Analysis 3 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 12.3.2010, Winkler

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung vereinbart für:

Hinweise, bevor Sie beginnen:

- Rückseite nicht vergessen!
- Innerhalb jeder der drei Aufgaben ist die angegebene Reihenfolge der Teilfragen empfehlenswert, muss aber nicht eingehalten werden.
- Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
- Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to X$ ein Kontraktion mit der Lipschitz-Konstanten $\lambda < 1$. Weiters sei f^n rekursiv definiert durch $f^0(x) := x$, $f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$.

   (a) Zeigen Sie für $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ mittels Induktion
   $$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \lambda^n d(x, f(x)).$$

   (b) Zeigen Sie
   $$d(x, f^n(x)) \leq \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda} d(x, f(x)).$$
   Hinweis: (a) verwenden.

   (c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ die Folge $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Hinweis: (b) auf $f^m(x)$ statt x anwenden und (a) verwenden.

   (d) Formulieren und beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz (das Kontraktionsprinzip).

2. Gegeben sei die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der 1-Norm, d.h. die Menge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \ ||(x, y)||_1 = |x| + |y| \leq 1\}$.

   (a) Geben Sie eine Parametrisierung des Randes ∂K von K als geschlossene stetige Kurve an, die stückweise stetig differenzierbar ist.

   (b) Wie lautet die Leibnizsche Sektorformel?

   (c) Wenden Sie die Leibnizsche Sektorformel an, um das zweidimensionale Lebesguesche Maß von K zu berechnen. (Hinweis: Sofern Sie in (a) die naheliegende Parametrisierung gewählt haben, so lässt sich das nun zu berechnende Integral als Summe von vier gleichen Teilen interpretieren.)

   (d) Begründen Sie die Leibnizsche Sektorformel heuristisch mit Skizze.

3. Sei $f : \mathbb{R}^p \supseteq D \to \mathbb{R}^q$ zweimal differenzierbar, D offen und $x_0 \in D$. (Hinweis für das Folgende: Lineare Abbildungen können bezüglich der kanonischen Basen als Matrizen und somit als Elemente eines euklidischen Raumes mit geeigneter Dimension dargestellt werden.)

   (a) Wie ist q_1 zu wählen, damit $f' : D \to \mathbb{R}^{q_1}$, $x \mapsto f'(x)$. Geben Sie auch eine Darstellung von f' an.

   (b) Wie ist q_2 zu wählen, damit $f'' : D \to \mathbb{R}^{q_2}$, $x \mapsto f''(x)$?

   (c) Sei nun $q = 1$. Wie lassen sich in diesem Fall $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$ darstellen? Geben Sie eine hinreichende Voraussetzung dafür an, dass die quadratische Matrix für $f''(x_0)$ symmetrisch ist.

   (d) Nennen Sie einen Themenkreis, wo die Objekte aus (c) auftreten.