

Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 10.10.2008 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Gelten folgende Formeln? Geben Sie jeweils eine verbale Begründung.

- (a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : x < y$
- (b) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} : x < y$
- (c) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} : y < x$
- (d) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : y < x$

2. Bezeichne $G = (V, E)$ einen gerichteten Graphen, V die Knoten-, $E \subseteq V^2$ die Kantenmenge. Definitionsgemäß heißen zwei gerichtete Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$, isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit: $(x, y) \in E_1$ (d.h. die Knoten x und y sind in G_1 durch eine Kante verbunden) genau dann, wenn $(f(x), f(y)) \in E_2$ (d.h. wenn auch $f(x)$ und $f(y)$ in G_2 durch eine Kante verbunden sind).

- (a) Skizzieren Sie zwei gerichtete Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ mit $|V_i| = 6$ ($i = 1, 2$), die nicht isomorph sind.
- (b) Begründen Sie, warum Ihre Beispiele aus (a) tatsächlich nicht isomorph im Sinne obiger Definition sind.
- (c) Wieviele Kanten muss ein stark zusammenhängender gerichteter Graph mit sechs Knoten mindestens haben, wieviele ein zusammenhängender ungerichteter Graph?
- (d) Begründen Sie Ihre Antwort aus (c).

3. Wir betrachten Systeme von drei Ebenengleichungen $f_i(x, y, z) = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z = b_i$ mit Lösungsmengen $L_i \subseteq \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$. Geben Sie jeweils eine Systemmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten a_{ij} und b_i aus \mathbb{R} so an, dass die L_i folgende Lage zueinander haben:

- (a) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \{(1, 1, 1)\}$.
 - (b) $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3$ ist die z -Achse.
 - (c) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$, und alle drei Schnitte $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$ und $L_2 \cap L_3$ sind eindimensional und parallel zur z -Achse.
 - (d) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ und $L_1 \cap L_3 \neq \emptyset \neq L_2 \cap L_3$.
4. (a) Was bedeutet für reelle Zahlen a und a_n ($n \in \mathbb{N}$) die Beziehung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$? (Vollständige ε -Definition!)
- (b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche Eigenschaft muss f haben, damit für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ folgt? (Nicht nur Schlagwort, sondern vollständige ε - δ -Definition!)
- (c) Wählen Sie f , a und a_n so, dass die Implikation in (b) falsch ist.
- (d) In (b) sei nun $f(x) = x^3$ und $a = 1$. Geben Sie ein $\delta > 0$ an derart, dass für $U = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ und $V = (1 - \delta, 1 + \delta)$ gilt $f(V) \subseteq U$.
5. Gegeben sei die Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
- (a) Wie ist der Konvergenzradius r von f definiert? (Definition, nicht Formel!)
 - (b) Mit welcher Formel lässt sich der Konvergenzradius r direkt aus den a_n berechnen?
 - (c) Finden Sie eine Folge von Koeffizienten a_n derart, dass sich der Konvergenzradius $r = 2$ ergibt.
 - (d) Wie müssen die a_n lauten, damit $f(0) = 1$ und $f'(x) = -f(x)$ gilt?