MIT FRDL. GEN. VON SVEN GEIER (WWW.SGEIER.NET/FRACTALS/INDEX07.PHP)

MATHEMATIK
ORDNUNG IN DEN UNENDLICHKEITEN

Dass unendlich manchmal nicht gleich unendlich ist, sondern sogar noch viel mehr, wissen Forscher schon lange. Seit Jahrzehnten rätselten sie aber über die Größe von bestimmten uendlichen Mengen. Wie sie nun herausgefunden haben, unterscheiden sie sich alle – und man kann sie ordnen.


ANDRES VILLAVECES

Martin Goldstern (links) und **Jakob Kellner** sind Mathematiker an der Technischen Universität Wien.

⏩ spektrum.de/artikel/1823150

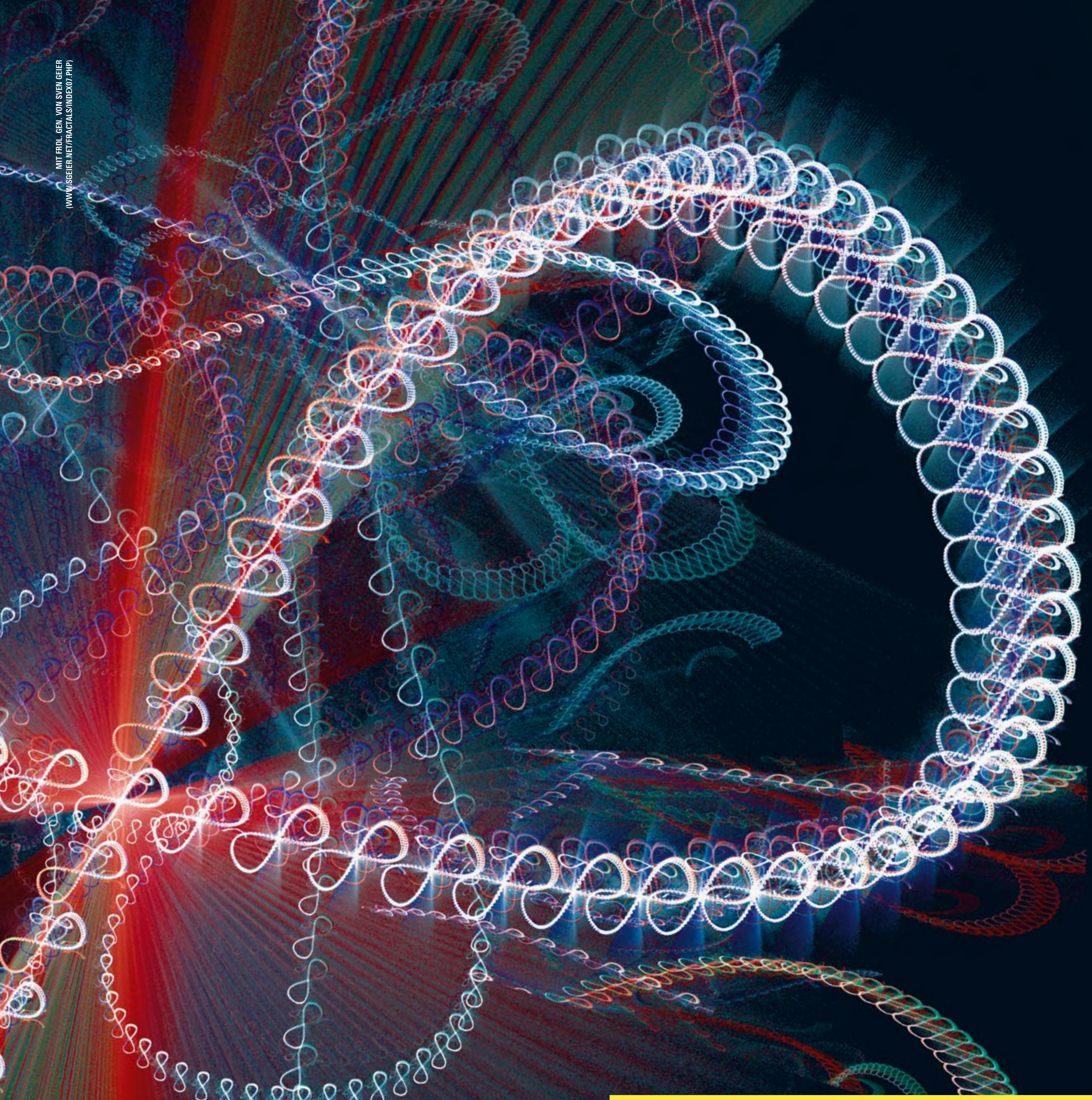
SERIE

Unendlichkeiten

Teil 1: Februar 2021
Das fehlende Puzzleteil
Jean-Paul Delahaye

Teil 2: März 2021
Ordnung in den Unendlichkeiten
Jakob Kellner und Martin Goldstern

