Mathematik 1 für Bauingenieure, Prüfung am 13.6.2014, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.

1. Bei unendlichen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit Gliedern $a_n \in \mathbb{R}$ geht es um den Grenzwert s der Partialsummen $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

   (a) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit einem Wert $s \in \mathbb{R}$, so bedeutet dies explizit: *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein ... derart, dass für alle ... die Ungleichung ... $< \varepsilon$ gilt.* Vervollständigen Sie diese Aussage.

   (b) Die explizite Bestimmung der Partialsummen s_n und somit ihres Grenzwertes s kann schwierig sein. Sind die a_n gebrochen rationale Ausdrücke in n, so führt in vielen Fällen eine Partialbruchzerlegung zum Ziel. Wie lautet die Partialbruchzerlegung von a_n im Fall $a_n = \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n(n+2)}$?

   (c) Angenommen, die Glieder a_n einer (zunächst beliebigen Reihe) lassen sich als Differenz von geeigneten Gliedern b_n als $a_n = b_n - b_{n+2}$ schreiben, so zeigt sich $s_1 = b_1 - b_3$, $s_2 = a_1 + a_2 = b_1 - b_3 + b_2 - b_4$, $s_3 = s_2 + a_3 = s_2 + b_3 - b_5 = b_1 + b_2 - b_4 - b_5$ und allgemein die Formel $s_n = b_1 + b_2 - b_{n+1} - b_{n+2}$ für $n = 3, 4, \ldots$. Ein strenger Beweis dieser Formel für $n \geq 3$ kann mittels vollständiger Induktion erfolgen. Der Induktionsanfang ist durch obige Gleichung für s_3 bereits erledigt. Die Induktionsannahme besteht in der Gültigkeit der behaupteten Formel für s_n, wobei n an dieser Stelle ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ ist, von dem aber neben der Induktionsannahme nur $n \geq 3$ bekannt ist. Wie lautet dann die Induktionsbehauptung?

   (d) Der Induktionsschritt in (c) besteht im Nachweis, dass (für eine beliebige natürliche Zahl $n \geq 3$) aus der Induktionsannahme die Induktionsbehauptung folgt. Führen Sie diesen Schritt durch. Markieren Sie dabei deutlich, an welcher Stelle Sie die Induktionsannahme verwenden.

   (e) Die Methode aus (c) lässt sich in Verbindung mit (b) auf die Glieder $a_n = \frac{1}{n^2+2n}$ anwenden. Welche Werte für s_n und s ergeben sich daraus?

   (f) Mit Hilfe des sogenannten Majorantenkriteriums lässt sich aus dem Bisherigen, wenn auch nicht der Wert, so doch die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ folgern. Wie? (Anleitung: Begründen Sie zunächst $a_n \geq \frac{1}{(n+1)^2}$ und schließen Sie damit weiter.)

2. In dieser Aufgabe ist jeweils anzugeben, ob eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in den Punkt 0 stetig fortgesetzt werden kann. Wenn ja, so ist darüber hinaus jener Wert $f(0)$, für den f stetig wird, anzugeben; wenn nein, so ist die Situation mit einer Skizze zu illustrieren.

   (a) $f(x) = \sin x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (c) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (d) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

   (e) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, bestehend aus allen positiven reellen Zahlen. Bekanntlich ist f auf ganz D stetig und hat $F(x) = \ln x$ als eine Stammfunktion. In dieser Aufgabe geht es um die Approximation von f durch die Funktion $g(x) = \frac{1}{n}$, wobei zu vorgegebenem x die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so gewählt sei, dass $x < n \leq x + 1$.

   (a) Skizzieren Sie die Funktionen f und g in einer gemeinsamen Skizze.

   (b) Begründen Sie die Ungleichung $f(x + 1) \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ der harmonischen Reihe lassen sich mit Hilfe von Integralen über die Funktion g schreiben, genauer: $s_n = \int_0^{x_n} g(x)\, dx$ mit geeigneten Integrationsgrenzen x_n. Wie sind die x_n zu wählen?

   (d) Zusammen mit (b) kann man aus (c) für s_n die untere Schranke $\ln(n+1) \leq s_n$ herleiten. Wie?

   (e) Wie lässt sich aus obigen Überlegungen und Kenntnis der Funktion ln schließen, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert?

4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\text{G:} \quad y' = xy + x$$

   für die Funktion $y = y(x)$.

   (a) Aus welchen Funktionen y besteht die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Gleichung Ghom: $y' = xy$?

   (b) Im Zuge der Methode der Variation der Konstanten verwendet man den Ansatz $y(x) = c(x)g(x)$, wobei $g(x)$ eine Lösung der homogenen Gleichung Ghom aus (a) ist. Daraus lässt sich für eine Lösung y der ursprünglichen Gleichung G eine explizite Darstellung von $c'(x)$ ermitteln. Tun Sie das für das vorliegende Beispiel.

   (c) Bestimmen Sie daraus durch Integration die Funktion $c(x)$ bis auf eine additive Konstante c_0.

   (d) Unterliegt die gegebene Differentialgleichung zusätzlich einer Nebenbedingung, etwa $y(0) = 1$, so ist dadurch die Konstante c_0 aus (c) und somit die Lösung der Differentialgleichung G eindeutig bestimmt. Ermitteln Sie diese Lösung.