Von Nutzen, Wert und Wesen mathematischer Bildung

Reinhard Winkler

1. Einleitung

Bemisst sich der *Wert* von (mathematischer) Bildung allein an ihrem praktischen und ökonomischen *Nutzen*? Natürlich nicht! Selbst Wissen kann nicht allein das Ziel sein. (Wer nur mit Wissen angefüllt ist, ist nicht als *gebildet* zu bezeichnen, sondern eher als *gefüllt*.) Doch worin besteht der umfassendere Wert mathematischer Bildung? Er ist nicht zu ermessen ohne Einblick in das vielfältig verflochtene Netz der Ideen und den Facettenreichtum der Mathematik. Die praktische Nützlichkeit im Alltag, die fundamentale Rolle in vielen anderen Wissenschaften, der überragende Wert als Schulung im klaren Denken, die zentrale Bedeutung für die moderne Erkenntnistheorie und damit Philosophie, die faszinierenden Analogien zur Kunst und zur Welt des Ästhetischen, also der kulturelle Wert im engeren Sinne – zum Verständnis all dieser Aspekte ist eine Beschäftigung auch mit dem *Wesen* der Mathematik unerlässlich. Vor allem ist die Mathematik voller Schönheiten. Hinter fast jedem mathematischen Eck lauert eine darauf, dass sie ins Licht gestellt werde.

Leider wird auf den unterschiedlichsten Ebenen unseres Bildungssystems manchmal der absurde Eindruck erweckt, das Wesen der Mathematik bestehe allein in Rechnungen nach sehr engen, vorgegebenen Benimmdichregeln, die nur ermüden und für sich alleine kaum Bildungswert haben. So ein Verständnis bedeutet aber nicht nur eine Beschneidung der Mathematik, sondern geradezu eine Umkehrung der Werte. Denn in der Mathematik herrschen Freiheit, Vielfalt und Phantasie. In diesem Artikel versuche ich, anhand einiger Beispiele zu zeigen, wie viel Interessantes die Mathematik zu bieten hat, selbst wenn man Rechnungen äußerst sparsam einsetzt.

In den fünf mathematischen Hauptabschnitten des Artikels habe ich folgende Aspekte in den Vordergrund gerückt: den praktischen (Abschnitt 2), die Rolle der Mathematik für unser Naturverständnis (Abschnitt 3), die Mathematik in ihrem inneren begrifflichen Kern (Abschnitt 4), Mathematik und Philosophie (Abschnitt 5) und Analogien zur Kunst (Abschnitt 6). Ein abschließendes Resümee (Abschnitt 7) fasst einige Erkenntnisse zusammen und spricht mögliche Konsequenzen für das Bildungssystem an. Die Literaturzitate am Schluss bringen einen Klassiker zum Thema Mathematik generell ([2]) sowie drei weitere Titel, auf die ich an speziellen Stellen im Text verweise. Wer an mehr interessiert ist, kann sich in Bibliotheken und im Fachbuchhandel von der Vielfalt des Angebots überzeugen und wird dort möglicherweise individuell Geeigneteres finden.

2. Ein Beispiel aus dem Alltag als Ausgangspunkt – Mathematik von praktischem Nutzen

Die Aufgabenstellung: *Angenommen, der Wert eines Sparguthabens von ursprünglich 4 € steigt bei einer gewissen Verzinsung und nach einer gewissen Laufzeit auf 5 €. Auf welchen Wert steigt (bei gleicher Verzinsung und nach gleicher Laufzeit) ein anfängliches Guthaben von 8 €?*

Dass die richtige Antwort auf diese Frage 10 € lautet, dürfte schon den meisten Volksschulkindern einleuchten. Ich wähle zum Einstieg dennoch diese sehr einfache Frage, weil ich selbst erlebt habe, wie der offensichtlichen und korrekten Lösung genau dieser Aufgabe (bestenfalls mit etwas anderen Zahlenwerten) von universitär gebildetem und sonst durchaus kompetent wirkendem Beratungspersonal in einer Bank nicht getraut wurde und zur Sicherheit lieber Tabellen zur Hilfe herangezogen wurden. Was ist da im Mathematikunterricht falsch gelaufen? Dazu eine kurze Analyse des mathematischen Problems.

Die Aufgabe ist so formuliert, dass die Ausgangsgröße (Sparguthaben am Ende der Laufzeit) von nur einer Eingangsgröße (Guthaben zu Beginn) abhängt, und zwar auf einfache lineare Weise, weil Zinssatz und Laufzeit fix sind. Eigentlich besteht die Aufgabe also weniger in der elementaren Rechnung, als darin zu erkennen, dass der funktionale Zusammenhang ein linearer ist: Doppelte Einlage, doppelter Ertrag. In der tagtäglichen Wirklichkeit des Bankwesens sind aber Zinssätze und Laufzeiten oft variable Größen, deren Einfluss auf den Ertrag durch etwas kompliziertere Gesetzmäßigkeiten beschrieben wird. Um solche präzise festzuhalten, kommen wir kaum umhin, zur mathematischen Formelsprache zu greifen. Bezeichnen wir das Anfangskapital mit K_0, die Verzinsung in Prozenten pro Jahr mit p, die Laufzeit in Jahren mit t und das Guthaben nach t Jahren mit K_t, so wird der Zusammenhang dieser Größen durch die konzise Formel

$$K_t = K_0 \left(1+\frac{p}{100}\right)^t$$

beschrieben. (Um den praktischen Wert der Formelsprache zu würdigen, versuche man zum Vergleich, denselben Zusammenhang ohne mathematische Symbolik in Worten auszudrücken!)

Die Formel erlaubt zumindest drei Lesarten. Erstens die der ursprünglichen Aufgabe entsprechende Lesart, wo p und t konstante Größen sind. Das Resultat K_t ergibt sich **linear**, also durch schlichte Multiplikation des Anfangskapitals K_0 mit der konstanten Zahl

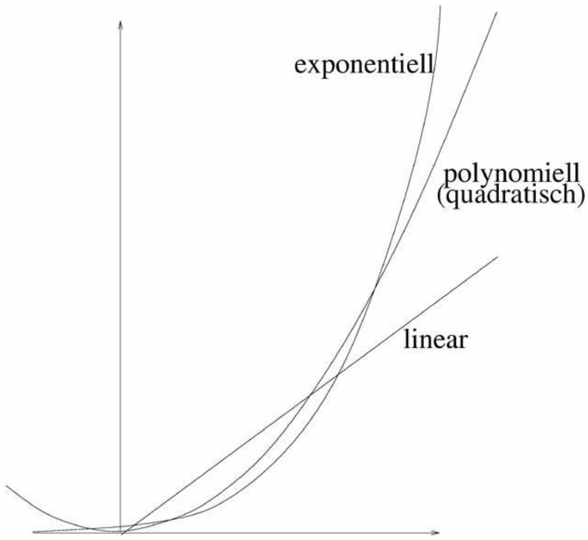
$$c = \left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Zweitens jene Lesart, die festem Anfangskapital K_0 und fester Laufzeit t aber variabler Verzinsung p entspricht: Dann hängt K_t von der Verzinsung p **polynomiell** ab, z.B. bei zweijähriger Laufzeit quadratisch. Und drittens, bei festem Startkapital K_0 und fester Verzinsung p, hängt das Guthaben K_t von der Laufzeit t **exponentiell** ab.

