Analysis 1 für Lehramt, Prüfung am 29.6.2012 (Winkler)

Name, Matrikelnummer:

Ort und Zeit der mündlichen Prüfung werden über TISS bekanntgegeben.

Hinweise bevor Sie beginnen:

1. Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
2. Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
3. Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Bekanntlich ist für zwei Mengen A_1, A_2 das kartesische Produkt als Menge geordneter Paare definiert, genauer $A_1 \times A_2 := \{(a_1, a_2) : \ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$. Im Gegensatz dazu ist das große kartesische Produkt $\prod_{i \in I} A_i$ einer Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Mengen A_i, $i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I definiert als Menge aller Funktionen $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$, die $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ erfüllen.

   (a) Geben Sie alle Elemente von $A := A_1 \times A_2$ explizit an für $A_1 = \{2, 4, 8\}$ und $A_2 = \{3, 9\}$.

   (b) Geben Sie alle Elemente von $P := \prod_{i \in I} A_i$ explizit an für $I = \{1, 2\}$ und $A_1 = \{2, 4, 8\}$, $A_2 = \{3, 9\}$. Machen Sie dies in Form einer Tabelle, in welcher die Spalten den $f \in P$ und die Zeilen den $i \in I$ entsprechen.

   (c) Die Mengen A aus (a) und P aus (b) haben gleich viele Elemente, sind i.a. aber nicht identisch. Begründen Sie $A \neq P$, indem Sie auf die Definition als Mengen Bezug nehmen. Hinweis: Ein geordnetes Paar (x, y) sei hier (wie in der Mengenlehre üblich) als die Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ definiert.

   (d) Dennoch haben die Mengen A und P gleich viele Elemente. Das liegt nicht an der speziellen Wahl der Mengen A_1 und A_2, sondern gilt für beliebige Mengen. Begründen Sie dies, indem Sie eine (natürliche) Bijektion definieren, die jedem Paar $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ eine entsprechende Funktion aus P zuordnet.

2. Das halboffene Intervall $I := [0, 1[$ ist weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

   (a) Gibt es eine größte in I enthaltene und in $\mathbb{R}$ offene Menge O? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

   (b) Gibt es eine größte in I enthaltene und in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Menge A? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

   (c) Gibt es eine kleinste I umfassende und in $\mathbb{R}$ offene Menge O? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

   (d) Gibt es eine kleinste I umfassende und in $\mathbb{R}$ abgeschlossene Menge A? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

   (e) Zu jeder offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$ gibt es trivialerweise eine größte in O enthaltene offene Menge, nämlich O selbst. Gibt es auch abgeschlossene Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$, zu denen es eine größte in A enthaltene und in $\mathbb{R}$ offene Menge gibt? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

   (f) Analog gibt es zu jeder offenen Mengen $O \subseteq \mathbb{R}$ (ebenso trivialerweise) eine kleinste O umfassende offene Menge, nämlich wieder O selbst. Gibt es auch nichtleere abgeschlossene Mengen $A \subseteq I$, zu denen es eine kleinste A umfassende und in $\mathbb{R}$ offene Menge gibt? Wenn ja, welche; wenn nein, warum nicht?

3. Bekanntlich ist die harmonische Reihe mit den Gliedern $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ divergent. Betrachtet man statt dessen $(-1)^n \frac{1}{n}$, so erhält man eine (natürlich nur bedingt und nicht absolut) konvergente Leibnizreihe. In dieser Aufgabe sollen nun verschiedene Varianten von Vorzeichenbelegungen betrachtet werden. Und zwar stehe für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ das Symbol R_T für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wobei $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in T$ und $a_n = -\frac{1}{n}$ für $n \notin T$. In den Fragen (a) bis (e) ist für verschiedene T zu entscheiden, ob die Reihe R_T konvergiert. ACHTUNG: Da es sich dabei um Entscheidungsfragen handelt und Sie nicht raten sollen, ergeben sich die Punkte, die Sie dafür insgesamt bekommen, aus der Differenz richtige minus falsche Antworten. Wenn Sie sich nicht hinreichend sicher sind, empfiehlt es sich daher, nichts hinzuschreiben.

   (a) T bestehe aus allen n der Gestalt $n = 4k + 1$ und $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$.

   (b) T bestehe aus jenen $n \in \mathbb{N}^+$ mit $2^{2k} \leq n < 2^{2k+1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

   (c) T bestehe aus allen Zahlen n, die in ihrer dekadischen Darstellung die Einerstelle 0,1,2,3 oder 4 haben.

   (d) T bestehe aus allen Zahlen n, die in ihrer dekadischen Darstellung die Einerstelle 0,1,2,3,4 oder 5 haben.

   (e) T bestehe aus jenen $n \in \mathbb{N}^+$ mit $(2k)^2 \leq n < (2k + 1)^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

   (f) Begründen Sie Ihre Antwort aus (a).