Teil 3: April 2021
Eine neue Mathematik der Zeit
Natalie Wolchover



MIT FRDL. GEN. VON SVEN GEIER (WWW.SGEIER.NET/FRACTALS/INDEX07.PHP)

UNVORSTELLBARE GRÖSSEN **Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Mengen zu vermessen. Einige führen zu unerwarteten Ergebnissen.**

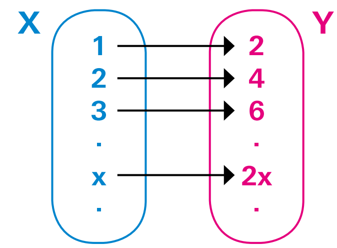
AUF EINEN BLICK
DAS UNVORSTELLBARE VERMESSEN

1 Selbst wenn Mengen unendlich viele Elemente enthalten, können sich ihre Größen unterscheiden.

2 Mathematiker haben zehn unendliche Mengen definiert, die spannende Eigenschaften von reellen Zahlen charakterisieren, konnten sie bislang aber nicht genau vermessen.

3 Wie sich herausstellt, sind die zehn Mengen in bestimmten Fällen alle verschieden und lassen sich der Größe nach ordnen.

BIJEKTION **Um die Größen zweier Mengen miteinander zu vergleichen, kann man eine Abbildung, eine so genannte Bijektion suchen, die jedem Element der einen Menge eines aus der anderen zuordnet.**



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH: HITE (COMMONS.WIKIMEDIA.ORG/WIKI/FILE:APLICACIÓN_2_INYECTIVA_SOBREYECTIVA02.SVG)

Einfache mathematische Konzepte wie das Zählen scheinen in der natürlichen Denkstruktur fest verankert. Wie Studien belegen, verfügen offenbar selbst sehr junge Kinder und Tiere in beschränktem Maß über solche Fähigkeiten. Das ist nicht überraschend, denn das Zählen ist evolutionär gesehen äußerst nützlich – zum Beispiel hilft es abzuschätzen, ob eine verfeindete Gruppe größer als die eigene ist und ob sich ein Angriff oder eher ein Rückzug lohnt.

In den letzten Jahrtausenden hat die Menschheit diese Konzepte auf bemerkenswerte Weise weiterentwickelt: Beginnend mit dem Umgang mit einer Hand voll Objekten stellte man fest, dass sich die Methodik problemlos auf völlig andere Größenordnungen anwenden lässt. Schon bald entstand ein mathematisches Gerüst, mit dem man sowohl riesige Größen wie die Entfernung von Galaxien oder die Anzahl der Elementarteilchen im Universum beschreiben kann, als auch die kaum fassbaren Distanzen im Mikrokosmos, von Atomen bis hin zu Quarks.

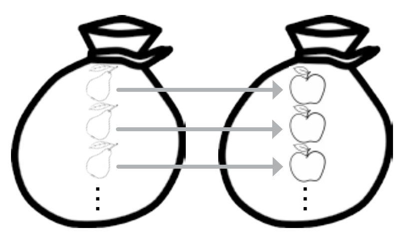
Wir können sogar mit Zahlen hantieren, die alles übersteigen, was nach heutigem Wissen für die Beschreibung des Universums relevant ist: So lässt sich problemlos $10^{10^{100}}$

Äpfel und Birnen

Um herauszufinden, ob ein Sack mit Äpfeln genauso viel Obst enthält wie einer mit Birnen, kann man die einzelnen Früchte zählen. Es gibt aber auch eine andere Methode, um zu das zu prüfen: Man ordnet jedem Apfel eine Birne zu. Wenn es am Ende genau aufgeht und kein Obst mehr übrig ist, dann gibt es in jedem Sack gleich viele Früchte.

Würde man einen Apfel aufessen, dann gäbe es weniger Äpfel als Birnen, die zuvor geschilderte Zuordnung würde nicht mehr funktionieren. Das ist allerdings nur im Endlichen der Fall. Hat man einen Sack mit unendlich vielen Äpfeln, enthält er, nachdem man eine Frucht verspeist hat, immer noch genauso viel Obst. Die ursprüngliche Bijektion funktioniert zwar nicht mehr, aber es gibt eine neue Abbildung.