Oft werden im Mathematikunterricht Fehler von der Art begangen, dass z.B. das Kapitel zum Thema *Exponentialfunktion* ausschließlich mit Beispielen einiger ganz weniger Typen gefüllt wird, wo überall dieselben automatisierbaren Formelmanipulationen vorkommen, die sich speziell auf Exponentialfunktionen beziehen. Gleichzeitig wird aber nicht auf die Fähigkeit Wert gelegt, funktionale Zusammenhänge, denen Exponentialfunktionen zugrunde liegen, qualitativ von anderen wie linearen oder polynomiellen zu unterscheiden. Will Mathematikunterricht auch nützlich sein, muss er wenigstens beibringen, welche der trainierten Methoden wann angebracht sind. Was hilft das kleine Ein-mal-Eins, wenn nicht einmal erkannt wird, wann die Multiplikation die angemessene Operation ist?

In dem nachfolgenden Diagramm mit dem typischen Verlauf linearer, polynomieller (quadratischer) und exponentieller Funktionen fällt auf, dass die lineare Funktion zwar anfangs schneller ansteigt als die anderen beiden Kurven, schließlich aber von der polynomiellen (quadratischen) und der exponentiellen Funktion überholt wird. Das gilt nicht nur in dieser Skizze, sondern generell, ebenso wie jede exponentiell wachsende Funktion jede vorgegebene polynomielle schließlich übersteigt. Dieses Verhalten lässt sich aus gewissen qualitativen Eigenschaften der Kurven ableiten, deren

Verständnis hinreicht, um nachhaltig vor Verwechslung der Typen gefeit zu sein. (Ein strenger Beweis führt übrigens zu interessanten Grundlagenfragen.)



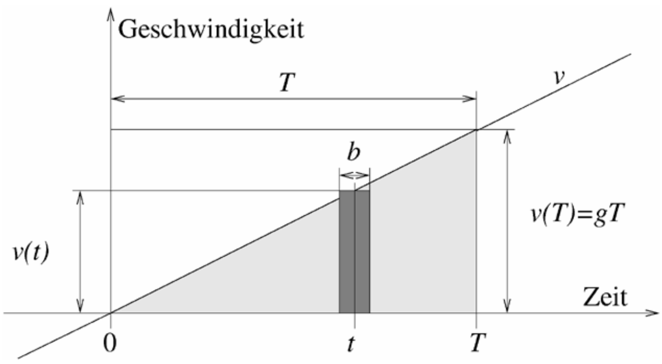
Lineare Funktionen zeichnen sich durch konstantes (additives) Wachstum aus, genauer: Der additive Zuwachs pro Zeiteinheit bleibt konstant. Hat dieser Zuwachs der linearen Funktion f den Wert c, so entspricht das der Formel $f(x) = cx$. (Auf inhomogene lineare Zusammenhänge $f(x) = cx + d$ will ich hier nicht eingehen.) Ein Beispiel aus der Physik: Bezeichnet t die (variable) verstrichene Zeit und v die als konstant angenommene Geschwindigkeit, so gilt für den zurückgelegten Weg $s = vt$; doppelte Zeitspanne – doppelte Strecke (aber auch doppelte Geschwindigkeit – doppelte Strecke).

Exponentielles Wachstum liegt typischerweise dann vor, wenn nicht die absoluten Zuwächse (Differenz nach einer Zeiteinheit) konstant sind, sondern die relativen (prozentuellen). In unserem Beispiel ist das der Fall, wenn wir die Entwicklung des Guthabens bei konstanter Verzinsung in Abhängigkeit von der Laufzeit betrachten. Am prägnantesten lässt sich die Situation mit Hilfe der mathematischen Formel (Differentialgleichung) $y' = cy$ ausdrücken. y' steht – grob gesprochen, wir werden das in Abschnitt 4 noch genauer behandeln – für das lokale Wachstum der Größe y;

c denken wir uns wieder konstant. Verbal: Doppelter Bestand – doppelter Zuwachs (für $c > 0$) bzw. doppelte Abnahme (für $c < 0$). Weitere Beispiele: Wachstum von Populationen für $c > 0$ bzw., für $c < 0$, radioaktiver Zerfall oder Abnahme des Luftdrucks mit zunehmender Höhe.

Über beide Funktionstypen (linear und exponentiell) behalten wir in Erinnerung, dass sie etwas mit der Systemänderung $y'(t)$ zu tun haben: Im linearen Fall ist $y'(t)$ konstant für alle t, im exponentiellen ändert sich $y'(t)$ proportional zu $y(t)$.

Auch **polynomielle** Zusammenhänge lassen sich über die Art der Systemänderung verstehen. Als einfachstes interessantes Beispiel wähle ich eine quadratische Funktion (wie in obiger Abbildung; entspricht $t = 2$ in der Formel für die Verzinsung), welche sich zum Beispiel über die Fallversuche von Galileo Galilei (1564-1642) erschließen lässt. Er beobachtete, dass ein Körper im freien Fall bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes (welche bei kleinen Geschwindigkeiten und relativ massiven Körpern zulässig ist) einer konstanten Beschleunigung g (Erdbeschleunigung) unterliegt. Beschleunigung bedeutet Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit, also hängt die Geschwindigkeit v linear von der verstrichenen Zeit ab, d.h. $v(t) = gt$. Was ergibt sich daraus für die Fallhöhe $s = s(t)$ in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit t, gemessen ab dem Loslassen des ruhenden Körpers? Am besten lässt sich die Situation durch die folgende Abbildung illustrieren.



Die ansteigende Gerade v steht für die mit der Zeit ansteigende Geschwindigkeit. Zu einem Zeitpunkt $t < T$ kommt pro Sekundenbruchteil b eine Wegstrecke hinzu, welche nach der Formel *Weg = Geschwindigkeit mal Zeit* den Wert *v(t)b* hat, der sich wiederum geometrisch als dunkle Rechtecksfläche deuten lässt. Wählt man *b* sehr klein, so stimmen dunkle Fläche und durch sie überdeckte graue Fläche beliebig gut überein. Die gesamte Fallhöhe *s(T)* nach *T* Zeiteinheiten entspricht daher exakt der gesamten Fläche des grauen Dreiecks, d.h. der Hälfte des Rechtecks mit Seitenlängen *T* und *v(T) = gT*. Somit ergibt sich

$$s(T) = \frac{1}{2}\, v(T)\, T = \frac{g}{2}\, T^2.$$

Also ist die Fallhöhe proportional zum Quadrat der verstrichenen Zeit *T*. Hieraus lässt sich auch leicht folgern, dass die Flugbahn eines irgendwie schräg abgeworfenen Körpers die bekannte Wurfparabel beschreibt.

