Mathematik 1 für Informatiker und Wirtschaftsinformatiker
Prüfung am 25.4.2008 (Winkler)

Familienname:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studienkennzahl:

Vergessen Sie nicht auf die Rückseite der Angabe!

1. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 4 + 3i$.

   (a) Erklären Sie die Polardarstellung komplexer Zahlen am Beispiel z_1 geometrisch.

   (b) Führen Sie die Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ geometrisch, d.h. in Form einer Skizze aus.

   (c) Was versteht man unter der Konjugierten $\overline{z}$ einer komplexen Zahl z formal wie geometrisch? (Skizze für $z = z_1$.)

   (d) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

2. Bei einer schriftlichen Prüfung treten k Personen an. Es steht eine lange Bank mit n (der Reihe nach durchnummerierten) Sitzen nebeneinander zur Verfügung. Die Sitze müssen so belegt werden, dass zwischen zwei Personen jeweils zwei freie Plätze bleiben. Eine erlaubte Belegung B soll also aufgefasst werden als eine Menge $B = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $b_{i+1} > b_i + 2$.

   (a) Wie groß muss (zu gegebenem k) n mindestens sein, damit eine erlaubte Belegung existiert?

   (b) Bezeichne $M(t, m)$, $t, m \in \mathbb{N}$, die Menge aller t-elementigen Teilmengen einer m-elementigen Menge ($t, m \in \mathbb{N}$). Wie errechnet sich $|M(t, m)|$? (Unterscheiden Sie die Fälle $t \leq m$ und $t > m$.)

   (c) Wählen Sie t und m geeignet und geben Sie eine Bijektion zwischen der Menge aller erlaubten Belegungen und $M(t, m)$ an.

   (d) Schließen Sie damit auf die Anzahl aller erlaubten Belegungen (unter der Voraussetzung aus (a)).

3. Gegeben sei die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(2,1) \mapsto (-2,4)$ und $(-3,0) \mapsto (0,-6)$.
   (a) Geben Sie eine geometrische Interpretation von f.
   (b) Wie lautet die Matrixdarstellung für f (bezüglich der kanonischen Basis)?
   (c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $f(x,y) = (8,6)$
   (d) Geben Sie sämtliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren von f an (anschauliche Begründung genügt).

4. (a) Wie lautet eine (präzise, nicht nur anschauliche!) Definition dafür, dass eine reelle Funktion f stetig im Punkt x_0 ist.
   (b) Erklären Sie anhand der Definition aus (a), dass die Funktion f, gegeben durch $f(x) = -1$ für $x < 0$, $f(0) = 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ im Punkt $x_0 = 0$ unstetig ist.
   (c) Skizzieren Sie die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ und begründen Sie ihre Stetigkeit unter Bezugnahme auf Sätze der Vorlesung.
   (d) Lässt sich f aus (c) an den Randpunkten 0 und 1 stetig fortsetzen? (Begründung)

5. (a) Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a,b)$ definiert?
   (b) Rechnen Sie die Differentiationsregel $(x^2)' = 2x$ anhand der Definition aus (a) nach.
   (c) Wie lautet die Kettenregel fürs Differenzieren (vollständige Formulierung mit Voraussetzungen, nicht nur Formel)?
   (d) Ist g invers zu f (Differenzierbarkeit vorausgesetzt), so folgt aus $x_0 = g(f(x_0))$ und der Kettenregel offenbar sehr schnell $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. Illustrieren Sie diesen Sachverhalt anhand einer Skizze für $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ auf $(0,1)$ an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$.