Erstaunlicherweise fallen einige Berechnungen im Unendlichen einfacher aus als im vertrauten Endlichen. Zum Beispiel ist die Vereinigung zweier unendlicher Mengen X und Y genauso groß wie die größere der beiden. Für endliche Mengen gilt das dagegen nicht: Vereinigt man etwa {1, 2} mit {5, 6} erhält man eine Menge mit vier Elementen. Viele Eigenschaften und Konzepte, die man aus dem Endlichen kennt, sind im Unendlichen nicht mehr gültig. Doch einige Sätze lassen sich glücklicherweise ins Unendliche übertragen: Sind A und B gleich groß und B und C ebenso, dann auch A und C. Ist A kleiner/gleich B und B kleiner/gleich C, dann ist A kleiner/gleich C. Zudem sind A und B gleich groß, wenn A kleiner/gleich B und B kleiner/gleich A.



$\aleph_0$ viele Birnen $\aleph_0$ viele Äpfel

MARTIN GOLDSTERN UND JAKOB KELLNER

Die ersten beiden Punkte lassen sich recht einfach beweisen, aber die dritte Eigenschaft, die auf den ersten Blick offensichtlich erscheint, gestaltet sich etwas schwieriger. Denn kleiner/gleich beschreibt in der Mengenlehre eine Abkürzung für einen komplizierten Sachverhalt, der sich nicht bloß als kleiner oder gleich definieren lässt. Deshalb fällt der Beweis deutlich komplexer aus, wie man an den Arbeiten der deutschen Mathematiker Ernst Schröder und Felix Bernstein aus den 1890er Jahren sehen kann.

Ist es denn immer möglich, zwei Mengen A und B miteinander zu vergleichen? Anders gefragt: Gilt stets entweder $|A| \leq |B|$ oder $|B| \leq |A|$? Um zu beweisen, dass das tatsächlich der Fall ist, kann man wie folgt vorgehen. Man nimmt aus beiden Mengen je ein erstes Element heraus. Anschließend entfernt man je ein weiteres. Das wiederholt man immer weiter, bis einer der folgenden Fälle eintritt: Beide Restmengen sind leer, dann liefert der beschriebene Prozess eine Zuordnung. Dem ersten entfernten Element von A weist man das erste von B zu und so weiter.

Andererseits könnte bloß eine der beiden Mengen (etwa die aus A entstandene) leer sein, die andere aber nicht. Dann gibt es eine Zuordnung von A zu einer Teilmenge von B, somit ist $A \leq B$. Daher sind zwei Mengen immer vergleichbar.

Auch wenn die Idee recht simpel klingt, ist es etwas schwieriger, den Beweis formal zu führen, wie es erst Ernst Zermelo 1904 gelang. Man braucht dabei unter anderem den Begriff der Wohlordnung, der regelt, welches Element der betrachteten Mengen als Nächstes entfernt wird, sowie das so genannte Auswahlaxiom, um zu beweisen, dass es die gewünschte Wohlordnung gibt.

(eine Eins gefolgt von 10^{100} Nullen, wobei 10^{100} 100 Nullen hat) niederschreiben und allerlei Rechnungen damit durchführen. Würde man sie allerdings in der üblichen Dezimalschreibweise darstellen, bräuchte man dafür mehr Elementarteilchen als vermutlich im Universum existieren, selbst wenn man pro Ziffer nur ein Partikel verwendet. Denn Physiker schätzen, dass unser Kosmos weniger als 10^{100} Teilchen enthält.

Aber selbst solche unvorstellbar großen Zahlen sind verschwindend gering verglichen mit unendlichen Mengen, die seit mehr als 100 Jahren einen wesentlichen Teil der Mathematik ausmachen. Mit dem einfachen Zählen von Objekten entsteht die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, die vielen in der Schule begegnet. Doch bereits dieses vermeintlich simple Konzept scheint problematisch: Es gibt keine größte natürliche Zahl, man kann stets weiterzählen und ein größeres Element finden.

Können unendliche Mengen überhaupt existieren? Im 19. Jahrhundert führte die Frage zu vielen Streitigkeiten. Aus philosophischer Sicht lässt sich darüber immer noch diskutieren, in der Mathematik hat es sich dagegen durchgesetzt, die Existenz unendlicher Mengen zu postulieren, das heißt als Grundaussage, die keines Beweises bedarf, anzunehmen (ein so genanntes Axiom).