Wir abstrahieren aus unseren Überlegungen zum freien Fall: Ein System (aktuelle Fallhöhe), dessen Zuwachs (Geschwindigkeit) linear mit der Zeit wächst, entwickelt sich selbst quadratisch. Es lässt sich zeigen, dass sich dieses Schema analog fortsetzt: Ein System dessen Zuwachsrate sich quadratisch entwickelt, wächst selbst wie eine dritte Potenz etc. Auf diese Art und Weise lassen sich auch höhere Potenzen und polynomielle Zusammenhänge qualitativ erklären.

Zugegebenermaßen fehlt obigen Überlegungen einiges an methodischer Strenge, um als mathematische Beweise gelten zu können. Sie zeigen aber jedenfalls, dass auch fast ohne Rechnungen substantielle Ideen vermittelt werden können. Es ließe sich sogar argumentieren, dass in der obigen Flächenberechnung die Grundideen der Integralrechnung enthalten sind, eines Themas, das im Mathematikunterricht an Gymnasien üblicherweise große Teile des letzten Schuljahres dominiert. Außerdem werden Gründe deutlich, warum gewisse Objekte (in unserem Beispiel lineare, polynomielle und exponentielle Funktionen) immer wieder auftreten und daher ein eingehendes Studium in höherem Maß verdienen als andere.

3 Kepler und Newton – Mathematik und Naturverständnis

Bekanntlich wurde die Deutung der Sonne als Mittelpunkt des Sonnensystems durch Nikolaus Kopernikus (1473-1543) und die damit verbundene Verdrängung der Erde aus dem Zentrum unserer Weltsicht als eine der großen wissenschaftlichen Revolutionen empfunden. Etwa ein Jahrhundert später erkannte Johannes Kepler (1571-1630) aufgrund sehr genauer Beobachtungen von Tycho de Brahe (1546-1601), dass die Planeten zwar keine Kreise beschreiben, immerhin aber die mathematisch zweiteinfachsten Bahnen, nämlich Ellipsen, und dies mit veränderlichen aber trotzdem genau beschreibbaren Geschwindigkeiten. Er fasste seine Entdeckungen in folgenden drei Gesetzen zusammen:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Die Geschwindigkeit eines Planeten auf seiner Bahn ändert sich derart, dass die Verbindungslinie zwischen Sonne und Planet in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Also bewegt sich der Planet in Sonnennähe schneller als bei größerer Entfernung.
3. Sonnenferne Planeten bewegen sich absolut langsamer als sonnennahe. Und zwar verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben (dritte Potenzen) der mittleren Abstände zur Sonne (das heißt die Umlaufzeiten wie die 1.5-ten Potenzen der Abstände).

Kepler gab aber keine weitere Erklärung für diese Gesetze. Eine solche gelang Sir Isaac Newton (1642-1727). In epochaler Weise verband sich in ihm die visionäre Schau des großen Naturwissenschaftlers mit dem feinsinnigen, analytischen Verstand des genialen Mathematikers. Unabhängig vom Wahrheitsgehalt der berühmten Anekdote vom Apfel, der vom Baum auf Newtons Kopf fiel, passt das Wort *Intuition* nicht schlecht auf die bahnbrechende Idee, dass eine gemeinsame Ursache (nämlich das Gravitationsgesetz) existiert, welche einerseits in astronomischem Maßstab die Bewegung der Planeten erklärt und andererseits in irdischem Maßstab die Fallgesetze. Ist die Idee des Gravitationsgesetzes einmal geboren, so fällt es – vor allem bei Vorliegen der Entdeckungen Galileis und Keplers – gar nicht mehr so schwer, auch die exakte Formel zu erschließen. Ich begnüge mich hier jedoch mit der Formulierung des Gesetzes und empfehle [1] als umfassendere Lektüre zu diesem und verwandten Themen.

Das Gravitationsgesetz lautet: Zwei Massen m_1 und m_2 unterliegen einer Anziehungskraft, deren Stärke F direkt proportional zu den beiden Werten m_1 und m_2 und indirekt proportional zum Quadrat ihrer Entfernung r ist. Also

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,,$$

wobei sich die universelle Gravitationskonstante G aus den Grundeinheiten ergibt und empirisch bestimmt werden kann.

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, dass im irdischen Fall von Wurfparabeln die Rede war, bei den Planeten jedoch von Ellipsen. Dieser scheinbare Widerspruch klärt sich auf, wenn man sich beim Fallversuch die Masse der Erde in einem Punkt konzentriert denkt. Dann erweist sich die Flugbahn eines geworfenen Gegenstandes eigentlich als Teil einer Ellipse, welche in der Nähe ihres Scheitels so sehr einer Parabel gleicht, dass die Unterschiede nicht ins Gewicht fallen. Die Feinheit besteht darin, dass die Anziehungskraft der Erde von der Entfernung zum Erdmittelpunkt abhängt, bei Galilei'schen Fallversuchen aber praktisch konstant ist.

Auch ohne rigorose Rechnungen lässt sich die Kernidee dafür, dass aus dem Newton'schen Gravitationsgesetzt die Kepler'schen Gesetze folgen, auch intuitiv begreifen:

Bewegt sich ein Planet von einem sonnenfernen Punkt seiner Bahn schräg Richtung Sonne, so wird er durch die Gravitation beschleunigt (2. Kepler'sches Gesetz), gleichzeitig in Richtung Sonne abgelenkt (eine Ellipsenbahn gemäß dem 1. Kepler'schen Gesetz ist also plausibel), und schließlich muss, um der in Sonnennähe zunehmenden Anziehungskraft die Balance zu halten, bei sonnennahen Planeten alles schneller ablaufen als bei sonnenfernen (2. und 3. Kepler'sches Gesetz).

Zu jeder mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung, welche diese Bezeichnung verdient, gehört die Würdigung – nicht notwendig der vollständige Nachvollzug in allen Details – der epochalen Leistungen Newtons: Er fand mathematische Formulierungen für Begriffe wie Geschwindigkeit, Beschleunigung etc., entwickelte den mathematischen Apparat zu ihrer rechnerischen Behandlung, formulierte mit Hilfe der neuen mathematischen Sprache jene Differentialgleichung, welche Gravitationsgesetz und Planetenbewegung zueinander in Beziehung setzt und konnte schließlich zeigen, dass die Lösungen dieser Differentialgleichung gerade die Kepler'schen Gesetze sind.

Man beachte, dass die mathematische Herleitung der Kepler'schen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz umgekehrt auch als eindrucksvolle empirische Bestätigung des Gravitationsgesetzes aufgefasst werden kann. Diese Sicht von zwei Seiten ist typisch für das Verhältnis von Mathematik und Physik. Physikalische Hypothesen werden meist dadurch bestätigt (aber nie logisch zwingend bewiesen), dass man unter Einsatz von Mathematik (das heißt logisch deduktiv) möglichst viele denknotwendige Konsequenzen ableitet, die mit der empirischen Wirklichkeit verglichen werden können. Passt alles, ist die Hypothese erhärtet, andernfalls ist sie widerlegt.

