Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 25.6.2010 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. (a) Definieren Sie, was es bedeutet, dass $a \in \mathbb{Z}$ Teiler von $b \in \mathbb{Z}$ ist, symbolisch $a|b$.
   (b) Bestimmen Sie die Menge $T(60)$ aller positiven Teiler von 60.
   (c) Zeichnen Sie das Hassediagramm der Halbordnung $(T(60), |)$.
   (d) Lesen Sie aus (c) das Infimum der Menge $\{12, 15\}$ ab und erklären Sie dessen zahlentheoretische Bedeutung in der vorliegenden Halbordnung.

2. Seien A und B disjunkte Mengen und $V = A \cup B$. Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge E heißt **bipartit** (bezüglich A, B), wenn für jede (ungerichtete) Kante $\{a, b\} \in E$ einer der beiden Knoten a, b in A liegt, der andere in B. Der Graph G heißt **vollständig bipartit** (bezüglich A und B), wenn E alle Kanten $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ enthält.

   (a) Sei $|A| = 4$ und $|B| = 3$ und G vollständig bipartit. Bestimmen Sie $|E|$. (Skizze!)
   (b) Wie (a), nur für beliebige Zahlen $m = |A|$ und $n = |B|$; d.h.: geben Sie eine Formel für $|E|$ in m und n an.
   (c) Sei nun $|A| = 3$ und $|B| = 2$. Wie viele verschiedene bipartite Graphen $G = (V, E)$ (bezüglich A und B, $A \cup B = V$) gibt es?
   (d) Wie (c), nur für beliebige Zahlen $m = |A|$ und $n = |B|$.

3. Seien $A = (a_{ij})$ eine reelle Matrix mit n Zeilen $z_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$, $i = 1, \dots, n$, und m Spalten sowie $b \in \mathbb{R}^n$ ein Spaltenvektor. Weiters sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ die bezüglich der kanonischen Basis durch A dargestellte lineare Abbildung.

   (a) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungen genau jene Vektoren $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ sind, für die $f(x) = b$ gilt.

   (b) Sei $a_{11} \neq 0$. Wie kann man die a'_{ij} und b'_i aus den a_{ij} und b_i erhalten, so dass für die Matrix $A' = (a'_{ij})$ und den Spaltenvektor $b' = (b'_1, \dots, b'_n)$ gilt: $\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = b\} = \{x \in \mathbb{R}^m : A'x = b'\}$ und $a'_{i1} = 0$ für $i = 2, \dots, n$.

   (c) Sei $m = n$, $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (Halbdiagonalform) und $a_{ii} \neq 0$. Weiters sei $Ax = b$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$. Wie errechnet sich x_n aus den b_i und a_{ij}?

   (d) Wie (c), nur für x_{n-1} statt x_n.

4. Bezeichne $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen.

   (a) Wann heißt a Grenzwert von x, wann Häufungspunkt?

   (b) Gibt es ein x und ein a derart, dass a Grenzwert und kein Häufungspunkt von x ist? (Beispiel oder Begründung)

   (c) Sei nun $x_n = \sin \alpha n$. Geben Sie die Menge M aller $\alpha \in \mathbb{R}$ an, für die x einen Grenzwert besitzt. Welchen?

   (d) Wählen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, für das x aus (c) keinen Grenzwert aber Häufungspunkte besitzt. Welche?

5. Für eine reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien die Funktionen f_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, definiert durch $f_1(x) = f(x) + \frac{\pi}{2}$, $f_2(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$, $f_3(x) = 3f(x)$, $f_4(x) = f(3x)$, $f_5(x) = f(x)^2$ und $f_6(x) = f(x^2)$.

   (a) Skizzieren Sie die f_i für $f(x) = \sin x$.

   (b) Wie ist allgemein die Ableitung $f'(x_0)$ definiert?

   (c) Drücken Sie für $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ die Ableitungen $f'_i(x)$ durch f' und f aus (f beliebig, aber differenzierbar).

   (d) Gibt es ein f mit $f_5(x) = \sin x$? (Begründung)