Mathematik 2 für Bauingenieure

Prüfung am 6.3.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Die mündliche Prüfung findet in der Woche von 16. bis 20.3.2015 statt. Wenn gewisse Zeiten in diesem Intervall für Sie ungünstig sind, können Sie dies hier angeben:

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1, 2, 3 und 4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A, B, C und D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten dürfen Sie jedenfalls zur mündlichen Prüfung antreten.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie dort notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor der Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4: Gesamt:

Protokoll zur mündlichen Prüfung, sonstige Bemerkungen und Gesamtnote:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich durch sogenannte Gedächtnislosigkeit auszeichnen. Zunächst sind gewisse grundlegende Begriffe erforderlich.

Teilaufgabe A: Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|B)$ eines Ereignisses A unter der Bedingung B ist bekanntlich nur für $\mathbb{P}(B) \neq 0$ definiert, und zwar durch $\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Wann nennt man A und B unabhängig? Erklären Sie auch, wie Unabhängigkeit mit bedingter Wahrscheinlichkeit zusammenhängt.

Teilaufgabe B: Wir betrachten nun eine Zufallsgröße X mit Werten ≥ 0, die den Zeitpunkt eines zufälligen, gedächtnislosen Ereignisses angibt. *Gedächtnislos* bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses unabhängig davon ist, wie lange wir schon darauf warten. Als FORMEL:

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X > t_0 + t \,|\, X > t_0) \quad \text{für } t, t_0 \geq 0.$$

Mit F sei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X bezeichnet, also $F(t) := \mathbb{P}(X \leq t)$. Weil das Experiment mit dem Zeitpunkt $t = 0$ beginnt, ist $F(t) = 0$ für alle $t < 0$. Der Einfachheit halber führen wir noch die Notation $g(t) := 1 - F(t)$ ein.

Verwendet man in obiger FORMEL für Gedächtnislosigkeit die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (Teilaufgabe A), ersetzt die Symbolik mit $\mathbb{P}$ durch entsprechende Ausdrücke in F, sodann (in einem zweiten Schritt) in g und formt geeignet um, so erhält man $g(t_0 + t) = g(t_0)g(t)$. Führen Sie jeden dieser Schritte durch.

Teilaufgabe C: Wir übernehmen die Notation aus Teilaufgabe B. Als Verteilungsfunktion ist F monoton wachsend, $g = 1 - F$ daher monoton fallend. Folglich muss g wegen der Funktionalgleichung $g(t_0 + t) = g(t_0)g(t)$ auf $\mathbb{R}^+$ mit einer Exponentialfunktion übereinstimmen, also $g(t) = e^{-\lambda t}$ und $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ mit einer geeigneten Zahl $\lambda > 0$.

Woran erkennt man, dass $\rho(t) := \lambda e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0$ eine zugehörige Dichtefunktion ist?

Teilaufgabe D: Stellen Sie den (vom Parameter λ abhängigen) Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ von X als Integral dar und berechnen Sie diesen. (Hinweis: partielle Integration.)

Aufgabe 2: In dieser Aufgabe geht es um den Zusammenhang des Matrizenkalküls mit linearen Abbildungen. Alle auftretenden Vektorräume sind Standardvektorräume der Gestalt $\mathbb{R}^d$ mit variierender Dimension $d \in \mathbb{N}$. Als Basis wird jeweils die kanonische zugrunde gelegt.

Teilaufgabe A: Die Matrix A mit n Zeilen und m Spalten, $m, n \geq 1$, und den Eintragungen $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n$ Zeilenindex, $1 \leq j \leq m$ Spaltenindex) stelle die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ bezüglich der kanonischen Basis dar. Für die Vektoren $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ (beide in Zeilenschreibweise) gelte $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Wie errechnet sich y_i für einen Index i mit $1 \leq i \leq n$ aus den Komponenten x_j von $\mathbf{x}$ und den Eintragungen $a_{i,j}$ von A?

$y_i = \dots$

Teilaufgabe B: Sei $f : V_1 \to V_2$ eine Abbildung zwischen den Vektorräumen V_1 und V_2. Wann nennt man f linear?

Teilaufgabe C: Angenommen, $f : V_1 \to V_2$ und $g : V_2 \to V_3$ sind lineare Abbildungen ($V_i = \mathbb{R}^{d_i}$, $i = 1, 2, 3$). Rechnen Sie anhand der Definition, die sie in Teilaufgabe B gegeben haben, nach, dass auch die Verknüpfung $h := g \circ f : V_1 \to V_3$ von f und g, definiert durch $h(\mathbf{x}) := g(f(\mathbf{x}))$, linear ist.