Außerdem unterscheiden wir: Ein mathematisches Gesetz besagt typischerweise, dass aus einer gewissen (präzise zu formulierenden) Voraussetzung auf logisch notwendige Weise eine gewisse Konsequenz folgt. Anerkannt und somit als mathematischer Satz (Theorem) gilt so ein Gesetz, sobald der (rein deduktiv zu führende) Beweis für diese logische Notwendigkeit erbracht worden ist. Im Gegensatz dazu ergibt sich die Gültigkeit eines physikalischen Gesetzes durch oftmalige empirische Bestätigung. Deshalb müssen immer wieder bereits anerkannte physikalische Gesetze umgestoßen und durch neue, oft lediglich verfeinerte oder nur unwesentlich abgeänderte ersetzt werden. Man schließt in der Physik wie in allen empirischen Wissenschaften also *induktiv*, das heißt von endlich vielen Einzelversuchen auf ein allgemeingültiges Gesetz, während die Mathematik *deduktiv* aus allgemeinen Grundtatsachen speziellere Aussagen logisch ableitet. Deshalb sind mathematische Gesetze, anders als physikalische, denknotwendig. Ungeachtet dessen spielen bei der Suche nach mathematischen Beweisen auf der psychologischen Ebene Intuition, Beispiele, Heuristik und Erfahrung eine unverzichtbare Rolle.

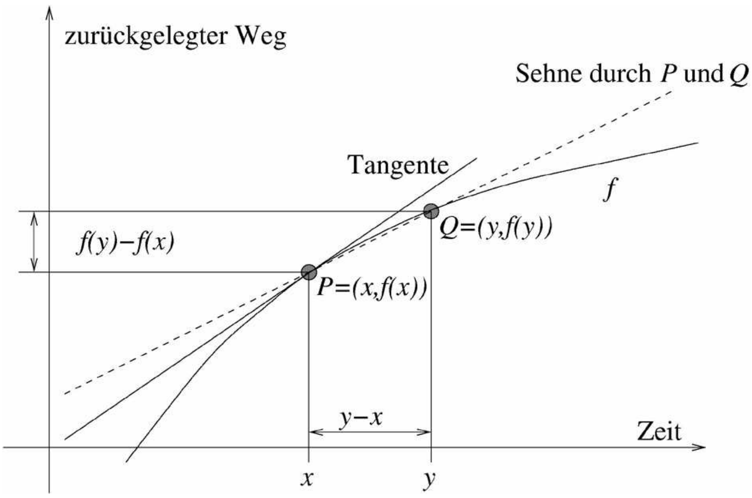
4. Grundbegriffe der Differentialrechnung – Mathematik von innen

Bisher haben wir uns der Mathematik gewissermaßen von außen genähert, durch die Beschreibung von Phänomenen der Finanzwelt oder der Physik. Mindestens ebenso wichtig für das Verständnis der Entwicklung der Mathematik ist der Blick von innen.

Um dies an einem wesentlichen Beispiel zu illustrieren, greifen wir nochmals das bereits an früherer Stelle kurz angeschnittene physikalische Problem auf, die Momentangeschwindigkeit $v = v(t)$ eines beschleunigten Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt t sinnvoll zu definieren. Im Falle eines gleichmäßig bewegten Körpers ist dies einfach:

$$v = \frac{s}{t},$$

wobei s der während der Zeitdauer t zurückgelegte Weg ist. Dieser Quotient ist aber eben nur bei gleichförmiger Bewegung konstant. Im allgemeinen Fall beschreibt er die Durchschnittsgeschwindigkeit. Die naheliegende Idee besteht nun darin, die Durchschnittsgeschwindigkeit für möglichst kleine Zeitintervalle um den betrachteten Zeitpunkt t herum zu bestimmen. Im Extremfall wäre das Intervall nur mehr ein Punkt; da hätte man den Quotienten 0/0 zu berechnen, der aber sinnlos ist. Für die geometrische Deutung des Sachverhalts benutze ich, mathematischen Traditionen folgend, eine leicht veränderte Notation.



Wir betrachten *x* als die unabhängige Zeitvariable und die von *x* abhängige Funktion $f = f(x)$, welche die bis zum Zeitpunkt *x* zurückgelegte Wegstrecke angibt. Da die *f* entsprechende Kurve gekrümmt und nicht linear ist, wird durch sie eine ungleichförmige Bewegung beschrieben. Im Vergleich dazu entspricht die Tangente als Gerade einer gleichförmigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Diese ist gleich der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt *x*, welche der Kurve entspricht. Die Steigung der gekrümmten Kurve im Punkt $P = (x, f(x))$ mit den Koordinaten *x* und $f(x)$ kann also mit der Steigung der Tangente in diesem Punkt gleichgesetzt werden. Die Tangente und damit ihre Steigung exakt zu definieren, ist ein innermathematisches Problem, welches Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) unabhängig von Newton zur gleichen Zeit die Differentialrechnung entwickeln ließ, ohne dass er physikalische Probleme im Auge gehabt hätte.

Die der Abbildung zugrunde liegende Idee lautet: Man betrachte ein y in der Nähe von x und berechne die Steigung der geradlinigen Sehne (strichliert) durch die zwei Punkte P = (x, f (x)) und Q = (y, f (y)), also den Quotienten

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Nähert sich *y* dem Wert *x* infinitesimal an, so nähert sich der entsprechende Quotient beliebig der gesuchten Steigung der Tangente an. Man schreibt für diesen sogenannten *Grenzwert*

$$f'(x)=\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Was bedeutet *infinitesimal*, was das Symbol $\lim_{y\to x}$ aber genau?

So kurz die Antwort auch formuliert werden kann, ist sie doch das Resultat eines Ringens der führenden Mathematiker mehrerer Jahrhunderte um den vielleicht wichtigsten Begriff ihrer Wissenschaft überhaupt, den Grenzwertbegriff. Hier tritt er als Grenzwert von Steigungen auf, als sogenannter Differentialquotient.

