Analysis 1 für Lehramt, schriftliche Prüfung am 8.5.2009, Winkler

Name, Matrikelnummer:

Mündliche Prüfung vereinbart für:

Hinweise, bevor Sie beginnen:

- Rückseite nicht vergessen!
- Die angegebene Reihenfolge der Teilfragen innerhalb eines Beispiels ist empfehlenswert, muss aber nicht eingehalten werden.
- Die einzelnen Teilfragen haben ungefähr gleiches Gewicht.
- Ihre Arbeitszeit beträgt 100 Minuten.

1. Mathematische Formelsprache und Zahlenbereiche:

   (a) Was ist das kartesische Produkt $X \times Y$, was eine Relation R zwischen den Mengen X und Y, was eine binäre Relation auf einer Menge X? (Der Begriff des geordenten Paares (x, y) darf vorausgesetzt werden.) Was meint man in diesem Zusammenhang mit der Schreibweise xRy?

   (b) Sei R eine binäre Relation auf $X \neq \emptyset$. Offenbar gibt es vier Formeln der Bauart
   $$Q_1 \ x \in X \ Q_2 \ y \in X : \ xRy,$$
   wenn für die beiden Symbole Q_1 und Q_2 jeweils einer der beiden logischen Quantoren $\forall$ und $\exists$ gesetzt werden darf. Sei nun $X \neq \emptyset$. Nummerieren Sie die vier Formeln so, dass die Implikationskette $1 \to 2 \to 3 \to 4$ für jedes symmetrische R gilt.

   (c) In 1b stehe nun xRy für die (nicht symmetrische) Relation $x > y$, weiters sei X einer der vier Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$. Stellen Sie eine 4×4-Tabelle auf, in der Sie eintragen, welche der Formeln 1,2,3,4 für welche Wahlen von $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ wahr sind.

2. Mächtigkeit von Mengen:

   (a) Sei M die Menge aller Folgen $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ mit $a_n \in \{0, 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist $f : M^2 \to M$, $((a_n), (b_n)) \mapsto (a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots)$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Welche Gleichung oder Ungleichung folgt daraus für $|M|$ und $|M^2|$?

(b) Verschärfen Sie die offensichtliche Ungleichungskette $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}| \leq |\mathbb{C}|$ zu einer korrekten Aussage, in der statt des Zeichens $\leq$ nur mehr die Zeichen $<$ und $=$ vorkommen. (Anleitung: Für die Frage, ob $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$ oder $|\mathbb{R}| < |\mathbb{C}|$ gilt, dürfen Sie verwenden, dass die Menge M aus 2a $|M| = |\mathbb{R}|$ erfüllt.)

3. Topologie

   (a) Geben Sie alle Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ an mit $\overline{A} = A^o$.

   (b) Geben Sie zwei Beispiele von Mengen $A \subseteq \mathbb{R}$ an mit $\overline{A} = \mathbb{R}$ und $A^o = \emptyset$.

   (c) Gibt es eine Menge wie in 3b, die zusätzlich offen oder abgeschlossen ist? (Begründung)

4. Folgen und Reihen

   (a) Geben Sie je eine beschränkte und eine unbeschränkte reelle Folge an, die genau die Zahlen -1 und 1 als Häufungspunkte hat.

   (b) Was sind für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, die Glieder, was die Partialsummen, was der Wert der Reihe?

   (c) Geben Sie die Glieder a_n einer Reihe an, deren Partialsummen als Folge genau die Zahlen -1 und 1 als Häufungspunkte hat.

   (d) Wie sind die c_n im Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ von zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ definiert?

   (e) Erklären Sie sorgfältig, welche Rolle absolute Konvergenz im Zusammenhang mit 4d spielt.

   (f) In 4d sei $a_n = 0$ für $n \geq 2$ und $b_n = 0$ für $n \geq 1$. Welches elementare arithmetische Gesetz entspricht dem Sachverhalt, um den es in Frage 4e geht?

5. Stetigkeit

   (a) Formulieren Sie zwei äquivalente Aussagen, die beide ausdrücken, dass die reelle Funktion f stetig im Punkt x_0 ist. (Anleitung: ε-δ-Kriterium und Folgenstetigkeit)

   (b) Beweisen Sie eine der beiden Implikationen aus 5a.

   (c) Beweisen Sie die andere Implikation aus 5a.

   (d) Was fällt Ihnen zum Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ein? (Eine richtige Aussage – Definition oder Satz – genügt.)

   (e) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die genau an den ganzen Zahlen unstetig ist, sonst stetig.

   (f) Geben Sie eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die genau an den ganzen Zahlen stetig ist, sonst unstetig.