Mathematik 1 für Bauingenieure, Prüfung am 17.1.2014, Winkler

Name, Matrikelnummer (bitte ausfüllen):

Hinweise bevor Sie beginnen:
Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
Ihre Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe.
Häufig ist die Angabe deutlich länger als die Lösung. Wenn Sie sich bei jeder Aufgabe noch vor dem Studium der Details einen Überblick verschaffen, was in den einzelnen Teilen zu tun ist, kann das hilfreich für eine kluge Zeiteinteilung sein.

1. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, seien die Zahlen

$$a_n := \frac{1}{n^2} \quad \leq \quad A_n := \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

gegeben. Außerdem schreiben wir $s_n := \sum_{k=2}^{n} a_k$ und $S_n := \sum_{k=2}^{n} A_k$.

   (a) Die Summen S_n konvergieren gegen einen Grenzwert $S \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie S.

   (b) Wegen (a) gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|S_n - S| < \frac{1}{5}$ für alle $n \geq n_0$. Geben Sie ein konkretes n_0 mit dieser Eigenschaft an.

   (c) Gibt es auch ein $s \in \mathbb{R}$ und einen Index $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - s| < \frac{1}{5}$ für alle $n \geq n_1$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes n_1 mit dieser Eigenschaft an; wenn nein, begründen Sie dies.

   (d) Ersetzt man a_n durch $a'_n := (-1)^n a_n$, so erhält man statt der s_n Zahlen, die wir mit s'_n bezeichnen und die gegen ein $s' := \lim_{n\to\infty} s'_n \in \mathbb{R}$ konvergieren. Wie muss $k \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit $\frac{k}{25} \leq s' < \frac{k+1}{25}$ gilt? (Hinweis: Für $\frac{k}{25}, k \in \mathbb{N}$, erhält man die Werte $0, 0.04, 0.08, 0.12, 0.16, 0.20, 0.24, \ldots$.)

   (e) Aus welchem allgemeinen Satz kann die in Teil (d) behauptete Existenz von s' gefolgert werden? (Formulierung, nicht nur Bezeichnung des Satzes! Es gibt mehr als eine korrekte Antwort.)

2. Gegeben sei die Funktion, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := |x| \cdot x$.

   (a) Skizzieren Sie f im Bereich $[-2, 2]$.

   (b) Sei $x \neq 0$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ existiert die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ und welchen Wert hat sie? Anleitung: Unterscheiden Sie die Fälle $x > 0$ und $x < 0$.

   (c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ existiert die n-te Ableitung $f^{(n)}(0)$ und welchen Wert hat sie?

   (d) Eine Wendestelle x_0 einer Funktion g ist eine solche, wo, anschaulich gesprochen, der Funktionsgraph die Seite der Tangente wechselt. Eine strenge Definition ist möglich, sofern f stetig und in x_0 differenzierbar ist (die zweite Ableitung ist dazu nicht erforderlich): Ist $t(x) := g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$ die Tangente (lineare Approximation) an g in x_0, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(g(x_0 - \delta) - t(x_0 - \delta))(g(x_0 + \delta) - t(x_0 + \delta)) < 0$ für alle positiven $\delta < \varepsilon$. (Diese Ungleichung beschreibt den Seitenwechsel bei x_0.)

   Hat f eine Wendestelle in diesem Sinn? (Begründung und gegebenenfalls Angabe des entsprechenden x_0.)

   (e) Angenommen eine Funktion g hat eine Wendestelle in x_0 im Sinn von (d) und ist dort zweimal differenzierbar. Was lässt sich dann über $g''(x_0)$ aussagen?

3. Wir betrachten Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, über die wir Annahmen wie $f'_{n+1} = f_n$ machen.

   (a) Sei jetzt $f_0(x) = 0$ die Nullfunktion. Was lässt sich über f_1 sagen, wenn die Beziehung $f'_1 = f_0$ bekannt ist, was über f_2, wenn außerdem die Beziehung $f'_2 = f_1$ bekannt ist?

