Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 20.6.2017
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Terminwünsche für die mündlichen Prüfungen können Sie morgen Mittwoch (21.6.) in der Vorlesung (HS 8, 8:45-10:00) deponieren. Die tatsächliche Einteilung wird Ihnen möglichst bald nach Korrektur der schriftlichen Prüfungen über TISS bekanntgegeben werden.

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe). Drei Punkte ... symbolisieren, dass Sie Ihre Eintragung an dieser Stelle machen bzw. beginnen, ein kleiner Kreis $\circ$, dass Sie Zutreffendes ankreuzen sollen.

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie sich, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Summe:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen:

Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe geht es um Grundbegriffe der Linearen Algebra. Gegeben sind die folgende Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wie üblich bezeichnen

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

die kanonischen Basisvektoren.

Teilaufgabe A: Begründen Sie, warum die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ linear abhängig sind.

Teilaufgabe B: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung mit $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{a}$, $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}$ und $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{c}$. Welchen Rang hat f? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie auf die Definition des Ranges Bezug nehmen und eventuell Teilaufgabe A verwenden.

Rang von $f = \ldots$

Begründung: ...

Teilaufgabe C: Wieviele Elemente hat eine beliebige Basis B des Kerns $\ker f$ von f? Geben Sie irgendeine solche Basis B von $\ker f$ an.

$|B| = \ldots$

Nebenrechnung zur Bestimmung einer Basis: ...

Eine Basis ist daher zum Beispiel $B = \ldots$

Teilaufgabe D: Ermitteln Sie die Determinante $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Wenn Sie ohne Rechnung auskommen, begründen Sie dies.

$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \ldots$

Berechnung bzw. Begründung:

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \sin(x^2 + y^2),$$

teilweise eingeschränkt auf verschiedene Definitionsbereichen $D \subseteq \mathbb{R}^2$, außerdem um die Ableitung und Extrema von f.

Für reelles $r \geq 0$ bezeichne $f_r : D_r \to \mathbb{R}$, $f_r(x) := f(x)$, die Einschränkung von f auf die abgeschlossene Kreisscheibe D_r mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius r, also $D_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq r^2\}$, außerdem $W_r := \{f(x, y) : \ (x, y) \in D_r\}$ den Wertebereich von f_r.

Teilaufgabe A: Beschreiben Sie verbal die geometrische Gestalt der Höhenschichtlinien von f und skizzieren Sie die Menge aller Nullstellen von f innerhalb von D_2.

Teilaufgabe B: Geben Sie einen Punkt $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit möglichst kleinem $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= Abstand vom Ursprung) an, wo f ein lokales Maximum annimmt. (Hier ist keine Differentialrechnung nötig. Es genügt, wohlbekannte Eigenschaften der Sinusfunktion zu beachten.)

Nebenrechnung:

Also zum Beispiel $\mathbf{x} = (x, y) = \ldots$

Teilaufgabe C: Der Wertebereich W_0 von f_0 besteht nur aus $f(0, 0) = \sin(0^2 + 0^2) = \sin 0 = 0$. Je größer r, desto größer wird W_r. Ab einem bestimmten r_0 gilt $W_r = [-1, 1]$ für alle $r \geq r_0$. Geben Sie das minimale r_0 mit dieser Eigenschaft an.

$r_0 = \ldots$

Teilaufgabe D: Die Ableitung $f'_{\mathbf{x}_0}$ von f an einer Stelle $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Geben Sie m, n und die Matrixdarstellung von $l = f'_{\mathbf{x}_0}$ an.

$m = \ldots$ $\qquad\qquad$ $n = \ldots$

Nebenrechnung:

Daraus ergibt sich als Matrixdarstellung von $l = f'_{\mathbf{x}_0}$:

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe geht es um Kurvenintegrale über dreidimensionale Vektorfelder der Form

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Teilaufgabe A: Parametrisieren Sie eine spiralförmige Kurve C, die den Punkt $\mathbf{a} := (1, 0, 0)$ mit dem Punkt $\mathbf{b} := (1, 0, 2\pi)$ verbindet und im Grundriss (Orthogonalprojektion auf die x-y-Ebene) die Gestalt eines Kreises mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung hat. Setzen Sie zu diesem Zweck die Kurve C als stetig differenzierbare Funktion

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

an, die auf dem Parameterintervall $[0, 2\pi]$ definiert ist. Sie haben lediglich die stetig differenzierbaren reellen Funktionen $x, y, z : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ anzugeben.

$x(t) := \ldots$ $\qquad$ $y(t) := \ldots$ $\qquad$ $z(t) := \ldots$

Teilaufgabe B: Angenommen, das Vektorfeld $\mathbf{v}$ beschreibt das Gravitationsfeld einer punktförmig gedachten Masse im Koordinatenursprung. Dann weist der Kraftvektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung des Koordinatenursprungs und hat bei geeigneter Wahl der Einheiten die Länge $\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|^{-2}$. Schreiben Sie die Komponentenfunktionen $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ und $w(x, y, z)$ explizit als Funktionen von x, y, z an.

$u(x, y, z) := \ldots$ $\qquad$ $v(x, y, z) := \ldots$ $\qquad$ $w(x, y, z) := \ldots$

Teilaufgabe C: Mit der Interpretation aus Teilaufgabe B und den Bezeichnungsweisen aus Teilaufgabe A kann die erforderliche Arbeit, um eine Einheitsmasse von $\mathbf{a}$ nach $\mathbf{b}$ zu bewegen, durch das Kurvenintegral $\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$ dargestellt werden, das sich auch als gewöhnliches Riemannintegral der Gestalt $-\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$ interpretieren lässt. Geben Sie den zugehörigen Integranden $f(t)$ explizit und in möglichst einfacher Form an.

$\int_C \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \ldots$

Also $f(t) = \ldots$

Teilaufgabe D: Gibt es eine Funktion $F : \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{o}\} \to \mathbb{R}$, so dass jedes Kurvenintegral über das Vektorfeld $\mathbf{v}$ aus Teilaufgabe B entlang einer stetig differenzierbaren Kurve, die $\mathbf{a}$ mit $\mathbf{b}$ verbindet, durch $F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$ gegeben ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

○ Ja $\qquad$ ○ Nein

Begründung:

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit der folgenden Differentialgleichung:

$$(*) : \quad y'' + 2y' + y = 0$$

Teilaufgabe A: Ermitteln Sie irgendeine Lösung von $(*)$, die nicht die Nullfunktion ist.

Allfällige Nebenrechnung:

Eine Lösung $\neq 0$ ist daher $y(x) := \ldots$

Teilaufgabe B: Die Lösungsmenge von $(*)$ ist ein Vektorraum von Funktionen. Geben Sie seine Dimension d an und ermitteln Sie eine Basis aus Lösungen $f_1, f_2, \ldots, f_d$.

$d = \ldots$

Allfällige Nebenrechnung:

Eine Basis ist daher gegeben durch ...

Teilaufgabe C: Ermitteln Sie eine Lösung von $(*)$ für das Anfangswertproblem $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$.

Allfällige Nebenrechnung:

Eine Lösung lautet daher $y(x) = \ldots$

Teilaufgabe D: Gibt es zu jedem Anfangswertproblem $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $(*)$? Wenn ja, ist diese eindeutig?

○ Ja, es gibt stets eine Lösung. ○ Nein, es gibt nicht immer eine Lösung.

Nur anzukreuzen, wenn es eine Lösung gibt:

○ Diese Lösung ist stets eindeutig. ○ Diese Lösung ist nicht immer eindeutig.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.