erfahrung mit Mathematik geprägt. Und diese beschränkt sich bei Nichtmathematikern in den meisten Fällen auf den Mathematikunterricht in der Schule, manchmal auch noch im Rahmen eines Universitätsstudiums, wo Mathematik als Hilfswissenschaft auftaucht. Leider führt diese Erfahrung oft zu Missverständnissen, die eine völlige Fehleinschätzung von Mathematik bewirken; nämlich als mechanisierbarer Rechenfertigkeit gemäß Formeln und rigiden Vorschriften, die keine Freiheit für individuelle Entfaltung lassen. Der Grund für die weite Verbreitung dieses verkehrten Bildes der Mathematik liegt vor allem darin, dass

Prüfungen in dieser leicht „objektivierbaren“ Form sowohl in der Vorbereitung, als auch in der Auswertung wesentlich leichter abzuwickeln sind. Fehlt bei Lehrern und Prüfern auch noch der fachliche Weitblick, kann das die Missverständnisse noch verschlimmern.

Interessantere Einblicke werden denjenigen gewährt, die auch mit der Welt mathematischer Forschungsresultate Bekanntschaft schließen dürfen. Sie lernen, die individuellen Leistungen genialer Mathematiker zu würdigen, denen, meist in Form mathematischer Beweise, die Lösung von Problemen gelungen ist, an denen sich zuvor Generationen vergeblich versucht hatten. In meist bescheidenerem Rahmen aber grundsätzlich auf ähnliche Weise arbeiten tausende Forscher vor allem an den Universitäten weltweit an mathematischen Problemen und sehen im Entdecken und Beweisen neuer Theoreme ihre berufliche Hauptaufgabe. Oft noch mehr als vom fachlichen Interesse werden sie von einem Druck zum Publizieren angetrieben, der in den letzten Jahrzehnten leider fragwürdige Ausmaße angenommen hat. Denn so sehr diese Mechanismen auch ihre argumentierbare Rationalität besitzen und wichtige Anreize für die Forschung mit sich bringen; sie lenken von Wichtigerem ab. Selbst das Finden neuer Theoreme soll in der Mathematik nicht Selbstzweck sein. Primär geht es nämlich darum, größere Zusammenhänge sichtbar zu machen, wie sie sich im Reich der Ideen offenbaren.

Der Einfachheit halber will ich also drei Stufen mathematischer Aktivität unterscheiden:

1. Rechnen und Ausführung mechanisierbarer Algorithmen
2. Mathematisches Beweisen, der logisch deduktiven Methode folgend
3. Die Entwicklung und Vernetzung von Ideen und Vorstellungen sowie die Vertiefung des Verständnisses derselben

Dabei ist die erste Stufe manchmal subtiles, manchmal banales Instrument der zweiten. Ähnlich ist die zweite Stufe unverzichtbare Erläuterung der dritten, aber oft nicht viel mehr. Eigentlicher Beweggrund, Mathematik zu betreiben — besonders bei wahrhaft großen Mathematikern wird das deutlich — ist die dritte Stufe. Nur wer die Reize der Mathematik auf dieser dritten Stufe wenigstens vom Hörensagen kennengelernt hat, kann der Mathematik gerecht werden.

3 Mathematik von innen erlebt

Der Kern mathematischer Aktivität und Kreativität hat wenig mit der trickreichen Kombination neuer Operationsabfolgen zu tun (obwohl auch das manchmal zu unverhofften Durchbrüchen führt). Wichtiger ist die Leistung des Vorstellungsvermögens, mit dem geistigen Auge neue Gesichtspunkte einzunehmen. Meist treten Ideen als neue Konfigurationen teils altbekannter mathematischer Gebilde auf, erhellt vom Licht der Imaginationsgabe. Vom professionellen Mathematiker wird erwartet, dass er diese Ideen zu formalisieren, d.h. in strenge Begriffe und beweisbare Theoreme zu übersetzen, imstande ist. Eine größere Herausforderung an seine Kreativität und Phantasie besteht jedoch darin, umgekehrt aus strengen mathematischen Texten wieder die Ideen lebendig werden zu lassen.

Ich möchte formale mathematische Texte mit fossilen Skeletten vergleichen, aus denen der Fachmann Anatomie und Lebensweise ausgestorbener Arten rekonstruieren kann oder, vielleicht noch aussagekräftiger, mit der Partitur einer Symphonie. Der Komponist geht von einer Klangvorstellung aus, zu deren Präzisierung ihm die Notenschrift dienlich ist, wenn nicht gar notwendig für die genaue Vermittlung gegenüber anderen Musikern. Der mathematische Leser wie der ausführende Musiker setzen ihrerseits beide das symbolisch Fixierte wieder zusammen zu mathematischen beziehungsweise klanglichen Vorstellungen. Freilich hat die Analogie insofern Grenzen, als es in der Musik leichter ist, auch ohne Kenntnis der Partitur lauschend zu genießen. Die direkte Übermittlung mathematischer Vorstellungen ohne die Zwischenstufe des Formalismus ist schwieriger. Mathematische Sinnlichkeit verlangt große Raffinesse, und ihr Genuss will erst erarbeitet werden. Hat man aber die Phantasiearbeit des Aufbaus von Vorstellungen mit gleichsam sinnlicher Qualität erst einmal geleistet, so wird man in Zukunft vorzugsweise (weil unmittelbarer, lustvoller und zweckmäßiger) direkt auf diese Vorstellungen zugreifen und nur in der technischen Detailarbeit auf die Symbole dafür.

In Analogie zur Kunst möchte ich auch von expressiver Mathematik sprechen im Gegensatz zu langweiliger. Es geht nämlich keineswegs nur um den logischen Gehalt eines mathematischen Theorems, sondern auch um die Klarheit und Deutlichkeit seiner Präsentation. Entsprechend trachtet der Mathematiker nicht nur danach, vorhandene Sätze zu verallgemeinern oder zu variieren. Darüber hinaus versucht er, neue wie bereits dagewesene Ideen und Vorstellungen möglichst überzeugend darzustellen und zu verbreiten. Besonders Mathematiklehrer, von der Grundschule bis zur Universität, stehen vor dieser anspruchsvollen Aufgabe.

Mathematik ist eine Reise durch das Reich der Ideen: imaginäre Welten, die es möglichst klar und präzise zu beschreiben gilt, denn vielleicht sind sie real! Bernhard Riemanns Leistung zum Beispiel, die nicht lange vor ihm gefundenen nichteuklidischen Geometrien mit verfeinerten Augen unter einen neuen Gesichtspunkt zu stellen, hätte man in seiner Zeit vielleicht noch als phantastische Spielerei jenseits der Wirklichkeit ansehen können. Etwa ein halbes Jahrhundert später verwendete Einstein diese Ideen, um in seiner allgemeinen Relativitätstheorie radikal neue Vorstellungen von Raum und Zeit zu beschreiben. Experimente und Beobachtungen wenige Jahre später bestätigten, dass diese Geometrie sogar genauer mit der Wirklichkeit übereinstimmt als die noch von Kant als denknotwendig angesehene euklidische. Kein Wunder also, dass der große David Hilbert einmal die Nachricht, einer seiner früheren Studenten habe sich von der Mathematik ab- und der Literatur zugewandt, mit den Worten kommentierte: „Das ist gut so; denn für die Mathematik fehlte es ihm an Fantasie.“ Das sollte auch plausibel machen, warum ästhetische Gesichtspunkte in der Mathematik so wichtig sind.

Mehr als andere Wissenschaften, die an speziellere Aspekte der Wirklichkeit gebunden sind, bereichert die Mathematik unser Wahrnehmungsvermögen vor allem für abstrakte Zusammenhänge. Der geschulte Blick erkennt sie auch in konkreten Situationen des Lebens wieder. Abstraktion ist nämlich in Wahrheit eine höhere Form der Veranschaulichung. Indem sie von bekannten Phänomenen Unwesentliches ausklammert und unser geistiges Auge auf das Wesentliche lenkt, macht sie dieses Wesentliche unserem Vorstellungsvermögen zugänglich und erweitert somit unser Bewusstsein.

Nötig sind dafür vor allem Muße und Konzentration. Am kreativsten ist der Mathematiker, wenn er mit geschlossenen Augen vermittels seiner Vorstellungskraft mathematische Landschaften bereist. Wissen wird dabei nicht in Gestalt von gelernten Formeln, Theoremen und Einzelfakten wirksam, sondern als Schau der inneren Zusammenhänge, als Vertrautheit mit mathematischen Landschaftsformen und als Fähigkeit, neue Pfade mit interessantem Verlauf zu erahnen. Gehirnforscher mögen überprüfen, ob die Polarität Formel–Vorstellung mit den unterschiedlichen Funktionen der beiden Hirnhälften zu tun hat, wie der berühmte Physiker und Mathematiker Roger Penrose in seinem Bestseller „The Emperor's New Mind“ ziemlich überzeugend vermutet. Im Zustand höchster Konzentration geht das Zeitgefühl verloren (kein Wunder, muten die geschauten Welten doch ewig an) ebenso wie die normale Sprechfähigkeit. Dieser meditationsähnliche Zustand ist sehr lustvoll und ähnelt dem eines spielenden Kindes, das, fasziniert vom Spielzeug, alle Rufe der Eltern, zur Mahlzeit zu kommen, ausblendet und nicht in der Lage ist, auch nur „ja“ oder „nein“ zu sagen.

4 Schluss

Der Gegenstand der Mathematik sind Ideen und Vorstellungen. Es gilt, diese exakt zu beschreiben und zu klären, ob sie denknotwendig sind oder inwieweit auch anderes denkbar ist. Im Gegensatz zu den empirischen Wissenschaften, welche die Welt erforschen, wie sie ist, untersucht die Mathematik, wie die Welt sein muss und wie sie sonst noch sein könnte. Insofern ist die Mathematik unter allen Wissenschaften die freieste, universellste, und sie durchdringt deshalb viele andere wissenschaftliche Disziplinen. Mathematik stellt die höchste Synthese von Intuition und Präzision dar. Sie adäquat zu lehren verlangt die ganzheitlichste Form von Kommunikation, nämlich die Vermittlung von Bewusstseinszuständen zwischen menschlichen Individuen.

Zusammenfassend lässt sich, teilweise in Anlehnung an das berühmte galileische Paradigma für die Physik, über die Mathematik sagen: Die Methode der Mathematik ist in präzise Sprache gegossene logisch folgerichtige Analyse aller Denkmöglichkeiten; ihre Aufgabe ist es, alles Vorstellbare vorzustellen und alles nicht Vorstellbare vorstellbar zu machen.

Ich danke Andrew M.W.Glass, Martin Goldstern und Manfred Kronfellner für wertvolle Diskussionen während der Entstehung dieses Artikels.