   (b) Beschreiben Sie die Menge F_n aller Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren n-te Ableitung $f_n^{(n)} = 0$ die Nullfunktion ist.

   (c) Angenommen, zu einem gewissen vorgegebenen $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt es ein f_1 mit $f'_1 = f_0$. Ist damit garantiert, dass es eine Folge von Funktionen $f_2, f_3, \ldots$ gibt mit $f_n^{(n)} = f_0$? (Begründung)

   (d) Angenommen $f'_1 = f_0$ und $a < b \in \mathbb{R}$. Welche geometrische Bedeutung hat dann $f_1(b) - f_1(a)$? Illustrieren Sie Ihre Antwort mit einer Skizze für ein geeignetes $f_0 > 0$.

   (e) Angenommen $f_0(x) = x \cos x^2$. Finden Sie ein f_1 mit $f'_1 = f_0$.

4. Für eine beliebige natürliche Zahl n definieren wir $a_n := 2^{-n}$, $b_n := 1 - 2^{-n}$ und $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. Mit T sei die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet, für die die Gleichung $s_n = b_n$ gilt.

   (a) Die Rechnung

   $$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = b_n + 2^{-(n+1)} = 1 - 2^{-n} + 2^{-(n+1)} = 1 - 2^{-(n+1)} = b_{n+1}$$

   zeigt, dass die Menge T für alle $n \in \mathbb{N}$ eine bestimmte Implikation erfüllt. Welche?

   (b) Wegen $b_0 = s_0 = 0$ ist $0 \in T$. Zusammen mit Teil (a) folgt damit aus einem wichtigen, die natürlichen Zahlen betreffenden Prinzip P, eine Aussage über T. Welche Aussage?

   (c) Wie heißt und wie lautet das in (b) verwendete Prinzip P?

5. Im nachfolgenden Absatz wird eine mathematische Überlegung angestellt. In ihrem Verlauf wird eine Eigenschaft $E(\mathbb{R})$ der reellen Zahlen verwendet, nach der in (a) gefragt wird, und ein Satz bewiesen, um den es in Teilfrage (b) geht.

   Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Bekanntlich heißt f beschränkt auf $[a, b]$, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in [a, b]$. Wir wollen nun annehmen, dass f stetig ist. Sei A die Menge aller $x \in [a, b]$ mit der Eigenschaft, dass f auf $[a, x]$ beschränkt ist, und $B := [a, b] \setminus A$ der Rest von $[a, b]$. Offenbar folgt aus $x \in A$ stets $[a, x] \subseteq A$ und aus $x \in B$ entsprechend $[x, b] \subseteq B$. Sicher ist $a \in A$. Wir zeigen nun, dass B leer ist. Denn andernfalls wäre sicher $b \in B$ und, als Folgerung aus einer wichtigen Eigenschaft $E(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$, gäbe es dann ein $x_0 \in [a, b]$ derart, dass $x \in A$ für alle $x \in [a, b]$ mit $a < x_0$ und $x \in B$ für alle $x \in [a, b]$ mit $x > x_0$. Weil f stetig ist, insbesondere an der Stelle x_0, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x)| < |f(x_0)| + 1$ für alle $x \in [a, b]$, die zusätzlich $|x - x_0| \leq \delta$ erfüllen. Folglich ist f auf $[a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ beschränkt, ebenso auf $[a, x]$ für jedes $x \in [a, x_0)$, also auch (man wähle ein $x \geq x_0 - \delta$) auf der Vereinigung $[a, x_0 + \delta]$, solange $x_0 + \delta \leq b$. Wäre $x_0 < b$ widerspräche das aber der Konstruktion von x_0.

   (a) Um welche Eigenschaft $E(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$ handelt es sich? (Bezeichnung und Formulierung)

   (b) Die angegebene Überlegung zeigt einen Satz folgender Struktur: *Jede auf einer Definitionsmenge D der Gestalt G definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $E_1(f)$ hat notgedrungen auch die Eigenschaft $E_2(f)$.* Geben Sie $G, E_1(f)$ und $E_2(f)$ an.