Definition: *Die Funktion (Kurve) f hat an der Stelle x (beziehungsweise im Punkt P = (x, f(x))) die Steigung α, symbolisch α = f '(x), falls gilt:*
Für alle *vorgegebenen, beliebig kleinen aber positiven Fehlertoleranzen ε > 0 existiert ein positiver zulässiger Abstand δ > 0 zu x, so dass* **für alle** *y ≠ x, deren Abstand zu x kleiner als δ ist, die Gerade, welche die Punkte (x, f (x)) und (y, f (y)) verbindet, eine Steigung hat, die zwischen α – ε und α + ε liegt. (Der Wert f '(x) = α heißt auch Differentialquotient oder Ableitung der Funktion f an der Stelle x.)*

Benutzt man die mathematische Formelsprache, so genügt für die definierende Aussage sogar eine einzige Zeile:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall y: x-\delta<y<x+\delta, y\neq x\to\left|\alpha-\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|<\varepsilon.$$

Für den mit mathematischer Symbolik Vertrauten ist diese Formel übersichtlicher als die vorangegangene verbale Form. Aber geht es nicht trotzdem einfacher? Nein! (Das lässt sich sogar beweisen.) Und was daran empfinden wir als so schwierig, wenn eine einzige Formelzeile genügt? Es liegt wohl an der logischen Struktur **für alle** … **existiert** ... **für alle** … in der verbalen Definition, die in der Formel durch die abwechselnde Folge der sogenannten logischen Quantoren ∀…∃…∀… zum Ausdruck kommt. Diese Art von intellektueller Schwierigkeit ist typisch für die Mathematik generell, den meisten anderen Fächern aber fremd. Dort sind

Schwierigkeiten meist von ganz anderer Art. Ich behaupte deshalb, dass ein ganzes Jahr Mathematikunterricht in der Schule, sofern er ein wirkliches Verständnis für die Definition des Grenzwertes bewirkt, viel besser investiert wäre, als all die zahl- und ziellosen Rechnereien, welche Unterricht, Übungen und Prüfungen oft füllen. Denn im Gegensatz zu blinden Exerzitien macht ein besseres Verständnis für gedankliche Feinheiten auch außerhalb der Mathematik viel sensibler gegenüber logischen Fouls, die in öffentlichen Diskussionen, insbesondere von Politikern oft ungestraft begangen werden. Das zeigt auch die wertvolle Rolle, die mathematischer Bildung bei der Förderung einer kritischen Öffentlichkeit zukommen könnte, welche ihrerseits Voraussetzung für eine funktionierende Demokratie ist.

5. Einige Grundlagenfragen – Mathematik und Philosophie

Wie kann die Mathematik mit endlichen Mitteln unumstößliche Aussagen über unendliche Mengen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen machen? Um das zu verstehen, muss man sich mit der Frage auseinandersetzen, was überhaupt die Zahlen sind. Bei genauerer Analyse erkennt man, dass es dabei weniger auf die einzelne Zahl ankommt, sondern auf gewisse Eigenschaften des *Systems* der natürlichen Zahlen.

Einen der überzeugendsten Beiträge dazu lieferte Giuseppe Peano (1858-1932). Er ging von folgenden einfachen Beobachtungen aus: Die Zahl 0 gehört zu $\mathbb{N}$; wir können unbeschränkt weiterzählen, das heißt von jeder Zahl zu einem Nachfolger fortschreiten (von n zu n+1); 0 ist selbst nicht Nachfolger eine anderen Zahl n aus $\mathbb{N}$; verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger; und (Induktionsprinzip) jede Zahl kann durch Zählen von 0 weg erreicht werden. So banal diese Aussagen anmuten mögen, sie allein enthalten genügend Information über das unendliche System $\mathbb{N}$, um daraus (fast) alle Sätze der Zahlentheorie abzuleiten. Man kann diese Aussagen in einer sehr einfachen formalen Sprache ausdrücken, die sich aus wenigen logischen und arithmetischen Symbolen aufbauen lässt. Die so erhaltenen Aussagen sind als die fünf Peanoaxiome bekannt. Das interessanteste ist zweifellos das Induktionsprinzip. Das populäre Wort *Dominoeffekt* meint im Kern genau dieses Induktionsprinzip. Es ist die entscheidende Basis für die meisten Beweise allgemeingültiger Gesetze über natürliche Zahlen. Daher: Kein Mathematikunterricht ohne Induktionsprinzip! Es stellt gewissermaßen den ersten erfolgreichen Griff der Mathematik in die Unendlichkeit dar.

Die Ausführungen zu den Peano-Axiomen legen folgende Antwort auf die Frage nahe, was denn das *System* der natürlichen Zahlen sei: das System jener Objekte, mit denen wir zählen; und wie dieses Zählen (= Nachfolger bilden) vor sich geht, beschreiben die Peanoaxiome. Weitgehend offen bleibt dabei jedoch die Frage: *Was ist eine Zahl?*

Wir bewegen uns hier in einem mathematisch-philosophischen Grenzbereich. Die Mathematik kann als eine mögliche Antwort die Konstruktion der natürlichen Zahlen als Mengen nach John von Neumann (1903-1957) geben: 0 ist die leere Menge; 1 die Menge, welche genau das eine Element 0 enthält; 2 ist die Menge, die genau die beiden Elemente 0 und 1 enthält, und so weiter. Ob diese Lösung philosophisch der Weisheit letzter Schluss ist, kümmert den Mathematiker weniger, als der Nichtmathematiker vielleicht vermuten würde. Elegant ist von Neumanns Zugang allemal, denn jede Zahl hat als Menge gerade so viele Elemente, wie ihr zusteht, und die Konstruktion hat noch weitere formal sehr reizvolle Eigenschaften. Allerdings werden damit manche Probleme verschoben auf die Frage: *Was ist eine Menge?* Die Antwort der modernen Mathematik entzieht sich bewusst metaphysischen Ansprüchen. In ähnlicher Weise wie Peano nicht das Wesen der Zahl erklärt hat, geben moderne Axiomensysteme der Mengenlehre keine Auskunft darüber, was eine Menge ist. Sie beschreiben aber, wie man mit Mengen umgeht, damit sie im Gebäude der Mathematik ihre Nützlichkeit bewähren können. Hier nur einige wenige Bemerkungen zur Mengenlehre.

Die Mengenlehre wurde von Georg Cantor (1845-1918) begründet. Ursprünglich untersuchte er innermathematische Fragen betreffend die Konvergenz von Fourierreihen, was aber hier keine Rolle spielt. Er machte die entscheidende Entdeckung, dass es auch bei unendlichen Mengen einen Sinn hat, von kleineren und größeren zu sprechen. Die unendliche Menge der natürlichen Zahlen repräsentiert die in diesem Sinne kleinste Unendlichkeit, genannt Abzählbarkeit. Die Menge der Punkte auf einer kontinuierlichen Linie ist bereits größer; man spricht deshalb von der Größe (genannt auch Mächtigkeit oder Kardinalität) des Kontinuums. (Ein bisschen mehr darüber sowie über weitere überraschende Konsequenzen mengentheoretischer Sichtweisen, gibt es in [4].) Tatsächlich geht es in der Mengenlehre als mathematischer Teildisziplin fast ausschließlich um unendliche Mengen. Darüber hinaus taugen Mengen aber auch als Grundbausteine für (fast) alle Objekte, die in der Mathematik vorkommen. Für den Fall der natürlichen Zahlen wurde das anhand der von Neumann'schen Konstruktion bereits angedeutet. Hier ist nicht der Platz dies weiter auszuführen, ich verweise auf [3]. Jedenfalls gelingt es mit Hilfe der Mengenlehre, eine riesige Wissenschaft wie die Mathematik auf einem extrem überschaubaren System von wenigen Grundsätzen (nämlich den Axiomen der Mengenlehre) aufzubauen. Diese Einheitlichkeit hat einen großen philosophisch–ästhetischen Reiz. (Ich erlaube mir den Vergleich mit der klanglichen Homogenität des Streichquartetts, welche für die besondere Stellung dieser Gattung in der klassischen Musik eine wichtige Rolle spielt.) Sie ist aber aus methodischen Gründen auch von großer praktischer Bedeutung für die Mathematik selbst. Zum Vergleich sei daran erinnert, wie intensiv in der Physik nach einer großen vereinheitlichten Theorie gesucht wird. Die Mathematik hat mit der Mengenlehre ihr Ziel der Vereinheitlichung im Wesentlichen erreicht.

