

Algebra, Prüfung am 5.10.2018, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte gleich ausfüllen):

Terminvereinbarung für die mündliche Prüfung persönlich im Anschluss an die schriftliche unmittelbar vor dem Hörsaal.

Hinweise bevor Sie beginnen:

Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.

Verwenden Sie für jede der drei Aufgaben ein eigenes Blatt.

Bei Bedarf erhalten Sie zusätzliche Blätter.

Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Wie üblich bezeichne S_3 die symmetrische Gruppe, aufgefasst als Algebra vom Typ $\tau = (2, 0, 1)$. Die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ ist die Trägermenge der Gruppe S_3 , die Verkettung von Abbildungen die binäre Operation, die identische Abbildung id das neutrale Element (nullstellige Operation) und die Bildung inverser Abbildungen die einstellige Operation. $\Gamma(S_3)$ bezeichne die Menge aller Gesetze, die in S_3 gelten. Verwenden Sie zwecks einheitlicher Notation für Permutationen aus S_3 Zykelschreibweise, und \circ, e, \cdot^{-1} als Operationssymbole für den Typ $\tau = (2, 0, 1)$.
 - (a) Geben Sie ein Gesetz $\gamma \in \Gamma(S_3)$ an, das nicht in allen Gruppen gilt.
 - (b) Geben Sie zu Ihrem γ aus (a) eine Gruppe G und Elemente aus G an, für die γ nicht gilt.
 - (c) Finden Sie eine Gruppe G , die alle Gesetze aus $\Gamma(S_3)$ erfüllt und mehr Elemente enthält als S_3 .
 - (d) Realisieren Sie S_3 als Bild einer freien Gruppe F unter einem surjektiven Homomorphismus $\varphi : F \rightarrow S_3$. Tun Sie das, indem Sie eine Menge $E \subseteq F$ von freien Erzeugenden für F angeben sowie sämtliche Werte $\varphi(x)$ mit $x \in E$.
 - (e) Erklären Sie, warum es in (d) genügt, eine geeignete Menge E und geeignete Elemente $\varphi(x)$ mit $x \in E$ anzugeben.
 - (f) Übernehmen Sie Ihr F und E aus (d). Wie viele Lösungen $(\varphi(x))_{x \in E} \in S_3^E$ (Menge aller Abbildungen von E nach S_3) gibt es für (d)?
2. Bezeichne K einen Körper mit 27 Elementen und P den Durchschnitt aller Unterkörper von K .
 - (a) Geben Sie (mit geeigneter von Ihnen explizit anzugebender Notation) die Operationstafeln für die Addition und für die Multiplikation auf P an.
 - (b) Wie viele Unterkörper hat K ? Geben Sie jeweils die Anzahl ihrer Elemente an.
 - (c) Geben Sie ein normiertes Polynom $p \in P[x]$ vom Grad 3 an, das eine Nullstelle $\alpha \in K \setminus P$ hat.
 - (d) Wie viele Polynome p wie in (c) gibt es?
 - (e) Wie viele davon sind primitiv (d.h. mit primitiven Elementen von K als Nullstellen)?
 - (f) Wie viele irreduzible, normierte Polynome vom Grad 4 gibt es in $P[x]$?

3. In dieser Aufgabe geht es um Körper bzw. angeordnete Körper K , die sich nicht (in einem Fall sehr wohl) in \mathbb{Q} , \mathbb{R} oder \mathbb{C} einbetten lassen. Skizzieren Sie jeweils, auf welchen Überlegungen Ihre Antwort beruht.
- (a) Gibt es einen abzählbaren Körper K der Charakteristik 0, der sich *nicht* in \mathbb{R} einbetten lässt?
 - (b) Gibt es einen abzählbaren Körper K der Charakteristik 0, der sich *nicht* in \mathbb{C} einbetten lässt?
Hinweis: Es gibt einen Zwischenkörper Z , so dass die Erweiterung $\mathbb{Q} \leq Z$ rein transzendent und die Erweiterung $Z \leq K$ rein algebraisch ist.
 - (c) Gibt es einen vollständig angeordneten Körper K , der sich *sehr wohl* in \mathbb{Q} einbetten lässt?
 - (d) Auf dem Körper $K := \mathbb{Q}(x)$ aller gebrochen rationalen Funktionen über \mathbb{Q} gibt es viele Ordnungsstrukturen, die K zu einem angeordneten Körper machen. Geben Sie eine solche an, für die sich K *nicht* als angeordneter Körper in \mathbb{R} einbetten lässt.
Hinweis: Wählen Sie $x \in K = \mathbb{Q}(x)$ als ein Element, das größer ist als alle rationalen Zahlen. Interpretieren sie die Elemente $r(x) \in \mathbb{Q}(x)$ als Funktionen $r : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ und legen Sie deren asymptotisches Verhalten für $x \rightarrow \infty$ der gesuchten Ordnung zu Grunde.
 - (e) Gibt es einen archimedisch angeordneten Körper K , der sich *nicht* als angeordneter Körper in \mathbb{Q} einbetten lässt?
 - (f) Gibt es einen archimedisch angeordneten Körper K , der sich *nicht* als angeordneter Körper in \mathbb{R} einbetten lässt?