Teilaufgabe D: Bei endlichdimensionalen Vektorräumen ist der Zusammenhang aus Teilaufgabe A zwischen linearen Abbildungen und Matrizen ein bijektiver. Folglich müssen auch die Abbildungen f, g und h aus Teilaufgabe C durch Matrizen dargestellt werden. Die Eintragungen der Matrix für $f : V_1 \to V_2$ seien die $b_{j,k}$, für $g : V_2 \to V_3$ die $a_{i,j}$ und für $h : V_1 \to V_3$ die $c_{i,k}$. Die Bereiche der Laufvariablen i, j und k sind dabei $1 \leq k \leq d_1$, $1 \leq j \leq d_2$ und $1 \leq i \leq d_3$. Nach welcher Formel errechnet sich $c_{i,k}$ aus den $a_{i,j}$ und den $b_{j,k}$?

$c_{i,k} = \dots\dots$

Aufgabe 3: In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns u.a. mit Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ und Gradienten $\mathrm{grad}_{\mathbf{x}_0}(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})(\mathbf{x}_0)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Teilaufgabe A: Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$ von f in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ nach dem Vektor $\mathbf{u}$ lässt sich definieren durch

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

Damit die Interpretion als Anstieg von f in Richtung von $\mathbf{u}$ zutrifft, muss eine Voraussetzung an $\mathbf{u}$ gemacht werden. Welche?

Teilaufgabe B: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $\mathbf{xy} \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ (links Skalarprodukt, rechts Produkt der euklidischen Normen) für beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich für $\mathbf{y} \neq 0$ beweisen, indem man den Vektor $\mathbf{z} := \mathbf{x} + r\mathbf{y}$ mit $r := -\frac{\mathbf{xy}}{\|\mathbf{y}\|^2}$ betrachtet, von $0 \leq \|\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{zz}$ ausgeht, die Linearitätseigenschaften des Skalarproduktes ausnützt, wegfallende Terme kürzt und die resultierende Ungleichung geringfügig umformt. Führen Sie diese Schritte aus. (Aus dieser Rechnung kann man übrigens ablesen, dass die Gleichheit $\mathbf{xy} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$ mit einem $c \geq 0$.)

Teilaufgabe C: Angenommen, es existiert die Ableitung $f'_{\mathbf{x}_0}$ von f in $\mathbf{x}_0$. Definitionsgemäß handelt es sich dabei um eine lineare Abbildung $f'_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit gewissen Approximationseigenschaften. Wie hängt für $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ der Wert $f'_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$ dieser Abbildung $f'_{\mathbf{x}_0}$ an der Stelle $\mathbf{u}$ von den partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}_0$ und den Komponenten u_i von $\mathbf{u}$ ab? Als Skalarprodukt welcher Vektoren lässt sich diese reelle Zahl deuten?

Teilaufgabe D: Aus den bisherigen Teilaufgaben folgt die Ungleichung

$$f'_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{u}) = \mathrm{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\,\mathbf{u} \leq \|\mathrm{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\|\|\mathbf{u}\| = \|\mathrm{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)\|.$$

Erklären Sie, wie man daraus mittels Teilaufgabe B ablesen kann, dass der Gradient $\mathrm{grad}_{\mathbf{x}_0}(f)$ von f in $\mathbf{x}_0$ die Richtung maximaler Steigung angibt.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}$. Wir werden sehen, dass das Doppelintegral $I := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ von f über die gesamte Ebene $\mathbb{R}^2$ einen endlichen Wert hat. Deshalb werden wir f nach einer geringfügigen Modifikation als Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung deuten können.

Teilaufgabe A: Sei $0 < c < 1$ und $M_c := \{(x,y) : \; f(x,y) = c\}$. Welche geometrische Gestalt hat M_c?

Teilaufgabe B: Führt man Polarkoordinaten $x = r\cos\alpha$ und $y = r\sin\alpha$ ein und wendet man die Substitutionsregel an, so erhält man für das Integral in der Angabe oben

$$I = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr.$$

Erklären Sie genau, wie man dazu kommt.

Teilaufgabe C: Berechnen Sie I mit Hilfe von Teilaufgabe B. Hinweis: Wieder Substitutionsregel, diesmal aber nur eindimensional, z.B. $r^2 = t$.

Teilaufgabe D: Weil f nur positive Werte annimmt und das Ergebnis aus Teilaufgabe C für I eine endliche Zahl $\neq 0$ ist, gibt es, wenn man die reelle Zahl γ geeignet wählt, ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ (es handelt sich um eine zweidimensionale Normalverteilung), für das $\Omega = \mathbb{R}^2$ die Menge der Elementarereignisse ist und alle Rechtecke $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ in der Ebene die Gleichung

$$\mathbb{P}(R) = \gamma \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$$

erfüllen. Welchen Wert für γ hat man zu nehmen? (Hinweis: Dieser Wert hängt nur von I ab.)

$\gamma := \ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.