6. Mathematik über ihre eigenen Grenzen – Mathematik und Kunst

Ein besonders faszinierendes Merkmal der Mathematik besteht darin, dass sie mit Hilfe ihrer eigenen Methoden diese selbst analysieren kann. Sie macht ihre Grenzen gleichzeitig zum Gegenstand, spricht also über (erste Wortbedeutung im Sinne des lateinischen *de*) diese Grenzen. Indem sie das tut, geht sie aber auch über (zweite Wortbedeutung im Sinne des lateinischen *trans*) diese Grenzen hinaus, erweitert ihr Herrschaftsgebiet und erschließt neue, bisher unbewohnte Siedlungsgebiete für menschlichen Geist und Phantasie.

Das gilt besonders für Ergebnisse, die besagen, dass die Lösung gewisser mathematischer Probleme in der ursprünglich gestellten Form grundsätzlich unmöglich ist. Es gibt zahlreiche Beispiele dieser Art. Wie ist so etwas möglich? Meist durch die Entwicklung neuer Theorien, die von genialen Ideen phantasiebegabter Mathematiker ihren Ausgangspunkt nehmen. Es entsteht eine Eigendynamik, die eine permanente Expansion der Mathematik bewirkt und mit dem ständigen Auftauchen neuer, ja revolutionärer Perspektiven einhergeht. Das spektakulärste Beispiel dieser Form von Selbstreflexion der Mathematik ist zweifelsohne der Gödel'sche Unvollständigkeitssatz, auf den wir nach einigen anderen klassischen Beispielen gleich zu sprechen kommen werden.

Quadratur des Kreises: Hinter diesem geflügelten Wort verbirgt sich das Problem, ausschließlich mit Zirkel und Lineal aus einem gegebenen Kreisradius die Seitenlänge jenes Quadrates zu konstruieren, das mit dem Kreis flächengleich ist. So wie einige weitere klassische Probleme ähnlicher Art, wie Würfelverdopplung, Winkeldreiteilung und Konstruktion des regelmäßigen n-Ecks (für beliebiges n), entzog sich diese Aufgabe seit der Antike Jahrtausende hindurch einer Lösung. Erst in der Neuzeit konnte mit vorwiegend algebraischen Methoden gezeigt werden, dass die genannten Aufgaben prinzipiell unlösbar sind. Wesentliche Beiträge stammen von Carl Friedrich Gauß (1777-1855) und Ferdinand von Lindemann (1852-1939), aus dessen 1882 erbrachtem Beweis für die sogenannte Transzendenz der Kreiszahl π die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises folgt.

Lösung algebraischer Gleichungen: In der Schule lernt man die Lösungsformel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

für quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$. In der Renaissance wurden kompliziertere aber grundsätzlich ähnliche Formeln für Gleichungen gefunden, wo x auch in dritter und vierter Potenz auftreten darf. Dass dies bei noch höheren Potenzen nicht mehr möglich ist, folgt aus den bahnbrechenden Arbeiten der beiden jung verstorbenen Genies Niels Henrik Abel (1802-1829) und Evariste Galois (1811-1832).

Nichteuklidische Geometrie: Geraden in der Ebene sind parallel, wenn sie keinen Schnittpunkt besitzen. Ein geometrisches Axiom des Euklid (ca. 325-265 v.Chr.) besagt, dass es durch einen Punkt genau eine Gerade gibt, die zu einer beliebig vorgegebenen parallel ist (Parallelenaxiom). Durch die Jahrhunderte bemühten sich Geometer, diesen Sachverhalt aus anderen, als fundamentaler empfundenen, Axiomen des Euklid herzuleiten. Erst Gauß, Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1793-1856) und János Bolyai (1802-1860) konnten zeigen, dass dies unmöglich ist. Sie fanden neuartige sogenannte Modelle der Geometrie, in denen alle euklidischen Axiome mit Ausnahme des Parallelenaxioms gelten. Also kann dieses nicht denknotwendig aus den anderen folgen. Entscheidende Vertiefungen stammen von Bernhard Riemann (1826-1866), ohne dessen Leistungen der gekrümmte Raum der Allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein (1879-1955) etwa ein halbes Jahrhundert später mathematisch nicht beschreibbar gewesen wäre.

Hilberts Programm und Gödels Satz: David Hilbert (1862-1943) galt als der universellste Mathematiker seiner Epoche. Er formulierte ein nach ihm benanntes Programm, welches auf sehr präzise Weise beschreibt, was das

Endziel der Mathematik sein sollte. Grob gesprochen geht es dabei um ein universelles Verfahren, das man auch einem Computer beibringen könnte und mit dem prinzipiell alle mathematischen Fragen zu entscheiden wären. Der in Brünn geborene Mathematiker Kurt Gödel (1906-1978), der vor seiner Emigration in die USA in Wien studierte und hier auch seine wichtigsten Resultate erzielte, zeigte die Unmöglichkeit des Hilbert'schen Programms mit seinem berühmten Unvollständigkeitssatz, der von vielen als das wichtigste mathematische Resultat des 20. Jahrhunderts angesehen wird. Dieser Satz besagt (unter gewissen schwachen technischen Voraussetzungen, die uns hier nicht zu kümmern brauchen), dass jedes widerspruchsfreie formale System, das stark genug ist, um wenigstens die Zahlentheorie zu beschreiben, jedenfalls auch stark genug ist, einen Satz zu formulieren, der innerhalb dieses Systems selbst weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Es gibt also kein universelles System, in dem alle wahren Sätze bewiesen werden können. Stets sind Erweiterungen möglich, und die Mathematik wird fortschreiten, solange es Menschen gibt. Zum Beispiel enthält auch das System der Peanoarithmetik, das sich aus den in Abschnitt 5 erwähnten Peanoaxiomen ergibt, unentscheidbare Sätze, die allerdings nicht einfach zu finden sind. Selbst in dem stärkeren System der Mengenlehre muss es solche Sätze geben. Das prominenteste konkrete Beispiel ist die sogenannte Kontinuumshypothese. Sie besagt, dass zwischen Abzählbarkeit und Mächtigkeit des Kontinuums (vgl. Ende von Abschnitt 5) keine weiteren Mächtigkeiten liegen, so wie etwa auch zwischen 0 und 1 keine weiteren natürlichen Zahlen liegen. Schon Cantor bemühte sich um einen Beweis der Kontinuumshypothese, allerdings erfolglos. Es war Gödel, der 1940 zeigen konnte, dass die Kontinuumshypothese nicht widerlegbar ist. Paul Cohen (geb. 1934) gelang schließlich Anfang der 60er-Jahre sogar der noch viel schwierigere Beweis, dass die Kontinuumshypothese auch nicht bewiesen werden kann.

