

Im Anfang war die Exponentialfunktion

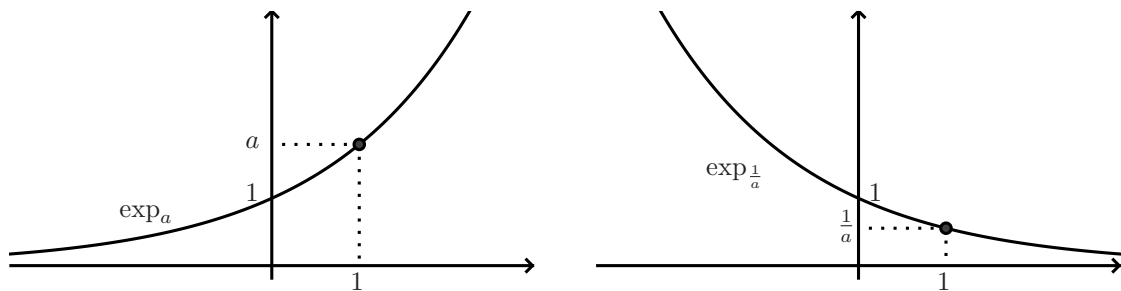
Reinhard Winkler (TU Wien) *

Zusammenfassung

Die Exponentialfunktion \exp_a (zur Basis a) kann als Ausgangspunkt dienen, um – vom Konkreten zum Allgemeinen vordringend – weite Teile der Schulmathematik zu erschließen. Dies wird in diesem Artikel in drei Hauptteilen dargestellt. Einer ist der Konstruktion von \exp_a gewidmet, ein zweiter den Differentiationseigenschaften von \exp_a und ein letzter versammelt eine Reihe von Anknüpfungspunkten zu vielfältigen Teilgebieten der Mathematik.

1 Einleitung

Die Exponentialfunktion ist eng verknüpft mit Wachstumsprozessen. Ein typischer Verlauf der Funktion $\exp_a(x) = a^x$ und $\exp_{\frac{1}{a}}(x) = (\frac{1}{a})^x = a^{-x}$ für $a > 1$ ist in den folgenden Abbildungen dargestellt.



Doch nicht jeder Prozess, wo sich eine Zunahme beschleunigt, der Funktionsgraph also nach oben gekrümmt ist, entspricht exponentiellem Wachstum. Entscheidend ist, dass die Wachstumsrate der betrachteten Größe proportional ist zu dieser Größe selbst. Klassische Beispiele sind: Vermögen bei konstantem Zinssatz, Bevölkerungswachstum bei konstanter Fortpflanzungsrate pro Individuum¹, radioaktiver Zerfall etc. Nicht exponentiell (sondern quadratisch) wächst beispielsweise die Fallhöhe eines Körpers im freien Fall ohne Luftwiderstand (deshalb *Wurfparabel*).

Nicht auf den ersten Blick ist der Exponentialfunktion anzusehen, welche zentrale Rolle ihr generell in der Mathematik zukommt. Nicht umsonst beginnt Walter Rudins berühmtes Buch *Real and Complex Analysis* (das auch in deutscher Übersetzung [2] vorliegt) mit einem Prolog über die Exponentialfunktion und dieser mit dem Satz: *This is the most important function in mathematics*. Allerdings definiert Rudin in diesem Buch, zumal es sich an eine ziemlich fortgeschrittene Leserschaft wendet, die Exponentialfunktion als Potenzreihe. Im Hinblick auf den Schulunterricht wollen wir hier einen anderen Zugang wählen:

Ausgehend von der elementaren Definition von Potenzen a^n mit Exponenten aus \mathbb{N} werden in Abschnitt 2 die Zahlenbereichserweiterungen nachvollzogen, um $\exp_a(x) = a^x$ auf beliebige $x \in \mathbb{R}$ auszudehnen. Erst dann kommen Differentialrechnung und die sich daraus ergebende besondere Bedeutung der Zahl e zur Sprache (Abschnitt 3) sowie Anknüpfungspunkte zu einer Reihe weiterer Bereiche der Mathematik (4).

An dem besonders gut für diesen Zweck geeigneten Beispiel der Exponentialfunktion möchte ich ein didaktisches Prinzip illustrieren und propagieren: die Betonung von Querverbindungen, nicht nur interdisziplinär, sondern auch innerhalb der Mathematik. Um diesen Gesichtspunkt nicht durch zu viele technische Details zu verschleiern, verlagere ich letztere oft in Fußnoten². Die Querverbindungen

*Graphiken von Anita Dorfmayr mittels Geogebra

¹allfällige Komplikationen aufgrund streuender Lebenserwartungen seien hier vernachlässigt

²Vermutlich empfiehlt es sich, die Fußnoten beim ersten Lesen zunächst zu überspringen.

sind sehr zahlreich und werden sich im Unterricht auf mehrere Schuljahre verteilen. Konkret kommen folgende Themen zur Sprache (die Zahlen in Klammer beziehen sich auf die entsprechenden Kapitel bzw. Abschnitte):

Die natürlichen Zahlen mit Rekursion/Induktion samt ihrer Axiomatisierung nach Peano (2.1, 2.2), Rechenregeln als Funktionalgleichungen (2.2), Zahlenbereichserweiterungen (2.3, 2.4, 2.5), Stetigkeit und Umkehrfunktionen (2.4), Folgenkonvergenz (2.5, 3.7), Vollständigkeit von \mathbb{R} (2.5), Existenz- und Eindeigkeitssätze (2.6, 4.3), Mengenlehre (3.3), monotone Funktionen (3.3), Differentiation und Konvexität (3.2, 3.4, 3.5), die Eulersche Zahl e (3.6), weitere wichtige Funktionen wie Logarithmus u.a. (4.1, 4.5), Algebra und Topologie als Strukturmathematik (4.2), Differentialgleichungen und ein modernes Weltbild (4.3), unendliche Reihen (4.4, 4.5), Numerik (mit Taylor bzw. Mittelwertsatz im Hintergrund) (4.4), die komplexen Zahlen und ihre trigonometrische Darstellung (4.6), Integralrechnung und Hauptsatz (4.7) und Stochastik (4.8).

Insgesamt geht aus dem Artikel auch die Wichtigkeit des Funktionsbegriff für die Mathematik hervor. Auf das Beispiel bezogen: Die Zahl e als einzelne Zahl ist relativ uninteressant, erst im Kontext einer Funktion (nämlich der Funktion $\exp = \exp_e$) wird ihre Bedeutung klar.

2 Die Konstruktion der Exponentialfunktion \exp_a

2.1 Exponenten aus \mathbb{N} – Rekursion, Induktion

Die mathematische Schreibweise a^n bezeichnet das Produkt von n Faktoren, jeder gleich a . (Obwohl solche Produkte für beliebige $a \in \mathbb{R}$ sinnvoll gebildet werden können, sei für das Weitere $a > 0$ vorausgesetzt.) Diese didaktisch sicher angemessene Erklärung lässt sich mathematisch weitsichtiger als rekursive Definition

$$a^0 := 1, \quad a^{n+1} := a^n \cdot a$$

fassen. Denn sie gibt Anlass, den Rekursionssatz³ zu erwähnen, wonach in der angegebenen Weise tatsächlich für alle $n \in \mathbb{N}$ eindeutige Werte $a^n =: \exp_a(n)$ definiert sind. Als Vertiefungen können Grundlagenfragen der natürlichen Zahlen (siehe auch [4]) ebenso angeschnitten werden wie die fundamentale Rolle von Rekursion und Induktion für die Funktionsweise des Computers und für die gesamte Informatik, insbesondere auch für die Praxis das Programmierens.

Folgende für Schüler unmittelbar einsichtigen Sachverhalte besitzen strenge Beweise durch Induktion: Die Funktion \exp_a ist (zunächst auf \mathbb{N}) strikt positiv, streng monoton wachsend für $a > 1$, konstant 1 für $a = 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$. Für $a > 1$ wächst $\exp_a(n)$ mit n über jede Schranke⁴. Hält man in a^n nicht a , sondern n fest, erhält man die *Potenzfunktionen* $p_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $a \mapsto a^n$. Diese sind stetig⁵ und für $n \geq 1$ streng monoton wachsend.

2.2 Funktionalgleichung und Permanenzprinzip

Auch die Rechenregeln

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \quad \text{und} \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

sind unmittelbar einsichtig, wenigstens aus naiver Sicht. Fragt man nach einem strengen Beweis, so muss man abermals auf die Grundlegung der natürlichen Zahlen zurückgreifen und einen Induktionsbeweis nach n führen⁶. Wer will, kann hier in sehr natürlicher Weise die Rolle der Peanoaxiome illustrieren, siehe nochmals [4].

Noch wichtiger ist für uns jedoch ein anderer Blickwinkel. Und zwar zeigt z.B. die erste der beiden Rechenregeln für Potenzen, dass $f = \exp_a$ eine Lösung der sogenannten *Funktionalgleichung* $f(x+y) =$

³Eine einfache Version des Rekursionssatzes (formalisiert wirkt er etwas umständlich) besagt im Wesentlichen, dass eine Folge (hier die der a^n , $n \in \mathbb{N}$) eindeutig definiert ist, sofern das 0-te Glied gegeben und außerdem erklärt ist, wie sich die weiteren Glieder aus den jeweils vorangehenden ergeben.

⁴Dies folgt mit $a = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, aus der Bernoullischen Ungleichung $(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$, die ihrerseits wiederum leicht mittels Induktion (der Induktionsschritt lautet $(1 + \varepsilon)^{n+1} = (1 + \varepsilon)^n(1 + \varepsilon) \geq 1 + n\varepsilon + \varepsilon + n\varepsilon^2 \geq 1 + (n+1)\varepsilon$) bewiesen werden kann.

⁵Produkte stetiger Funktionen sind wieder stetig; hier fließt also erstmals Analytisches ein.

⁶Beispielsweise beweist man die erste Rechenregel $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ wie folgt: Für $n = 0$ (Induktionsanfang) haben wir die Gleichung $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$, für den Induktionsschritt von n auf $n+1$ berechnet man $a^{m+(n+1)} = a^{(m+n)+1} = a^{m+n} \cdot a = (a^m \cdot a^n) \cdot a^1 = a^m \cdot (a^n \cdot a^1) = a^m \cdot a^{n+1}$.

$f(x) \cdot f(y)$ ist. Die zweite besagt, dass die Hintereinanderausführung von zwei Potenzfunktionen wieder eine solche ist, wobei sich die Exponenten multiplizieren. Für spätere Referenzen seien daher die Beziehungen

$$\text{FGexp: } \exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y),$$

und

$$\text{FGpot: } p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha \cdot \beta},$$

hervorgehoben, die bisher allerdings nur für $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ zur Verfügung stehen. Der Vollständigkeit halber sei auch noch die ebenfalls vertraute Rechenregel $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ erwähnt, die sich als Funktionalgleichung sowohl für \exp als auch für p_n schreiben lässt, nämlich als

$$\text{FGexp*}: \exp_{a \cdot b} = \exp_a \cdot \exp_b \quad \text{und} \quad \text{FGpot*}: p_n(a \cdot b) = p_n(a) \cdot p_n(b).$$

Unser Hauptanliegen in diesem Kapitel wird darin bestehen, die Gültigkeit von FGexp und FGpot auszudehnen auf den Fall, dass x, y, α, β umfassenderen Zahlenbereichen entnommen werden dürfen. (Wegen der Beständigkeit der Rechenregeln spricht man in diesem Zusammenhang auch vom *Permanenzprinzip*.) Das wird uns die Gelegenheit geben, die Zahlenbereichserweiterungen zu rekapitulieren, und zwar in beeindruckender Harmonie mit den Erfordernissen für \exp_a .

Das wiederkehrende Schema unserer Vorgangsweise lässt sich in folgenden Schritten festmachen. A sei dabei ein Zahlenbereich, auf dem \exp_a bereits definiert ist und FGexp sowie FGpot gelten, und $B \supset A$ eine Erweiterung von A , auf die \exp_a entsprechend fortgesetzt werden soll.

1. Hypothetische Annahme gewisser wünschenswerter Eigenschaften (FGexp, FGpot oder Stetigkeit) auch auf B .
2. Unter dieser Hypothese Ableitung einer notwendigen Bedingung an $\exp_a(x)$ für $x \in B$.
3. Nachweis, dass es genau ein $\exp_a(x) \in \mathbb{R}$ gibt, welches dieser Bedingung genügt. Dieser Nachweis zerfällt in einen Existenz- und einen Eindeigkeitsteil.
4. Nachweis, dass damit die gewünschten Eigenschaften (FGexp, FGpot, Positivität, Monotonie, Stetigkeit) auch für $x, y, \alpha, \beta \in B$ gültig bleiben.

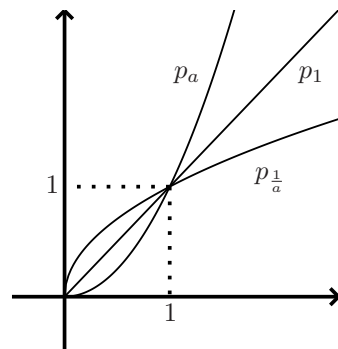
Im Schulunterricht wie auch hier darf auf eine formal vollständige Ausführung (besonders von Schritt 4) verzichtet werden, weil der Aufwand nicht immer durch entsprechende Einsichten belohnt wird. Ich werde mich auf besonders interessante Aspekte beschränken. Im folgenden, ersten Schritt behandeln wir den Fall $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$.

2.3 Exponenten aus \mathbb{Z}

Soll FGexp für beliebige ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gelten, so bedeutet das für $n \in \mathbb{N}$ insbesondere $1 = a^0 = a^{n+(-n)} = a^n \cdot a^{-n}$ (Schritt 1), woraus sich als Definition zwingend $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ (Schritt 2) ergibt. Die Durchführung der verbleibenden Schritte 3 und 4 sei dem Leser überlassen.

2.4 Rationale Exponenten (Wurzeln als Umkehrfunktionen)

Nun sei $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$. Wegen $p_{\frac{m}{n}} \circ p_n = p_{\frac{m}{n} \cdot n} = p_m$ (FGpot) haben wir $p_{\frac{m}{n}} := p_m \circ p_n^{-1}$ zu setzen. Insbesondere muss $p_{\frac{1}{n}}$ (n -te Wurzel) die Umkehrfunktion p_n^{-1} von $p_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^n$ sein. Den Graphen einer Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Hauptdiagonale, die ihrerseits die Funktion p_1 darstellt. Umkehrfunktionen sind, sofern sie existieren, eindeutig bestimmt. Ihre Existenz ist gleichbedeutend mit der Bijektivität der ursprünglichen Funktion. Wir haben also zu begründen, warum die n -te Potenz p_n auf \mathbb{R}^+ bijektiv ist. Die Injektivität folgt, weil die Monotonie streng ist. Für die Surjektivität sind zwei Eigenschaften verantwortlich, Unbeschränktheit⁷ und Stetigkeit, mithin die Gültigkeit des Zwischenwertsatzes⁸.



⁷ gilt wegen $p_n(x) \geq p_1(x) = x$ für $x \geq 1$ und $n \geq 1$

Der einfache, allgemeingültige Satz, dass die Umkehrfunktion einer streng monotonen stetigen Funktion auf \mathbb{R}^+ (oder \mathbb{R} oder einem Intervall) wieder stetig ist, sollte an dieser Stelle explizit erwähnt und graphisch veranschaulicht werden⁹. Mit seiner Hilfe ergeben sich Existenz und Eindeutigkeit sowie Stetigkeit der n -ten Wurzeln p_n^{-1} wie auch der Funktionen p_n^m , und die Definition

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) := p_m \circ p_n^{-1}(a)$$

ist sinnvoll. Hervorzuheben ist an dieser Stelle die Problematik der Wohldefiniertheit¹⁰, die auch einen Brückenschlag zur Definition der rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen von Paaren $(m, n), (m', n')$ mit $mn' = m'n$ ermöglicht.

2.5 Beliebige Exponenten aus \mathbb{R}

Beim Übergang von $A = \mathbb{Q}$ zu $B = \mathbb{R}$ kommen (wenig überraschend, vgl. auch meinen Artikel [5]), neuartige, nämlich vorwiegend analytische Aspekte ins Spiel. Die Fortsetzung von \exp_a von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} ist nicht allein über Gleichungen wie FGexp oder FGpot möglich. Statt dessen ist für eine sinnvolle Definition von $\exp_a(x)$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ eine Darstellung von x als Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$ nützlich. Die naheliegende Definition lautet dann

$$\exp_a(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(x_n),$$

was im Wesentlichen die Stetigkeit von \exp_a zum Ausdruck bringt. Um diese Definition rigoros zu rechtfertigen, sind einige Überlegungen nötig, die in den Schulunterricht wohl nur ansatzweise einfließen können. Geht man der Situation auf den Grunde, erweisen sich Begriffe wie gleichmäßige Stetigkeit, Cauchyfolge und Vollständigkeit metrischer Räume als entscheidend¹¹.

2.6 Zusammenfassung: Existenz und Eindeutigkeit von \exp_a

Das bisher Erreichte lässt sich leicht zu folgendem Satz samt Definition zusammenfassen bzw. zuspitzen:

Satz 1 1. Für jedes $a > 0$ hat die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x$, folgende Eigenschaften:

$$(a) \exp_a(1) = a.$$

⁸Geben wir uns nämlich irgendein $y \in \mathbb{R}$ vor, zu dem wir ein x mit $p_n(x) = x^n = y$ suchen, so wählen wir mittels Unbeschränktheit zunächst ein $x_0 > \max\{y, \frac{1}{y}\}$. Es folgt leicht $p_n(x_0^{-1}) < y < p_n(x_0)$, also gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein x mit $f(x) = y$.

⁹Das formale Argument (o.B.d.A. für wachsend) ist sehr einfach, im Schulunterricht aber vielleicht weniger durchschlagskräftig: Ist $f^{-1}(x_0) = y_0$, d.h. $f(y_0) = x_0$, und $\varepsilon > 0$, dann wird die offene Umgebung $(f(y_0 - \varepsilon), f(y_0 + \varepsilon))$ von $x_0 = f(y_0)$ durch f^{-1} ganz in die ε -Umgebung $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ des Funktionswertes $f^{-1}(x_0) = y_0$ abgebildet. Kaum für den Unterricht geeignet ist wohl die theoretisch interessante Einbettung in einen abstrakteren Zusammenhang: Auf kompakten Mengen definierte stetige Injektionen sind sogar Homöomorphismen.

¹⁰A priori wäre es denkbar, dass der Wert in obiger Definition von der Darstellung der rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ als Bruch abhängt. Durch Ausnützung der bereits gesicherten Rechenregeln auf \mathbb{Z} folgt für $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ aber $mn' = m'n$, also $p_m \circ p_{n'} = p_{mn'} = p_{m'n} = p_{m'} \circ p_n$ sowie $p_{n'} \circ p_n = p_{n' \cdot n} = p_n \circ p_{n'}$, also $p_n^{-1} \circ p_{n'} = p_{n'} \circ p_n^{-1}$. Insgesamt erhalten wir somit tatsächlich $p_{\frac{m}{n}} = p_m \circ p_n^{-1} = p_m \circ p_n^{-1} \circ p_{n'} \circ p_{n'}^{-1} = p_m \circ p_{n'} \circ p_n^{-1} \circ p_{n'}^{-1} = p_{m'} \circ p_n \circ p_n^{-1} \circ p_{n'}^{-1} = p_{m'} \circ p_{n'}^{-1} = p_{\frac{m'}{n'}}$.

¹¹Dass es bei der Fortsetzung einer Funktion von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} über die Stetigkeitsforderung $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ zu Problemen kommen kann, zeigt etwa das Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1}{2-x^2}$, die an den irrationalen Stellen $\pm\sqrt{2}$ nicht stetig auf \mathbb{R} fortgesetzt werden kann.

Eine sorgfältige Analyse der Situation zeigt, dass \exp_a im Gegensatz zu f in jedem rationalen Intervall gleichmäßig stetig ist (d.h. dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, welches für alle x die Stetigkeitsdefinition erfüllt). Gleichmäßige Stetigkeit garantiert nämlich, dass sogenannte Cauchyfolgen (für die es definitionsgemäß zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt derart, dass für je zwei spätere Indizes $n_1, n_2 \geq N$ die Folgenglieder x_{n_1}, x_{n_2} einen Abstand $< \varepsilon$ haben) wieder in Cauchyfolgen übergeführt werden. Da \mathbb{R} als metrischer Raum vollständig ist (d.h. Cauchyfolgen stets konvergieren), gibt es den in der Definition auftretenden Grenzwert $\exp_a(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp_a(x_n)$ somit wirklich. Überdies ist er unabhängig von der speziellen Wahl der gegen x konvergenten Folge.

Zum Nachweis, dass \exp_a auf Intervallen $[\alpha, \beta]$ tatsächlich gleichmäßig stetig ist, genügt es, den Fall $a > 1$ zu betrachten und (weil dann \exp_a auf \mathbb{Q} monoton wachsend ist) für vorgegebene $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden derart, dass für alle rationalen $x, y \in [\alpha, \beta]$ mit $x < y < x + \delta$ die Ungleichung $a^y - a^x < \varepsilon$ gilt. Tatsächlich braucht man δ nur so zu wählen, dass $a^\delta < 1 + a^{-\beta} \varepsilon$ gilt, denn dann folgt $a^y - a^x < a^{x+\delta} - a^x = a^x \cdot a^\delta \leq a^x (1 + a^{-\beta} \varepsilon) < a^x + a^{x-\beta} \varepsilon \leq a^x + \varepsilon$.

$$(b) \exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y).$$

(c) \exp_a ist stetig.

(d) \exp_a ist monoton; streng monoton wachsend für $a > 1$, konstant 1 für $a = 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.

(e) Für $a > 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp_a(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = 0$.

$$(f) \exp_{\frac{1}{a}}(x) = \exp_a(-x).$$

2. Erfülle umgekehrt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Bedingungen:

(a) $f(x) \neq 0$ wenigstens für ein $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) f ist stetig an wenigstens einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dann ist $a := f(1) > 0$ und $f = \exp_a$.

Beweis: Die erste Aussage des Satzes ist lediglich eine Zusammenfassung der vorangegangenen Abschnitte, es verbleibt daher der Beweis der zweiten. Ist $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so folgt für ein beliebiges weiteres $x \in \mathbb{R}$ wegen $f(x_0) = f((x_0 - x) + x) = f(x_0 - x) \cdot f(x)$ sofort auch $f(x) \neq 0$. Damit sind alle Funktionswerte $f(x) = f(\frac{x}{2})^2 > 0$ positiv, insbesondere auch $a := f(1) > 0$. Eine kurze Rekapitulation der Konstruktion von \exp_a zeigt, dass $f = \exp_a$ die einzige Möglichkeit ist, sofern wir globale Stetigkeit von f fordern. Der Beweis ist also vollständig, wenn wir zeigen können, dass f nicht nur an x_0 stetig ist, sondern an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}$. Dies gelingt, indem die Stetigkeit mit Hilfe der Bedingung (b) gewissermaßen von der Stelle x_0 an eine beliebige andere Stelle x verschoben wird. Nachzuweisen ist dazu die Grenzwertbeziehung $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x+\varepsilon) = f(x)$. Aus Bedingung (b) lesen wir ab:

$$f(x+\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon + (x - x_0)) = f(x - x_0) \cdot f(x_0 + \varepsilon).$$

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit bei x_0 gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0)$. Also folgt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x - x_0) \cdot f(x_0 + \varepsilon) = f(x - x_0) f(x_0) = f(x - x_0 + x_0) = f(x),$$

wobei zuletzt nochmals (b) verwendet wurde. \square

3 Exponentiation und Differentialrechnung

3.1 Die Rollen von Funktionalgleichung und Konvexität

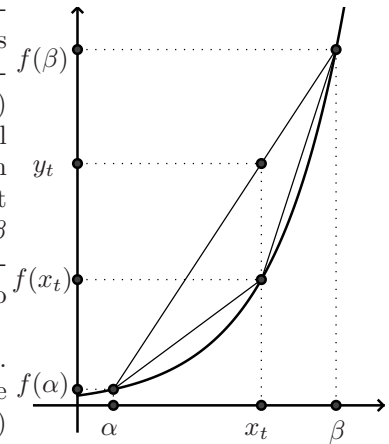
Konstruiert man den Graphen der Exponentialfunktion \exp_a punktweise, so nähert er sich einer glatten Kurve wie in den Abbildungen in der Einleitung an. Keine Zweifel an der Differenzierbarkeit kommen auf. Für einen mathematischen Beweis ist aber doch einiges zu tun. Der im Folgenden beschrittene Weg kombiniert zwei entscheidende Eigenschaften von \exp_a : Konvexität (siehe Abschnitt 3.2) und FGexp (siehe Abschnitt 2.2).

Zwar können konvexe Funktionen, bildlich gesprochen, Ecken aufweisen, wo rechts- und linksseitige Ableitungen (die aber jedenfalls existieren) nicht übereinstimmen. Ecken können aber nur relativ selten (an höchstens abzählbar vielen Stellen) auftreten (Abschnitt 3.4), wie sich mit Hilfe mengentheoretischer Überlegungen (Abschnitt 3.3) zeigt. Man darf also von irgendeiner Stelle der Differenzierbarkeit ausgehen, welche mittels FGexp an beliebige andere Stellen verschoben werden kann (Abschnitt 3.5). Die Abschnitte 3.6 und 3.7 betreffen die Eulersche Zahl e .

3.2 Die Konvexität von \exp_a

Der anschaulichen Feststellung, dass der Graph der Exponentialfunktion nach oben gekrümmt ist, entspricht die Tatsache, dass \exp_a eine konvexe Funktion ist. Allgemein heißt eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oft ist f auch nur auf einem Intervall definiert) konvex, wenn der Funktionsgraph über einem beliebigen Intervall $[\alpha, \beta]$ unterhalb der geradlinigen Verbindung zwischen den Punkten $(\alpha, f(\alpha))$ und $(\beta, f(\beta))$ liegt. Anders formuliert: Der Funktionswert von f an einer sogenannten Konvexkombination $x_t = t\alpha + (1-t)\beta$ ($0 \leq t \leq 1$) von α und β liegt unterhalb der entsprechenden Konvexkombination $y_t = tf(\alpha) + (1-t)f(\beta)$ der Funktionswerte, also (Konvexitätsungleichung):

$f(x_t) = f(t\alpha + (1-t)\beta) \leq tf(\alpha) + (1-t)f(\beta) = y_t$ für alle $t \in [0, 1]$.
Tatsächlich erfüllt \exp_a diese Bedingung¹². (Viel mehr über konvexe Funktionen und Mengen kann man der Monographie [1] entnehmen.)



3.3 Ein kurzer Ausflug in die Unendlichkeit (oder wozu Mengenlehre wirklich gut ist)

Der historische Ursprung der Mengenlehre liegt weniger in den logisch-sprachlichen Aspekten, wie ich sie in [6] behandelt habe, sondern vor allem in der von Georg Cantor um 1873 entdeckten Unterscheidung verschiedener mathematischer Unendlichkeiten. Einiges dazu habe ich in [3] behandelt. Hier sei nur das Wichtigste rekapituliert: Die Menge \mathbb{Q} ist, obwohl echte Obermenge von \mathbb{N} , mit \mathbb{N} gleich mächtig in dem Sinn, dass es eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ gibt¹³. Solche Mengen heißen auch abzählbar. Im Gegensatz dazu ist \mathbb{R} überabzählbar, weil es keine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt¹⁴. Hieraus lässt sich die bemerkenswerte und für unsere weiteren Zwecke entscheidende Konsequenz ziehen, dass monotone Funktionen auf \mathbb{R} (wie \exp_a) Stetigkeitsstellen besitzen müssen (sogar überabzählbar viele)¹⁵.

¹²Beweisskizze für $a > 1$ (für $a < 1$ fast genauso): Wir betrachten ein beliebiges reelles Intervall $[\alpha, \beta]$, bezeichnen mit T die Menge aller $t \in [0, 1]$, für welche die Konvexitätsungleichung gilt, und wollen $T = [0, 1]$ zeigen.

Für $t = 1$ steht in der Ungleichung links wie rechts $f(\alpha)$; also ist $1 \in T$, analog $0 \in T$. Sodann überzeugt man sich, dass aus der Funktionalgleichung FGexp die Konvexitätsungleichung sehr schnell für $t = \frac{1}{2}$ folgt. Wendet man das gleiche Argument auf die Intervalle $[\alpha, x_{\frac{1}{2}}]$ und $[x_{\frac{1}{2}}, \beta]$ an, erhält man $\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \in T$. Schließt man analog weiter (Induktion

nach n) erhält man $T_n \subseteq T$ für alle Mengen $T_n = \left\{ t = \frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Aus der Stetigkeit von \exp_a sowie der beiden Funktionen $t \mapsto t\alpha + (1-t)\beta$ und $t \mapsto tf(\alpha) + (1-t)f(\beta)$ folgt, dass T auch den Abschluss $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n} = [0, 1]$ enthalten muss.

¹³Man stelle jede rationale Zahl als gekürzten Bruch $q = \pm \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) dar, ordne diese Brüche aufsteigend nach $|a| + |b| = 1, 2, 3, \dots$ und nummeriere sie entsprechend als q_0, q_1, q_2, \dots , z.B.: $q_0 = \frac{0}{1}, q_1 = \frac{1}{1}, q_2 = -\frac{1}{1}, q_3 = \frac{1}{2}, q_4 = -\frac{1}{2}, q_5 = \frac{2}{1}, q_6 = -\frac{2}{1}, \dots$ Die Abbildung $n \mapsto q_n$ ist dann die gesuchte Bijektion.

¹⁴Das populärste Argument bezieht sich auf die Darstellung reeller Zahlen als unendliche Dezimalbrüche. Näher an Cantors Originalarbeit ist jedoch das Argument, das ich in [5], Abschnitt 1.1 beschrieben habe.

¹⁵Für den Beweis zunächst eine Hilfsbehauptung: Ist J eine Indexmenge und zu jedem $j \in J$ ein Intervall I_j gegeben, welches mehr als einen Punkt enthält und derart, dass für $j_1 \neq j_2$ der Schnitt $I_{j_1} \cap I_{j_2} = \emptyset$ stets leer ist. Dann kann J höchstens abzählbar sein. Begründung: Jedes I_j enthält eine rationale Zahl $q_j \in \mathbb{Q} \cap I_j$, wobei alle $q_j, j \in J$, verschieden sein müssen. Es gibt aber nur abzählbar viele rationale Zahlen, also kann auch J nur abzählbar sein.

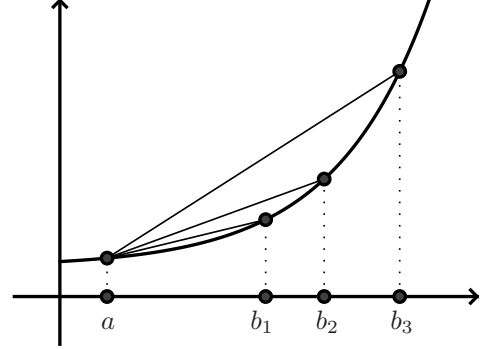
Sei nun $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Menge $A := \{f(x) : x < x_0\}$ nichtleer und nach oben beschränkt durch $f(x_0)$. Also (vgl. [5]) besitzt A ein Supremum $\sup A$, welches ich mit $f(x_0^-)$ bezeichne, weil offenbar $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ (Grenzwert von links) gilt. Analog ist $f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \inf B$ mit $B := \{f(x) : x > x_0\}$ definiert, und es gilt $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$. Gleichheit $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$ herrscht genau dann, wenn f in x_0 stetig ist, f dort also keine Sprungstelle hat. An einer Unstetigkeitsstelle x_0 betrachten wir das (mehr als einpunktige offene) Sprungintervall $I_{x_0} = (f(x_0^-), f(x_0^+))$. Bezeichne J die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f , so kann diese nach der Hilfsbehauptung höchstens abzählbar sein.

3.4 Differenzierbarkeitseigenschaften konvexer Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. In Hinblick auf Differenzierbarkeit betrachten wir nun die Differenzenquotienten

$$\Delta(f, a, b) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a \neq b \in \mathbb{R},$$

die Steigungen der Sehnen zwischen den Punkten $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$. Wie nicht nur der Anschauung zu entnehmen, sondern auch durch Rechnung leicht nachzuprüfen ist, wächst für konvexes f für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $\Delta(f, a, \cdot) : \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto \Delta(f, a, b)$ monoton in b . Zusammen mit der Stetigkeitsaussage für monotone Funktionen aus Abschnitt 3.3 lässt sich daraus folgender Satz¹⁶ ableiten:



Satz 2 Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so ist die Menge der Stellen, wo f nicht differenzierbar ist, höchstens abzählbar, die Menge der Differenzierbarkeitsstellen also überabzählbar.

3.5 Die Differenzierbarkeit von \exp_a

Aus der Konvexität von \exp_a folgt nach Satz 2, dass es wenigstens ein (sogar überabzählbar viele) $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, wo die Ableitung $\exp'_a(x_0)$ existiert. So wie wir im Beweis der zweiten Aussage von Satz 1 die Stetigkeit an einer Stelle vermittelt der Eigenschaft FGexp an eine beliebige andere Stelle verschieben konnten, zeigt man auch, dass sich die Differenzierbarkeit von \exp_a von einer auf alle Stellen $x \in \mathbb{R}$ überträgt und erhält die Beziehung $\exp'_a(x) = \exp'_a(0) \cdot \exp_a(x)$ als Nebenprodukt¹⁷. Also erfüllt \exp_a die Differentialgleichung $y' = c_a \cdot y$ mit der durch a bestimmten Konstanten $c_a := \exp'_a(0)$.

3.6 Die Sonderrolle der Zahl e

Ist es möglich, die Zahl a so zu wählen, dass $c_a = 1$ gilt? Erwartungsgemäß lautet die Antwort *ja*:

Satz 3 Es gibt genau eine reelle Zahl $e > 0$ (genannt auch Eulersche Zahl) mit der Eigenschaft, dass die Exponentialfunktion $\exp := \exp_e$ zur Basis e die Differentialgleichung $y' = y$ erfüllt.

Die Existenz einer solchen Zahl e lässt sich schon jetzt relativ leicht begründen¹⁸, die Eindeutigkeit ergibt sich aus Satz 5. Der numerischen Berechnung von e werden wir uns schließlich in Abschnitt 4.4 widmen.

¹⁶Zum Beweis: Für festes a ist die Menge $A := \{\Delta(f, a, b) : b > a\}$ nach unten beschränkt (etwa durch $\Delta(f, a, a-1)$), also existiert in beliebigem $a \in \mathbb{R}$ die rechtsseitige Ableitung $f'(a+0) := \lim_{b \rightarrow a+0} \Delta(f, a, b) = \inf A$, analog die linksseitige Ableitung $f'(a-0) := \lim_{b \rightarrow a-0} \Delta(f, a, b) = \sup B$ mit $B := \{\Delta(f, a, b) : b < a\}$. Die Funktionen $x \mapsto f_1(x) := f'(x-0)$ und $x \mapsto f_2(x) := f'(x+0)$ sind monoton wachsend, daher nach Abschnitt 3.3 die Mengen U_1 bzw. U_2 ihrer Unstetigkeitsstellen höchstens abzählbar.

Daraus ergeben sich für $a < b$ leicht die Ungleichungen $f'(a-0) \leq f'(a+0) \leq f'(b-0) \leq f'(b+0)$. Ist $x \in \mathbb{R} \setminus U$ mit der abzählbaren Menge $U := U_1 \cup U_2$, so sind links- und rechtsseitige Ableitung von f in x stetig. Dies bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle x' mit $|x - x'| < \delta$ die Beziehungen $|f'(x' - 0) - f'(x - 0)| < \varepsilon$ und $|f'(x' + 0) - f'(x + 0)| < \varepsilon$ gelten. Wählen wir x'_1, x'_2 mit $x - \delta < x'_1 < x < x'_2 < x + \delta$, so bedeutet das $f'(x+0) \leq f'(x'_2 - 0) \leq f'(x'_1 - 0) + 2\varepsilon \leq f'(x-0) + 2\varepsilon \leq f'(x+0) + 2\varepsilon \leq f'(x+0) + 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $f'(x-0) = f'(x+0) = f'(x)$. f ist also differenzierbar in x .

¹⁷Den Differenzenquotienten an der Stelle x schreibe man als $\frac{a^{x+\varepsilon} - a^x}{\varepsilon} = \frac{a^{(x-x_0)+(x_0+\varepsilon)} - a^{(x-x_0)+x_0}}{\varepsilon} = a^{x-x_0} \frac{a^{x_0+\varepsilon} - a^{x_0}}{\varepsilon}$. Wegen der Differenzierbarkeit von \exp_a an der Stelle x_0 existiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ der Grenzwert auf der rechten Seite, also auch der Differentialquotient links, und wir haben $\exp'_a(x) = a^{x-x_0} \cdot \exp'_a(x_0)$. Somit ist \exp_a auf ganz \mathbb{R} differenzierbar. Wir setzen speziell $x_0 = 0$ und erhalten $\exp'_a(x) = \exp'_a(0) \cdot \exp_a(x)$.

¹⁸Wir geben die reellen Zahlen $a > 0$ und λ vor und betrachten die Funktion $f(x) := \exp_a(\lambda x)$. Es ist unmittelbar einsichtig, dass diese Funktion die Voraussetzungen des zweiten Teiles von Satz 1 erfüllt. Also ist $f = \exp_e$, wenn man $e := f(1) = a^\lambda$ setzt. Anwendung von Kettenregel und der weiter oben abgeleiteten Formel für die Ableitung der Exponentialfunktion liefert $f'(x) = \lambda \exp'_a(\lambda x) = \lambda \exp'_a(0) \exp_a(\lambda x) = \lambda \exp'_a(0) f(x)$. Für die Wahl $\lambda := \frac{1}{\exp'_a(0)}$ erhält man also tatsächlich $f' = f$, also $c_e = 1$.

3.7 Bemerkungen zur Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$

Oft wird die Zahl e anders als hier eingeführt, nämlich noch vor der Differentialrechnung als Grenzwert $e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ der Folgenglieder $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$. Doch gebe ich zu bedenken:

Erstens erfordert der Nachweis der Konvergenz der a_n eine Rechnung, die Schüler nur in den seltensten Fällen überblicken. Ist, zweitens, e über die a_n definiert, so muss die Differentiationsregel $\exp' = \exp$ erst bewiesen werden. Dabei stößt man auf technische Probleme, z.B. beim Übergang von der diskreten Variablen n zum kontinuierlichen Definitionsbereich \mathbb{R} von \exp . Diese Probleme können im Prinzip zwar behoben werden. In der Schulpraxis wird der nötige Aufwand an technischer Feinarbeit aber fast immer vermieden (meines Erachtens zurecht), weshalb aber eine (zwar nicht schwerwiegende, jedoch unschöne) Beweislücke bleibt. Und drittens ist die Motivation über die relativ spezielle Folge der a_n zwar möglich (z.B. stetige Verzinsung), meines Erachtens aber viel weniger überzeugend, als über die Differentialgleichung $y' = y$.

Wartet man hingegen die Differentiationsregeln für \exp und den Logarithmus ab (siehe Abschnitt 4.1), so lässt sich die Beziehung $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ viel leichter herleiten¹⁹. Meine Empfehlung lautet daher: Es genügt vollauf, wenn die Zahl e (und mit ihr der *natürliche* Logarithmus \ln etc.) erst dann eingeführt wird, wenn die Differentialrechnung bereits zur Verfügung steht. Die Vertagung oder gar Nichtbehandlung der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ ist leicht zu verkräften.

4 Weitere Anknüpfungspunkte

4.1 Logarithmus und Potenzen als Ableger von \exp

Der Logarithmus $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ zur Basis a ist als Umkehrfunktion von $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiert, wobei der Spezialfall $\ln := \log_e$ als *natürlicher Logarithmus* hervorzuheben ist. Aus $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a) \cdot x}$ liest man $\exp_a = \exp \circ m_{\ln(a)}$ mit $m_c : x \mapsto c \cdot x$ ab, aus $e^{\ln(x)} = x = a^{\log_a(x)} = (e^{\ln(a)})^{\log_a(x)} = e^{\ln(a) \cdot \log_a(x)}$ die Formel $\log_a = \frac{\ln}{\ln(a)}$, und aus $x^\alpha = (e^{\ln(x)})^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$ die Beziehung $p_\alpha = \exp \circ m_\alpha \circ \ln$. Geht man von \exp aus und verwendet lediglich die Operationen Umkehrfunktion, Multiplikation mit reellen Zahlen und Abbildungskomposition, so lassen sich also ausgehend von $\exp = \exp_e$ sämtliche Exponentialfunktionen \exp_a , Logarithmen \log_a und Potenzfunktionen p_α definieren.

In Hinblick auf die Ableitung des Logarithmus sei an den geometrisch leicht motivierbaren und auch rechnerisch leicht zu überprüfenden Satz über Umkehrfunktionen²⁰ erinnert:

Satz 4 *Besitze die reelle Funktion f eine stetige Ableitung mit $f'(x) \neq 0$, so gibt es Umgebungen U von x und V von $y := f(x)$, wo $f : U \rightarrow V$ bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion $g = f^{-1}$. Es gilt $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.*

Angewendet auf $f = \exp$ und $y = f(x)$ haben wir $x = \ln(y)$ und somit die bekannte Ableitungsregel $\ln'(y) = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}$. Somit folgen mittels Kettenregel und unter Beachtung von $m'_c = c$ die Differenzierbarkeit sämtlicher \exp_a, \log_a und p_α sowie die Ableitungsregeln $\exp'_a(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x)$, $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$ und $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ (für $x > 0$ und für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, nicht nur für ganzzahliges oder rationales!).

4.2 \exp_a und \log_a als strukturerhaltende Abbildungen

Die Eigenschaft FGexp $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für $f = \exp_a$ übersetzt sich sofort in die fundamentale Eigenschaft des Logarithmus, FGlog: $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$. Das lässt sich wiederum nutzen für $x^\alpha \cdot y^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(x)} \cdot e^{\alpha \cdot \ln(y)} = e^{\alpha(\ln(x) + \ln(y))} = e^{\alpha \ln(x \cdot y)} = (x \cdot y)^\alpha$, woraus sich die Funktionalgleichung FGpot*: $p_\alpha(x \cdot y) = p_\alpha(x) \cdot p_\alpha(y)$ ergibt, nun für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$. Der Vollständigkeit halber sei auch noch für $m_c : x \mapsto c \cdot x$ FGlin: $m_c(x+y) = m_c(x) + m_c(y)$ (Distributivgesetz) notiert.

Verwenden wir die Symbole \circ_1, \circ_2 für jeweils eine der Operationen $+$ und \cdot und A_1, A_2 für die Trägermengen \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^+ , so haben alle obigen Funktionalgleichungen die Gestalt der sogenannten Homomorphiebedingung

$$f(x \circ_1 y) = f(x) \circ_2 f(y)$$

¹⁹Aus $1 = \ln' 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ folgt $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp(1) = e$.

²⁰Die höherdimensionale Verallgemeinerung auf $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist deutlich anspruchsvoller.

für $f : A_1 \rightarrow A_2$, und zwar mit den vier Spezifizierungen:

$$\begin{array}{llll} \text{FGexp:} & f = \exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, & \circ_1 = +, & \circ_2 = \cdot \\ \text{FGlog:} & f = \log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, & \circ_1 = \cdot, & \circ_2 = + \\ \text{FGpot*}: & f = p_\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, & \circ_1 = \cdot, & \circ_2 = \cdot \\ \text{FGLin:} & f = m_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \circ_1 = +, & \circ_2 = + \end{array}$$

Zusammen mit der Bijektivität und Stetigkeit dieser vier Typen von Funktionen bedeuten die Homomorphiebedingungen, dass wir es jeweils mit Isomorphismen zu tun haben, sowohl im Sinn der Algebra als auch der Topologie. Auf \exp bezogen bedeutet dies insbesondere, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und (\mathbb{R}^+, \cdot) isomorph sind, wobei jedes \exp_a , $a \in \mathbb{R}$, einen Isomorphismus darstellt. (Die mittlerweile altertümlich anmutenden Rechenschieber machten genau davon Gebrauch.) Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1 sind das auch schon alle Isomorphismen, die an wenigstens einem Punkt stetig sind. Leicht folgt daraus die entsprechende Erweiterung von Satz 1 auf die anderen drei Funktionstypen: Die Funktionen \log_a , p_α , m_c sind die einzigen Funktionen, welche FGlog, FGpot* bzw. FGLin erfüllen und an wenigstens einem Punkt stetig sind²¹.

Folgendes wichtige Prinzip wird an diesem Ergebnis deutlich: Sind zwei Strukturen isomorph (also strukturgleich), so lassen sich Einsichten von der einen sehr direkt auf die andere übertragen. Ein harmlos anmutender Satz etwa über lineare Funktionen, aber ein großer Zuwachs an Erkenntnismöglichkeiten! Die hier angedeuteten Zusammenhänge können als allererster Einblick in das gelten, was man heutzutage unter strukturtheoretischer Algebra (bzw. Topologie) versteht – durchaus im Kontrast zu einem elementaren Verständnis von Algebra, das geprägt ist von oft recht schematischem Hantieren mit algebraischen Termen nach ein paar formalen Rechenregeln.

4.3 Die Gleichung $y' = y$ als Keimzelle für ein neuzeitliches Weltbild

Nicht nur in Hinblick auf die Funktionalgleichung FGexp (plus Stetigkeit, vgl. Satz 1, Aussage 2), sondern auch im Sinne der Differentialrechnung erfüllt \exp einen Eindeutigkeitsatz:

Satz 5 *Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = f$ und $f(0) = 1$, so folgt $f = \exp = \exp_e$. Gilt allgemeiner $f' = c \cdot f$ mit irgendeinem $c \in \mathbb{R}$ und $f(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, so folgt $f = y_0 \cdot \exp_a$ mit $a = e^c$.*

Man kann diesen Satz elementar beweisen²², was allerdings den Anschein erwecken könnte, dass die speziellen Rechenregeln für \exp entscheidend wären. Dies ist aber nicht der Fall. Es gelten weitreichende (Existenz- und) Eindeutigkeitsätze für Differentialgleichungen. Übersetzt in physikalische Anwendungen, wo Ableitungen z.B. Geschwindigkeiten, Beschleunigungen etc. bedeuten, besagen solche Sätze sehr häufig: Kennen wir den Zustand eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt (in der klassischen Mechanik sind damit meist Ort und Geschwindigkeit von gegebenen Massen gemeint), so bestimmen die (Bewegungs-) Gesetze der (z.B. Newtonschen) Physik das Verhalten des Systems bis in alle Ewigkeit. Viele Forscher des 18. und 19. Jahrhunderts, allen voran Pierre-Simon Laplace (1749-1827) mit seinem legendären *Dämon*, vertraten deshalb einen strengen Determinismus: Das weitere Schicksal der Welt sei durch die Naturgesetze vorherbestimmt. Dass wir es nicht kennen, liege lediglich an unserer Unwissenheit betreffend die unüberschaubar komplizierten Anfangsbedingungen, welche aus Ort, Bewegung und Masse aller Materiepartikel dieser Welt bestehen. Ein Laplacescher Dämon hingegen, der alle Anfangsbedingungen überblickte und über hinreichende Rechenfähigkeiten verfügte, könnte die Zukunft exakt vorausberechnen. Die moderne Quantenphysik zeigt jedoch, dass es mit Newtonscher, Maxwellscher und selbst Einsteinscher Physik nicht getan ist. Im atomaren und

²¹Exemplarisch sei der Beweis lediglich für FGLin durchgeführt: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt x_0 stetig, und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sei $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Dann ist auch $g := \exp \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ stetig in x_0 und erfüllt $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$, nach Satz 1 ist also $g = \exp_a$ mit einem geeigneten a . Daraus folgt $f = \ln \circ \exp_a$, also $f(x) = \ln(a^x) = \ln(e^{\ln(a)x}) = m_{\ln(a)}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f = m_{\ln(a)}$.

Bemerkung: Mit mengentheoretischen Mitteln, die allerdings den Rahmen sprengen würden, lässt sich zeigen, dass die Aussagen falsch werden, wenn man auf die Stetigkeit in wenigstens einem Punkt verzichtet.

²²Angenommen zwei Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllen $f_1' = f_1$, $f_2' = f_2$ und $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Dann folgt für den Quotienten $g = \frac{f_1}{f_2}$ nach der Quotientenregel $g' = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2} = 0$, also ist g eine konstante Funktion. (Hier, wie generell bei der Ermittlung von Stammfunktionen, fließt übrigens ganz entscheidend der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein.) Sei etwa $g = c$, d.h. $f_1(x) = c \cdot f_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f_1(0) = c \cdot f_2(0) = c$, also $c = 1$ und $f_1 = f_2$. Der allgemeinere Fall kann auf den bereits behandelten zurückgeführt werden, indem man $\frac{f(\frac{x}{y_0})}{y_0}$ statt $f(x)$ betrachtet.

subatomaren Bereich spielt nämlich auch der blanke Zufall eine wesentliche und unvermeidbare Rolle. Deshalb ist ein strenger Determinismus, wie ihn Laplace vertrat, heutzutage nicht mehr haltbar.

Ungeachtet dessen stehen die hier angedeuteten mathematisch-naturwissenschaftlichen Einsichten sowohl ideell als auch personell in enger Verbindung mit jenem universellen geistigen Aufbruch, den wir heute mit dem Schlagwort *Aufklärung* verbinden. Man würdige zum Beispiel den Fortschritt von Keplers rein deskriptiven Gesetzen über die Planetenbewegungen hin zur Newtonschen Physik. Newton fand, nicht zuletzt indem er (parallel zu Leibniz) die Infinitesimalrechnung entwickelte, sehr einfache physikalische Gesetze wie die Gravitation, die sich als tief liegende Erklärungen für zunächst nur empirisch festgestellte komplexe Phänomene entpuppten. Dieser Vorgang kann als Musterbeispiel von Erkenntnisfortschritt angesehen werden – nicht nur in den Wissenschaften, sondern in vielen Lebensbereichen.

4.4 Polynomiale Approximation, Taylorreihe und Numerik

Wir haben die Zahl e charakterisiert über die Forderung $\exp'_e = \exp_e$. Über die Größe dieser Zahl wissen wir damit aber noch nicht viel. Immerhin folgt aus Monotoniegründen $e = \exp(1) \geq \exp(0) = 1$. Ein besseres Ergebnis dürfen wir erhoffen, wenn wir von \exp nicht nur den Funktionswert an der Stelle $x = 0$ verwenden, sondern auch die Ableitung $\exp'(0) = \exp(0) = 1$. Als differenzierbare Funktion verhält sich \exp in der Nähe von $x = 0$ nämlich ähnlich seiner Tangente, der linearen Funktion $f_1(x) = 1 + x$. Ein Unterschied zwischen \exp und f_1 besteht allerdings darin, dass auch die Ableitung $\exp' = \exp$ wächst, während $f'_1 = 1$ konstant ist. Daher²³ muss für positive x die Ungleichung $\exp(x) \geq f_1(x) = 1 + x$ gelten, insbesondere $e = \exp(1) \geq f_1(1) = 2$. Im nächsten Schritt verwenden wir eine geeignete quadratische Funktion f_2 , die an der Stelle $x = 0$ mit \exp auch hinsichtlich der zweiten Ableitung $\exp''(0) = \exp(0) = 1$ übereinstimmt. Dazu müssen wir $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ verwenden und erhalten durch eine analoge Überlegung wie vorher $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, speziell $e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$. Klarerweise lässt sich dieser Prozess fortsetzen, indem wir für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ jenes Polynom betrachten, welches bei $x = 0$ bis zur n -ten Ableitung mit \exp übereinstimmt, wo also $f_n^{(k)}(0) = \exp^{(k)}(0) = 1$ für $k = 0, 1, \dots, n$ ist. Es handelt sich dabei um das (Taylor-) Polynom $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ gilt $\exp(x) \geq f_n(x)$. Weil für festes positives x die $f_n(x)$ monoton wachsen mit gemeinsamer oberer Schranke $\exp(x)$, existiert ihr Grenzwert, die Exponentialreihe (= Taylorreihe f der Exponentialfunktion), die tatsächlich für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

erfüllt. Ein instruktiver Beweis (der ohne Satz von Taylor auskommt) stützt sich ganz wesentlich auf die Eindeutigkeitsaussagen von Satz 1. Obwohl er einige substantielle Überlegungen erfordert, lässt sich der Aufwand durchaus rechtfertigen²⁴. Z.B. spielt in der erforderlichen Rechnung der binomische

²³Hier fließt, wie schon in Satz 5, der Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein.

²⁴Beweisskizze: Zunächst stellen wir fest, dass die Reihe für negative x erst recht konvergiert, weil die Reihe alternierend wird (Leibnizreihe). Die reelle Funktion f ist also auf ganz \mathbb{R} definiert. Mit Hilfe von Satz 1 genügt es zu zeigen, dass erstens $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt und zweitens f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f'(0) = 1$ (denn daraus folgt auch die Stetigkeit bei $x_0 = 0$):

Der Hintergrund der ersten Behauptung sind einige allgemeine Tatsachen: Potenzreihen konvergieren absolut auf dem Inneren ihres Konvergenzbereiches. Für absolut konvergente Reihen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ lässt sich das Produkt als sogenanntes Cauchyprodukt berechnen. Dieses kommt zustande, indem man, so wie man es bei endlichen Summen gewohnt ist, alle möglichen Produkte $a_i b_j$ bildet und zunächst für jedes n die jeweils endlich vielen Glieder mit $i+j = n$ zu Summen $s_n = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$ zusammenfasst. Die sich daraus ergebende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ erweist sich selbst als absolut konvergent (ein etwas technisches aber allgemeingültiges Faktum, das eine durchaus überzeugende geometrische Veranschaulichung besitzt) gegen das Produkt $A \cdot B$. In unserem Fall interessieren $f(x) = A$, also $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $f(y) = B$, also $b_n = \frac{y^n}{n!}$ und $f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$. Zu zeigen ist daher $\frac{(x+y)^n}{n!} = s_n$. Tatsächlich berechnet man mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{n-i}}{(n-i)!} = \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = s_n.$$

Der Differenzenquotient $q(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ von f an der Stelle $x_0 = 0$ hat die Form $q(x) = 1 + xg(x)$ mit der um x_0 beschränkten Funktion $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$, also $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} q(x) = 1$.

Lehrsatz eine wesentliche Rolle. Es kann somit an dieser Stelle auch eine Verbindung zur Kombinatorik hergestellt werden.

Mit Hilfe der Exponentialreihe lässt sich die Exponentialfunktion auch auf numerisch effektive Art berechnen. Das liegt daran, dass in den zu summierenden Gliedern $\frac{x^n}{n!}$ der Nenner $n!$ ab (je nach x) hinreichend großem n viel schneller wächst als der Zähler. Will man beispielsweise $e = \exp(1)$ auf fünf Dezimalstellen genau berechnen, genügen die ersten 10 Summanden, und man erhält $e \approx 2,71828$ als Näherung²⁵. Die Exponentialreihe kann also auch als wunderschönes Beispiel für numerische Berechnungen dienen.

Aus der Reihendarstellung für \exp lässt sich auch ablesen, dass $\exp(x)$ mit $x \rightarrow \infty$ rascher wächst als jede Potenz $p_n(x) = x^n$, denn für $x \geq 0$ haben wir $\exp(x) \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = x^n \frac{x}{(n+1)!}$, also $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{x} = 0$.

