Algebra, Prüfung am 28.4.2017, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Terminvereinbarung für die **mündliche Prüfung**: persönlich, unmittelbar nach der schriftlichen Prüfung im Bereich vor dem Hörsaal

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Verwenden Sie für jede der drei Aufgaben eigene Blätter.
Bei Bedarf werden Ihnen zusätzliche Blätter gegeben.
Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Sei X eine Menge (von Variablen) und $\Omega = (\omega_i)_{i \in I}$ eine Familie von Operationssymbolen für einen Typ $\tau = (n_i)_{i \in I}$ von Algebren. (Alle $x \in X$ seien von allen ω_i verschieden, ebenso wie die ω_i untereinander.) Wir definieren die Menge $T = T(X, \Omega)$ der Terme (über X und Ω) als Zeichenfolgen wie üblich rekursiv. Und zwar sei $T_0 := X$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ enthalte T_{n+1} genau alle $t \in T_n$ und alle Zeichenfolgen der Gestalt $\omega_i t_1 \dots t_{n_i}$ mit $i \in I$ und $t_1, \dots, t_{n_i} \in T_n$. Schließlich definieren wir $T := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Für jedes $t \in T$ heißt das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $t \in T_n$ auch die *Stufe* des Terms t.

   Eine Algebra vom Typ τ mit Trägermenge A notieren wir als $\mathfrak{A} = (A, \Omega^{\mathfrak{A}})$ mit $\Omega^{\mathfrak{A}} = (\omega_i^{\mathfrak{A}})_{i \in I}$, $\omega_i^{\mathfrak{A}} : A^{n_i} \to A$.

   (a) Auf der Menge T der Terme als Trägermenge ist eine Algebra $\mathfrak{T} = (T, \Omega^{\mathfrak{T}}) = (T, (\omega_i^{\mathfrak{T}})_{i \in I})$ vom Typ τ (die Termalgebra) auf natürliche Weise so definiert, dass $\mathfrak{T}$ von $X = T_0$ erzeugt wird. Wie? (Es genügt, die Operationen $\omega_i^{\mathfrak{A}}$ zu definieren.)

   (b) Sei $\mathfrak{A} = (A, \Omega^{\mathfrak{A}})$ eine beliebige Algebra vom Typ τ und $\alpha : X \to A$ eine Variablenbelegung. Dann gibt es genau eine Abbildung $\overline{\alpha} : T \to A$, die auf $X \subseteq T$ mit α übereinstimmt und ein Homomorphismus von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{A}$ ist. Weil $\overline{\alpha}$ auf X vorgegeben ist und X die Algebra $\mathfrak{T}$ erzeugt, ist $\overline{\alpha}$ dadurch eindeutig bestimmt.
   Beschreiben Sie $\overline{\alpha}$. (Hinweis: Rekursiv, nach Stufe der Terme.)

   (c) Die Aussage aus Teilaufgabe (b) weist die Termalgebra als universelles Objekt in einer geeigneten Kategorie aus. In welcher? (Was sind die Objekte, was die Morphismen und was die Komposition in dieser Kategorie?)

   (d) Falsche Aussage: Seien $\mathcal{V}$ eine Varietät, $\mathfrak{A} = (A, \Omega^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \Omega^{\mathfrak{B}})$ Algebren vom Typ τ, $\mathfrak{A} \in \mathcal{V}$ und $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus. Dann ist stets auch $\mathfrak{B} \in \mathcal{V}$.
   Unzureichende Argumentation: Sei $\mathcal{V}$ durch eine Menge Γ von Gesetzen definiert. Zu zeigen ist, dass jedes Gesetz $\gamma = (t_1, t_2) \in \Gamma$ auch in $\mathfrak{B}$ gilt. Sei dazu $\beta : X \to B$ eine Variablenbelegung aus der Trägermenge B von $\mathfrak{B}$. Dazu wählen wir eine Variablenbelegung $\alpha : X \to A$ aus der Trägermenge A von $\mathfrak{A}$ mit $f \circ \alpha = \beta$. Weil $\mathfrak{A}$ in $\mathcal{V}$ liegt, gilt $\overline{\alpha}(t_1) = \overline{\alpha}(t_2)$. Die Abbildungen $\overline{\beta} = \overline{f \circ \alpha}$ und $f \circ \overline{\alpha}$ sind Homomorphismen von $\mathfrak{T}$ nach $\mathfrak{B}$, die auf dem Erzeugendensystem X von $\mathfrak{T}$ übereinstimmen, also stimmen sie überhaupt überein. Daraus folgt

   $$\overline{\beta}(t_1) = \overline{f \circ \alpha}(t_1) = (f \circ \overline{\alpha})(t_1) = f(\overline{\alpha}(t_1)) = f(\overline{\alpha}(t_2)) = (f \circ \overline{\alpha})(t_2) = \overline{f \circ \alpha}(t_2) = \overline{\beta}(t_2),$$

   was zu zeigen war.
   Geben Sie konkrete $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, f und $\mathcal{V}$ an, die als Gegenbeispiel zur falschen Aussage dienen können, identifizieren Sie die Lücke in der unzureichenden Argumentation und nennen Sie eine (möglichst wenig einschränkende) zusätzliche Voraussetzung, unter der die falsche Aussage zu einer wahren wird.

2. Sei $\mathfrak{R} = (R, +, 0_R, -, \cdot, 1_R)$ ein Ring mit Einselement. Ein Beispiel von besonderem Interesse sind die ganzen Zahlen $\mathfrak{Z} := (\mathbb{Z}, +, 0, -, \cdot, 1)$. Weiters bezeichne $\varphi_{\mathfrak{R}} : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{R}$ einen Homomorphismus.

   (a) Verwenden Sie eine in Aufgabe 1 erwähnte und auch verwendete Aussage, um zu begründen, warum $\varphi_{\mathfrak{R}}$ für jedes $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmt ist.

   (b) Welche Teilmengen von $\mathbb{Z}$ treten als Kerne $\ker \varphi_{\mathfrak{R}} := \varphi_{\mathfrak{R}}^{(-1)}(0_R)$ auf, wenn $\mathfrak{R}$ die Klasse aller Ringe mit Einselement durchläuft?

   (c) Das homomorphe Bild $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}} := \varphi_{\mathfrak{R}}(\mathbb{Z}) \leq \mathfrak{R}$ ist ein Unterring von $\mathfrak{R}$. Welche Isomorphietypen treten dabei auf? Klassifizieren Sie gemäß (b).

   (d) Begründen Sie in zwei Teilen, warum der Isomorphietyp in (c) tatsächlich nur von $\ker \varphi_{\mathfrak{R}}$ aus (b) abhängt. Ein Teil Ihrer Argumentation soll einen Satz bemühen, der für beliebige Algebren gilt und in dem Kongruenzrelationen eine wichtige Rolle spielen. Der andere Teil soll von einer Besonderheit von Ringen Gebrauch machen.

3. Bekanntlich ist der Schnitt aller Unterkörper eines beliebigen Körpers K wieder ein Körper, der sogenannte Primkörper P_K. In dieser Aufgabe sei p eine feste Primzahl, die gleichzeitig die Charakteristik aller auftretenden Körper sei.

   (a) Beweisen Sie, dass die Primkörper P_{K_1} und P_{K_2} zweier Körper K_1 und K_2 derselben Charakteristik p isomorph zueinander sind. Hinweis: Sie dürfen eine frühere Aufgabe verwenden.

   (b) Sei der Körper K endlich und K_0 irgendein Unterkörper von K. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl $e > 0$ gibt mit $|K| = |K_0|^e$.

   (c) Sei $n > 0$ eine feste natürliche Zahl und K ein Körper mit $|K| = p^n$ Elementen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei u_m die Anzahl der Unterkörper K_0 von K mit $|K_0| = m$. Wie ergibt sich u_m aus m?

   (d) Zu welchen Folgen $n_1 < n_2 < \ldots$ gibt es einen Körper K, der die Vereinigung endlicher Unterkörper $K_1 < K_2 < \ldots < K$ mit $|K_i| = p^{n_i}$ ist? Welche zusätzliche Eigenschaft der Folge $n_1 < n_2 < \ldots$ ist äquivalent damit, dass K algebraisch abgeschlossen ist?