In den letzten Absätzen konnte ich fast überhaupt nicht auf die Ideen eingehen, welche die erwähnten großartigen Erkenntnisse ermöglichten, obwohl gerade hier die Frage besonders brennt: *Wie kann man beweisen, dass ein Beweis unmöglich ist?* Wenn ein Beweis nicht gelingt, könnte das ja auch nur an der Unfähigkeit derer liegen, die sich daran versuchen. Leider würde eine Erklärung den Rahmen bei weitem sprengen. Immerhin lässt sich aber ein gemeinsames Merkmal von Lösungen derartiger Probleme festmachen:

Wie aus dem Nichts tauchen plötzlich vollkommen neuartige Ideen auf, die phantastische geistige Welten erschließen. Solche Welten werden in der Mathematik meist Theorien genannt (was allerdings nichts mit *theoretisch* im Sinne von *hypothetisch* oder *ungewiss* zu tun hat). Objekte kommen ins Spiel, die nicht weniger real sind als die Zahlen und deren Eigenleben unverhoffte Einsichten an den Tag bringt. Die Lösung des ursprünglichen Problems erweist sich a posteriori oft als klitzekleines Detail in einem viel größeren Bild mit großen ästhetischen Reizen. Dort betritt man auch jenen Bereich, wo kreative Mathematik ähnliche Saiten der Seele zum Klingen bringt wie die Kunst. Das ist nicht nur eine diffuse Idee, sondern lässt sich durchaus spezifizieren. Auch wenn die nachfolgenden musikalischen Vergleiche selbstverständlich in höchstem Maße von subjektiven Neigungen und Erfahrungen geprägt sind und sie mancher Mathematiker vielleicht lieber durch andere ersetzen würde, sind sie keineswegs beliebig:

Komplizierte Beweisgedanken können ebenso perfekt ineinandergreifen wie die Stimmen einer Fuge von Bach; Ideen einer Theorie stehen oft in ähnlich ausgewogenem Verhältnis zueinander wie die Teile eines klassischen Werkes von Mozart; mathematische Abstraktionen führen nach oft langem Ringen zur Klärung der entscheidenden Ideen, ähnlich wie die Verarbeitung und Abspaltung von Motiven in einer Sonate oder einem Quartett von Beethoven; die Übertragung mathematischer Vorstellungen in neue Zusammenhänge ruft in der Phantasie ähnliche Bilder und Farben hervor wie eine Moll-Dur-Modulation bei Schubert; und die wiederholte Beschäftigung mit mathematischen Ideen und Querbezügen vertieft den ästhetischen Reiz der komplexen Strukturen immer weiter, so wie das sorgfältige Studium einer Wagner-Partitur.

7. Resümee

Ich ziehe in diesem abschließenden Abschnitt einige Schlussfolgerungen betreffend Unterricht und Bildungssystem. Ich meine dabei vor allem den Unterricht für die etwa 14- bis 18-Jährigen. Für jüngere Schüler verschiebt sich die Gewichtung von den fachlichen etwas zu den pädagogischen Aspekten, ohne dass dadurch Grundsätzliches ungültig würde. Abschließend werde ich noch einige generelle Fragen ansprechen, welche die Rolle der Bildung in unserer Gesellschaft betreffen.

Ich habe in diesem Artikel versucht, auf sehr engem Raum einige Aspekte der Mathematik anzudeuten, welche meiner Meinung nach in jedem Mathematikunterricht vermittelt werden sollten: das Verständnis alltagsrelevanter Probleme durch qualitative Analyse der Gesetzmäßigkeiten, die Rolle der Mathematik für unser Naturverständnis, die Wichtigkeit einer sorgfältigen Analyse ihrer Begriffe, philosophische Fragen betreffend fundamentale Formen unseres Denkens wie z.B. das Zählen und Grenzüberschreitungen der Mathematik, wo sie ins Reich der Ästhetik eindringt. Alle diese Aspekte vertieft zu vermitteln, verlangt vom Lehrer hohe Fachkompetenz, vor allem Einsicht in die mannigfaltigen Querbeziehungen – innerhalb der Mathematik wie nach außen hin. Um den individuellen Unterschieden im Auffassungsvermögen der Schüler gerecht werden zu können, muss der Lehrer permanent sehr unterschiedliche Zugänge zu jedem Stoffbereich präsent haben, sein Fach in dieser Hinsicht also geradezu virtuos beherrschen. Bei wenig überzeugendem Unterricht verbirgt sich hinter scheinbar nur didaktischen Defiziten sehr häufig ein Manko gerade in dieser fachlichen Kernkompetenz.

In Unterricht und Prüfungspraxis sollte es selbstverständlich sein, dass in der Mathematik jederzeit die Frage nach dem *warum* gestellt werden darf; ja sogar soll. Nicht immer ist es im Unterricht möglich, vollständige Antworten zu geben, aber es sollte deutlich werden, dass mathematische Gesetze nicht von autoritären Gesetzgebern gemacht worden sind, sondern dass sie ausschließlich der menschlichen Vernunft entspringen, an der jeder Mensch Anteil hat. Egal wie vollständig die Begründungen letztlich auch sind; das wichtigste Ziel soll immer darin bestehen, Vorstellungen (durchaus bildhafte, denn sie sind die sinnlichen Ausprägungen abstrakter Ideen) wachzurufen, Argumentationen zu führen und vor allem die Schönheit des Gegenstandes erfahrbar zu machen. Ich erwähne noch einige weitere Charakteristika der Mathematik, die es Wert sind, im Unterricht vermittelt zu werden:

Die Abstraktion, einerseits als Schlüssel zur Verallgemeinerung spezieller Erkenntnisse auf viele verwandte Situationen, andererseits als Mittel zum besseren Verständnis des Wesentlichen an einem Phänomen und damit zur Erkenntnis von Grundprinzipien; die deduktive Methode des logischen Schließens als mathematisches Gegenstück zur induktiven Methode empirischer Wissenschaften; der sogenannte Erkenntnisvorlauf der Mathematik, deren Theorien oft aus innermathematischem Bedürfnis entwickelt worden sind, noch bevor ihre außermathematischen Anwendungsmöglichkeiten sichtbar sind. Die Vermittlung dieser Inhalte kann erreicht werden durch ein lebendiges Wechselspiel von allgemeinen Begriffen mit konkreten Beispielen und von abstrakten Theorien mit Anschauungen aus der Erfahrungswelt. Besonders geeignet für eine Auflokkerung des Unterrichts sind historische Hintergründe, die durchaus ins Anekdotische gehen dürfen. Die Ideengeschichte, insbesondere die Geschichte des langen Ringens um die richtigen Begriffe und Sichtweisen, ist ein nicht unwesentlicher Teil für ein angemessenes Verständnis von Mathematik wie auch jeder anderen Einzelwissenschaft. Dieses Ringen kann sich oft als schwieriger erweisen als die Lösung komplizierter Einzelprobleme. Man könnte in Analogie zu Galileis Leitsatz für die Physik (*was messbar ist, messen*; *was nicht messbar ist, messbar machen*) als Leitsatz der Mathematik formulieren: *Was präzise und widerspruchsfrei denkbar ist, denken; was noch nicht denkbar ist, denkbar machen*. Tatsächlich geht die Welt des mathematisch Denkbaren weit über das anschaulich Vorstellbare hinaus. In diesem Sinne ist die Mathematik die freieste aller Wissenschaften, denn sie ist nur dem widerspruchsfreien Denken verpflichtet, aber weder an die Erfahrung noch an das konventionelle Vorstellungsvermögen gebunden. Doch diese Freiheit will kreativ genutzt werden. Das im Unterricht zu vermitteln, stellt sehr hohe Anforderungen an den Lehrer. Insbesondere muss beständig gegen die Gefahr angekämpft werden, dass durch Überbetonung des Rechnens von Routinebeispielen das leider weit verbreitete Empfinden entsteht, der Schüler dürfe sich nur auf eng vorgegebenen Pfaden bewegen. Außerdem geraten bei übertriebenem Rechendrill die Ideen als wesentliche Bildungsinhalte zwangsläufig in den Hintergrund. Ebenfalls mit Bedacht muss der Einsatz der mathematischen Formelsprache erfolgen. Die Verwendung dieser Sprache hat nur in dem Ausmaß Sinn, in dem sie vom Lernenden auch verstanden wird. Die Formel ist nie Selbstzweck; denn sie ist nur eine Beschreibung der Idee, nicht die Idee selbst. Die enorme Zweckmäßigkeit von Formeln gebietet aber, einen hinreichenden Erwerb der Formelsprache anzustreben. Der Vergleich mit der musikalischen Notenschrift liegt nahe: Bis zu einem gewissen Niveau mögen Noten vom elementaren musikalischen Erleben ablenken, genauso wie Formeln von den mathematischen Vorstellungen. Ab einer gewissen Komplexität kann die Analyse aber nicht ohne geeignete Symbolsprache auskommen. Ein weit verbreitetes Missverständnis besteht darin zu glauben, die Mathematik sei abgeschlossen und werde nur mehr von Generation zu Generation weitergegeben, wie archäologische Fundstücke. So absurd diese Haltung auch ist, sie spiegelt sich in zahllosen

Begebenheiten wider, von denen fast jeder Mathematiker aus seiner eigenen Erfahrung im Umgang mit Nichtmathematikern zu berichten weiß. Mathematik ist eine lebendige Wissenschaft, und je größer der aktuelle Wissensstand ist, desto mehr interessante offene Fragen tun sich am Rande des bekannten Wissens auf und stimulieren Forscher in aller Welt zu intensiver Forschungsarbeit. Wünschenswert ist deshalb ein stärker institutionalisierter Kontakt zwischen Schulen und Universitäten, verbunden mit noch intensiver betriebenen Fortbildungsprogrammen für Lehrer.

Wir sehen, dass ein erfolgreiches Bildungssystem sehr hohe und vielfältige Anforderungen an seine Lehrer stellen muss. Und ein großer Teil dieser Ansprüche betrifft – jedenfalls in der Mathematik – durchaus fachliche Kernkompetenzen. Wie steht es aber mit der didaktischen Ausbildung? Im Gegensatz zur mathematischen Fachausbildung, die ihrem Wesen nach theoretischer Natur ist, ergibt sich didaktisches Geschick einerseits aus gewissen allgemeinen Persönlichkeitsmerkmalen (Kommunikationsfreude, Einfühlungsvermögen, sprachlicher Ausdrucksreichtum), andererseits aus der praktischen Erfahrung. Die pädagogisch-didaktische Lehrerausbildung muss diese beiden Komponenten beständig im Auge haben. Fußen muss sie freilich auf einem breiten fachlichen Fundament. Soll Lehrerausbildung gelingen, muss sie auf diese Umstände Rücksicht nehmen sowie darauf, dass sich die richtigen Begabungen für den Lehrerberuf entscheiden. Einige Merkmale, die ich für entscheidende Voraussetzungen halte: Begeisterung für die Schönheiten des Gegenstandes und, damit meist einhergehend, hinreichende fachliche Begabung; Sympathie für die Schüler; Freude an der Kommunikation; und der Ehrgeiz, es immer noch besser zu machen.

Ich wage zu behaupten, dass der Lehrerberuf der verantwortungsvollste schlechthin ist. Denn in keinem anderen Beruf hat man vergleichbare Möglichkeiten, Menschen individuell nachhaltig zu beeinflussen, wenn nicht gar zu prägen. Wir dürfen uns aber nicht der Illusion hingeben, dass jeder, der nur wolle, auch schon für diesen Beruf geboren sei. Umso entscheidender für die Zukunft unseres Bildungssystems und damit unserer gesamten Gesellschaft wird es sein, die Allerbesten dafür zu gewinnen. Das wird nur mit entsprechenden Anreizen gelingen. Förderlich wäre auch eine größere Durchlässigkeit zwischen Schule und anderen Berufen, aber auch die Abschaffung der Kombinationspflicht. Warum müssen Lehrer zwei Fächer halb studieren (eines davon vielleicht nur mit mäßigem Interesse) anstatt eines richtig? Statt dessen sollten vielfältige interdisziplinäre Bezüge des einen Hauptfaches stärker in der Ausbildung verankert sein.

Ich konnte hier natürlich nur einige wenige jener unzähligen Themen berühren, die in einer profunden Diskussion über Bildung, insbesondere über mathematische Bildung zur Sprache kommen müssen. Das Thema ist komplex, vielfältig und anspruchsvoll. Doch wir müssen uns der großen Verantwortung stellen, sei es als Lehrer oder als Bildungspolitiker. Denn eine Gesellschaft ist so gut wie ihre Lehrer.

Literatur

[1] V. I. Arnol'd, Huygens and Barrow, Newton and Hooke, Birkhäuser-Verlag (1990), Basel – Boston – Berlin

[2] R. Courant und H. Robbins, Was ist Mathematik?, Springer-Verlag (2000), Berlin – Heidelberg – New York. Übersetzung des englischen Originals *What is Mathematics?*, seit 1941.

[3] G. Kuba und S. Götz, Zahlen, Fischer Taschenbuch Verlag (2004), Frankfurt am Main.

[4] R. Winkler, Wie macht man 2 aus 1? – Das Paradoxon von Banach-Tarski, Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen 33 (2001), 166-196. Auch unter: http://www.dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub