Mathematik 1 für Bauingenieure

Prüfung am 12.6.2015
Reinhard Winkler

Name (bitte ausfüllen):

Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Wichtige Hinweise bevor Sie beginnen:

- Die Prüfung besteht aus vier Aufgaben 1,2,3,4, untergliedert in jeweils vier Teilaufgaben A,B,C,D. Zu jeder Teilaufgabe wird maximal ein Punkt vergeben. Ab 8 von 16 möglichen Punkten ist Ihnen eine positive Note sicher.
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Wenn in der Angabe nicht ausdrücklich anders vermerkt, wird zu jeder Teilaufgabe der Punkt (oder Teile eines Punktes) ausschließlich für das vergeben, was Sie unmittelbar neben bzw. unterhalb der Angabe dieser Teilaufgabe niedergeschrieben haben (und nicht unterhalb der horizontalen Trennlinie zur nächsten Teilaufgabe).

  In den meisten Fällen sollte der jeweils vorgesehene Platz für die Lösung der Aufgabe ausreichen. Es lohnt daher, wenn Sie, bevor Sie mit dem Schreiben beginnen, sich vergewissern, dass Sie Ihre Antwort entsprechend kurz fassen können. Sollten Sie längere Nebenrechnungen oder sonstige schriftliche Überlegungen durchführen wollen, stehen Ihnen dafür die beiden letzten Blätter dieses Heftes zur Verfügung. Was immer Sie auf den letzten beiden Blättern notieren, wird bei der Punkteauswertung ignoriert.
- Wenn Sie sich noch vor Ausführung der Details einen Überblick darüber verschaffen, was in den einzelnen Aufgaben und ihren Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

Nur vom Prüfer auszufüllen:

Punkte für Aufgabe 1: Aufgabe 2: Aufgabe 3: Aufgabe 4:

Gesamtpunktezahl:

Note:

Sonstige Bemerkungen:

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe ist die Anzahl von Objekten, die eines von mehreren Merkmalen aufweisen, zu bestimmen, wobei gewisse Informationen vorliegen.

Teilaufgabe A: An einem Ostasieninstitut ist eine freie Stelle neu zu besetzen. Erwünscht sind ausgezeichnete Kenntnisse in wenigstens einer der Sprachen Chinesisch (C), Japanisch (J) und Koreanisch (K). Die Anzahl jener Personen, die sich beworben haben und wenigstens eine dieser Sprachen beherrschen, sei mit n bezeichnet. Folgende Informationen liegen vor: Chinesisch (möglicherweise nicht nur Chinesisch) sprechen 109 Personen, Japanisch 93, Koreanisch 66; sowohl Chinesisch als auch Japanisch (möglicherweise auch Koreanisch) sprechen 47 Personen, sowohl Chinesisch als auch Koreanisch 38, sowohl Japanisch als auch Koreanisch 36; 21 Personen sprechen alle drei Sprachen.

Lässt sich aus diesen Informationen die Zahl n eindeutig gewinnen? Wenn Ihre Antwort auf diese Frage *ja* lautet, geben Sie n auch an. Wenn Ihre Antwort *nein* lautet, geben Sie zwei unterschiedliche Werte $n_1 \neq n_2$ für n an, die mit den angegebenen Informationen verträglich sind.

Teilaufgabe B: Wie Teilaufgabe A, wenn jedoch statt der Information, dass 66 Personen Koreanisch sprechen eine andere Information vorliegt, nämlich, dass 45 Personen nur Chinesisch und keine der anderen beiden Sprachen sprechen.

Teilaufgabe C: Eine der Teilaufgaben A oder B lässt sich deuten als die Bestimmung der Anzahl der Elemente der Vereinigung von drei Mengen – nennen wir sie C, J und K – nach einer allgemeinen kombinatorischen Formel. Ergänzen Sie zu so einer Formel:

$|C \cup J \cup K| = \dots$

Teilaufgabe D: Die Formel aus Teilaufgabe C lässt sich statt für drei Mengen C, J, K allgemeiner auch für Mengen $A_1, \dots, A_k$ mit beliebigem $k \in \mathbb{N}$ formulieren. Wie lautet diese allgemeine Formel?

Aufgabe 2: Gegeben sei das kubische Polynom $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. In dieser Aufgabe geht es um die Nullstellen von f und, damit zusammenhängend, um eine Faktorisierung von f.

Teilaufgabe A: Es gibt ein Polynom g mit $f(x) = (x-2)g(x)$. Begründen Sie dies, ohne g explizit (etwa durch Polynomdivision) auszurechnen.

Teilaufgabe B: Berechnen Sie das Polynom g aus Teilaufgabe A.

Teilaufgabe C: Gibt es lineare reelle Polynome g_1 und g_2 mit $g_1 g_2 = g$ für das g aus Teilaufgaben A und B? Wenn ja, geben Sie solche an; wenn nein, begründen Sie dies.

Teilaufgabe D: Gibt es lineare komplexe Polynome g_1 und g_2 mit $g = g_1 g_2$? Wenn ja, geben Sie solche an; wenn nein, begründen Sie dies.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^x$. In dieser Aufgabe geht es um die Ableitung von f und um das Verhalten in der Nähe von 0.

Teilaufgabe A: Geben Sie eine Funktion g an mit $f(x) = e^{g(x)}$ für alle $x > 0$ und berechnen Sie $f'(x)$:

$g(x) := \ldots\ldots$

$f'(x) := \ldots\ldots$

Teilaufgabe B: Berechnen Sie:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \ldots\ldots$

Teilaufgabe C: Berechnen Sie:

$\lim_{x \to 0} f'(x) = \ldots\ldots$

Teilaufgabe D: Fertigen Sie eine schematische, aber doch möglichst aussagekräftige Skizze von f an, in der insbesondere eine lokale Extremstelle x_0 von f abzulesen ist. Die Dezimaldarstellung der Zahlen x_0 und $f(x_0)$ müssen Sie nicht ausrechnen. Es genügt, wenn aus der Skizze hervorgeht, zwischen welchen ganzen Zahlen x_0 und $f(x_0)$ liegen, und wo f welches Monotonieverhalten aufweist.

Aufgabe 4: Die Ableitung der differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ für alle x.

Teilaufgabe A:

Begründen Sie, warum das Riemannintegral $\int_0^4 f(x)\,dx$ existiert. Es genügt, wenn Sie eine Eigenschaft E von f nennen, die aus der Voraussetzung folgt und ihrerseits Integrierbarkeit garantiert.

Teilaufgabe B:

Die Zerlegung Z des Integrationsintervalls $[0, 4]$ aus Teilaufgabe A bestehe aus den Punkten $x_i = \frac{i}{2}$, $i = 0, 1, \ldots, 8$. Die Differenz $\Delta := O(f, Z) - U(f, Z)$ zwischen Obersumme $O(f, Z)$ und Untersumme $U(f, Z)$ hängt natürlich von der speziellen Wahl von f ab. Die Voraussetzung $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ garantiert aber, dass Δ nicht zu groß sein kann. Geben Sie eine optimale, d.h. möglichst kleine Schranke ε für diese Differenz an. Mit anderen Worten: Was ist das minimale ε, das für jedes f mit den Eigenschaften aus der Angabe die Ungleichung

$$O(f, Z) - U(f, Z) \leq \varepsilon$$

erfüllt? (Eine Skizze, wie sie in Teilaufgabe D anzufertigen ist, kann die Situation veranschaulichen.)

$\varepsilon = \ldots\ldots$

Teilaufgabe C:

Begründen Sie, warum für das von Ihnen in Teilaufgabe B angegebene ε und ein beliebiges f wie in der Angabe tatsächlich stets $O(f, Z) - U(f, Z) \leq \varepsilon$ gilt?

Teilaufgabe D:

Begründen Sie, warum ε in Teilaufgabe B nicht kleiner gewählt werden kann, indem Sie ein f wie in der Angabe finden, für das $O(f, Z) - U(f, Z) = \varepsilon$ gilt. Illustrieren Sie die Situation auch anhand einer Skizze.

$f(x) := \ldots\ldots$

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.

Raum für Nebenrechnungen und sonstige Notizen, die bei der Beurteilung ignoriert werden.