4.5 Das Gleiche nochmals mit Sinus und Cosinus

Unsere Vorgangsweise im vorangegangenen Abschnitt lässt sich verallgemeinern, indem wir statt \exp von einer beliebigen Funktion f ausgehen, die unendlich oft differenzierbar ist. Sei p_n jenes Polynom n -ten Grades mit $p_n^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, \dots, n$, so zeigt sich, dass $p_{n+1}(x) = p_n(x) + a_{n+1}x^{n+1}$ mit $a_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$. Man nennt die so auftretende unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

die *Taylorreihe* von f (an der Stelle $x_0 = 0$). In vielen Fällen stellt diese Reihe (so wie bei $f = \exp$) die Funktion f dar²⁶. Setzt man als gegeben voraus, dass es sich auch bei $f = \sin$ und $f = \cos$ so verhält²⁷, so erhält man unter Verwendung der Ableitungsregeln $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ ziemlich schnell die Reihendarstellungen

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

4.6 Die komplexe Exponentialfunktion – Polarkoordinaten

Wir haben nun alle Mittel in der Hand für die Deutung von \exp auch als komplexe Funktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Denn in den Reihendarstellungen von \exp , \cos und \sin lässt sich x auch als komplexe Zahl $z = a + ib$ mit Realteil a und Imaginärteil b deuten. Auch übertragen sich wesentliche Eigenschaften von \exp auf ganz \mathbb{C} . Somit führt eine einfache, hier nicht ausgeführte Rechnung zur grundlegenden Beziehung $e^z = e^{a+ib} = e^a \cdot (\cos(b) + i \sin(b))$ sowie zu den Darstellungen der komplexen trigonometrischen Funktionen als $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ mit Hilfe der Exponentialfunktion²⁸.

Für eine beliebige komplexe Zahl $z = a + ib$ heißt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ bekanntlich der *Betrag*. Man überzeugt sich davon, dass es für $z \neq 0$ genau einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$, das sogenannte *Argument* von

²⁵Speziell für $x = 1$ wollen wir den Fehler $F_N = e - e_N = e - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ abschätzen, den man macht, wenn man e durch die N -te Partialsumme $e_N = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!}$ der Reihe ersetzt. Für $n = N + 1 + k$ gilt $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{(N+1)!(N+2)^k}$. Die Formel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ liefert mit $q = \frac{1}{N+2}$ somit nach kurzer Rechnung $F_N \leq \frac{N+2}{(N+1)!(N+1)}$. Für die Werte $N = 0, 1, 2, 3, 4$ liefert das: $e_0 = 1, F_0 \leq 2; e_1 = 2, F_1 \leq \frac{3}{4} = 0,75; e_2 = \frac{5}{2} = 2,5, F_2 \leq \frac{2}{9} = 0,22 \dots; e_3 = \frac{8}{3} = 2,66 \dots, F_3 \leq \frac{5}{96} = 0,052 \dots; e_4 = \frac{65}{24} = 2,70833 \dots, F_4 \leq \frac{1}{100} = 0,01$. Zum Beispiel kann man wegen $9! = 362880$ bereits $F_9 \leq 10^{-5}$ garantieren.

²⁶Die Konstruktion von Beispielen, wo dies nicht der Fall ist, erfordert einigen Scharfsinn. Das klassische Beispiel ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$.

²⁷Eine strenge Rechtfertigung wäre mit Hilfe des Satzes von Taylor möglich. Für intellektuell avancierte Schüler lohnt hier die Bemerkung, dass in einer rigorosen, nicht auf die Anschauung Bezug nehmenden Entwicklung der Analysis obige Reihendarstellungen als *Definition* der Winkelfunktionen verwendet werden müssen. Auch \exp wird oft (z.B. in [2]) als Reihe definiert. Umso bemerkenswerter ist es, dass für \exp auch der hier gewählte, in Kapitel 2 ausführlich beschriebene und sich an der Schulmathematik orientierende Zugang höchster mathematischer Strenge genügt.

²⁸Ebenfalls auf \exp rückführbar sind daher $\tan := \frac{\sin}{\cos}$ und $\cot := \frac{\cos}{\sin}$ sowie die Arcusfunktionen (reelle Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen auf geeigneten Bereichen) \arccos etc., die hyperbolischen Funktionen $\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ etc. und deren (lokale) Umkehrfunktionen, die Areefunktionen Arcosh etc.

z gibt, der $z = r \cdot e^{i\varphi}$ erfüllt. Man schreibt auch $z = [r, \varphi]$ und spricht von den *Polarkoordinaten* oder von der *trigonometrischen Darstellung* der komplexen Zahl z . Identifiziert man, der geometrischen Interpretation entsprechend, Winkel, die sich nur um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, erhält man jetzt

$$[r_1, \varphi_1] \cdot [r_2, \varphi_2] = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = [r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2].$$

Also: Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Argumente modulo 2π addiert. Dies führt zur Deutung der Multiplikation mit einer komplexen Zahl als Drehstreckung.

Am Rande sei noch der Spezialfall der komplexen Zahl $z = [1, \pi] = e^{i\pi} = (\cos \pi + i \sin \pi) = -1$ erwähnt, der zur Beziehung $e^{i\pi} + 1 = 0$ führt. Manche bezeichnen sie als die schönste Gleichung der Mathematik. Denn in ihr werden die fünf wichtigsten mathematischen Konstanten $0, 1, \pi, e, i$ durch die drei wichtigsten mathematischen Operationen Addition, Multiplikation und Exponentiation so verknüpft, dass die wichtigste mathematische Relation, nämlich die Gleichheit gilt.

4.7 Eine Brücke zur Integralrechnung

Auch wenn es im Schulunterricht nicht üblich ist, gäbe es durchaus gute Gründe (vgl. [7]), die Infinitesimalrechnung zunächst über das Integral (die Flächenberechnung) aufzuziehen und nicht über die Differentialrechnung. In diesem Fall stößt man sehr schnell auf die Aufgabe, die Integrale $I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ für $x \in \mathbb{R}^+$ zu berechnen. Es empfiehlt sich, I als (stetige) Funktion $x \mapsto I(x)$ aufzufassen und nachzurechnen, dass I wie der Logarithmus (siehe FGlog) die Multiplikation in die Addition überführt²⁹. Wie wir aus Abschnitt 4.2 wissen, muss also $I = \log_a$ sein für ein geeignetes $a > 0$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lesen wir $\log'_a = I'(1) = \frac{1}{1} = 1$ ab, woraus $a = e$ folgt. Man könnte die Zahl e und die Funktion \exp also auch über die Integralrechnung und $I(x)$ definieren.

4.8 Sogar Stochastik

Abschließend sei noch daran erinnert, dass die Normalverteilung – fraglos eine der wichtigsten, wenn nicht die wichtigste Wahrscheinlichkeitsverteilung überhaupt – die Dichtefunktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ besitzt. Auch in Bereichen, wo der Zusammenhang auf den ersten Blick alles andere als klar ist, tritt uns also wieder die Exponentialfunktion entgegen, noch dazu in Verbindung mit der Kreiszahl π .

Literatur

- [1] Peter M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Springer Berlin Heidelberg New York (2007).
- [2] Walter Rudin, *Reelle und Komplexe Analysis* (deutsche Übersetzung des englischsprachigen Originals), Oldenbourg Wissenschaftsverlag (2009, 2.Auflage).
- [3] Reinhard Winkler, *Wie macht man 2 aus 1? Das Paradoxon von Banach-Tarski*, DHÖMG³⁰ 33 (2001), 166-196.
- [4] Reinhard Winkler, *Wir zählen bis drei – und sogar darüber hinaus*, DHÖMG³⁰ 40 (2008), 129-141.
- [5] Reinhard Winkler, *Die reellen Zahlen sind anders*, DHÖMG³⁰ 41 (2009), 140-153.
- [6] Reinhard Winkler, *Logischer und mengentheoretischer Formalismus – Ärgernis und sonst nichts?* DHÖMG³⁰ 42 (2010), 102-117.
- [7] Reinhard Winkler, *Das Maß aller Dinge aus mathematischer Sicht – zu den Grundlagen der Integralrechnung*, DHÖMG³⁰ 43 (2011), 146-160.

²⁹ $I(xy) = I(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = I(x) + \int_1^y \frac{x du}{xu} = I(x) + I(y)$. In dieser Rechnung wurde die Substitutionsregel verwendet, welche für den hier vorliegenden linearen Fall $t = xu$ und $dt = x du$ leicht direkt aus der Definition des Riemann-Integrals, d.h. ohne Differentialrechnung abgelesen werden kann.

³⁰ Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen), siehe auch <http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html>.