In der Mengenlehre begnügt man sich nicht, Mengen zu beschreiben. So wie man in der Arithmetik lernt, Zahlen miteinander zu verknüpfen, etwa über Addition oder Multiplikation, lassen sich auch Rechenoperationen für Mengen definieren. Zum Beispiel kann man sie vereinigen (aus {1, 2} und {2, 3, 4} wird {1, 2, 3, 4}) oder schneiden (aus {1, 2} und {2, 3, 4} wird {2}) oder, etwas aufregender, die Potenzmenge bilden: die Familie aller Teilmengen einer Menge.

Größenvergleiche von Mengen

Die Potenzmenge $P(X)$ einer kleinen endlichen Menge X lässt sich einfach berechnen. Für {1, 2} erhält man etwa: $P(\{1, 2\}) = \{\{\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$. Doch $P(X)$ wächst für größere X rapide an; so haben zehnelementige Familien $2^{10} = 1024$ Teilmengen. Wenn man die Potenzmenge einer unendlichen Menge bilden möchte, fordert das unsere Vorstellungskraft stark heraus. Zum Beispiel enthält die Potenzmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die leere Menge, $\mathbb{N}$ selbst, die Menge aller geraden Zahlen sowie der Primzahlen, die Menge aller Zahlen mit Ziffernsumme 2021, {12, 17} und noch ungeheuer viele andere. Wie sich herausstellt, übersteigt die Anzahl ihrer Elemente den Umfang der natürlichen Zahlen.

Um zu verstehen, was das bedeutet, muss man erst einmal klären, wie die Größe von Mengen definiert ist. Für den endlichen Fall kann man die jeweiligen Elemente zählen, so sind etwa {1, 2, 3} und {Cantor, Gödel, Cohen} gleich groß. Möchte man Mengen mit zahlreichen – aber endlich vielen – Elementen vergleichen, gibt es zwei bewährte Möglichkeiten. Man kann zum einen alle darin enthaltenen Objekte zählen. Manchmal ist es allerdings einfacher, eine Zuordnung zwischen den Mengen zu finden: Lässt sich beispielsweise jedes Element der einen eindeutig einem Element der anderen zuweisen (etwa 1 → Cantor, 2 → Gödel, 3 → Cohen), dann sind die zwei Mengen gleich groß.

Glossar

Teilmenge: Eine Menge A heißt Teilmenge von B, wenn jedes Element von A auch in B liegt.

Nullmenge: eine Menge mit Maß (zum Beispiel Flächeninhalt oder Volumen) null

Magere Menge: abzählbare Vereinigung von Rändern

$\aleph_0$: Größe der natürlichen Zahlen; abzählbar unendlich. Die nächstgrößere Unendlichkeit ist $\aleph_1$, danach kommt $\aleph_2$ und so weiter.

$2^{\aleph_0}$: Kontinuum, Größe der reellen Zahlen

$\mathcal{N}$: die Familie der Nullmengen

$\mathcal{M}$: die Familie der mageren Mengen

non($\mathcal{N}$): die kleinste Kardinalzahl einer Nichtnullmenge

non($\mathcal{M}$): die kleinste Kardinalzahl einer nicht mageren Menge

add($\mathcal{N}$): die kleinste Anzahl von Nullmengen, deren Vereinigung eine Nichtnullmenge ist

add($\mathcal{M}$): die kleinste Anzahl von mageren Mengen, deren Vereinigung eine nicht magere Menge ist

cov($\mathcal{N}$): die kleinste Anzahl von Nullmengen, die vereinigt die ganze Ebene ergeben

cov($\mathcal{M}$): die kleinste Anzahl von mageren Mengen, die vereinigt die ganze Ebene ergeben

cof($\mathcal{N}$): die kleinstmögliche Größe einer Basis der Familie der Nullmengen

cof($\mathcal{M}$): die kleinstmögliche Größe einer Basis der Familie der mageren Mengen

Basis X von $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{M}$: eine Menge X von Null- beziehungsweise mageren Mengen, so dass es für jede Null- beziehungsweise magere Menge A eine Menge B in X gibt mit $A \subseteq B$

$\mathfrak{b}$: die kleinste Größe einer Menge D von stetigen Funktionen, so dass jede stetige Funktion von einer Funktion aus D dominiert wird

$\mathfrak{d}$: die kleinste Größe einer Familie B von stetigen Funktionen mit der Eigenschaft, dass es keine stetige Funktion gibt, die alle Funktionen aus B dominiert

Letztere Methode ist bei unendlichen Mengen nützlich. Um diese Objekte zu vermessen, schlägt man einen anderen Weg ein als im Endlichen. Anstatt den Begriff der Anzahl als grundlegend anzusehen und daraus Konzepte wie »ist größer«, »ist gleich groß« oder »ist größer oder gleich« abzuleiten, verfolgt man eine umgekehrte Strategie: Man definiert zuerst, wann zwei Mengen A und B gleich groß sind, nämlich genau dann, wenn man jedem Element aus A genau eines aus B zuordnen kann. Eine solche Abbildung bezeichnet man als Bijektion.

Zudem ist A kleiner/gleich B, falls die Zuordnung alle Elemente von B höchstens einmal verwendet. Damit kann man die Größe von Mengen durch so genannte Kardinalzahlen beschreiben. Im Endlichen sind das wie gewohnt die natürlichen Zahlen. Für unendliche Mengen sind sie hingegen abstrakte Größen, die sich durchaus voneinander unterscheiden können: Denn nicht immer existiert eine Bijektion zwischen unendlichen Mengen.

Eine solche Definition von Größe führt zu scheinbaren Widersprüchen, die Bernard Bolzano in seinen 1851 posthum erschienenen »Paradoxien des Unendlichen« aufführte. Zum Beispiel wirkt die Aussage »der Teil ist stets kleiner als das Ganze« auf den ersten Blick selbstverständlich. Das heißt, wenn eine Menge A eine echte Teilmenge von B ist (also jedes Element von A in B ist, B aber weitere Elemente enthält), dann muss A kleiner als B sein. Das gilt jedoch nicht für unendliche Mengen! Diese seltsame Eigenschaft war einer der Gründe dafür, dass das Konzept von Unendlichkeiten bei einigen Gelehrten vor mehr als 100 Jahren auf Ablehnung stieß.

Zum Beispiel sind die geraden Zahlen $G = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ eine echte Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$.

Maße

Das Konzept des Maßes lässt sich gut anhand des Quadrats mit Seitenlänge eins veranschaulichen. Wenn eine Teilmenge B des Quadrats das Maß 0,13 hat und man zufällig einen Dartpfeil auf die gesamte Fläche wirft, dann trifft man B mit einer Wahrscheinlichkeit von 13 Prozent. Die Menge der Punkte unterhalb der Diagonale hat die Fläche ein halb, und wird daher mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit getroffen.

Eine Nullmenge (wie die unendlich dünne Diagonale oder ein einziger Punkt) erreicht man dagegen mit einer Wahrscheinlichkeit von null. Natürlich landet ein Dartpfeil aber stets irgendwo in dem Quadrat, das überabzählbar viele Punkte umfasst. Daraus kann man sehen, dass die Vereinigung von überabzählbar vielen Nullmengen im Allgemeinen keine Nullmenge mehr ist – man trifft ja das Quadrat (die Vereinigung der einzelnen Punkte) mit einer Wahrscheinlichkeit von eins.

Normale Zahlen

Viele mathematische Sätze gelten für fast alle Zahlen – bis auf eine Nullmenge. Zum Beispiel sind »fast alle« reellen Zahlen x normal, das heißt jeder mögliche endliche Zahlenblock taucht in den Nachkommaziffern der Dezimaldarstellung von x gleich häufig auf. Wenn eine Zahl also normal ist, dann kommt die Acht ebenso wie die Neun in zehn Prozent der Nachkommastellen vor, der Block 73 genauso wie 99 in einem Prozent aller Paare aufeinander folgender Ziffern und so weiter.

Natürliche oder rationale Zahlen sind nicht normal, denn sie sind stets periodisch. Mit einem zentralen Resultat der Wahrscheinlichkeitstheorie, dem »Gesetz der großen Zahlen«, lässt sich jedoch schnell zeigen, dass »fast alle« Zahlen (bis auf eine Nullmenge) normal sind. Möchte man allerdings herausfinden, ob eine konkrete reelle Zahl normal ist, gestaltet sich das häufig schwierig. Bis heute weiß man beispielsweise nicht, ob die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl *e* normal sind.

Rein intuitiv würde man wohl sagen, die Menge G sei halb so groß wie $\mathbb{N}$. Dennoch sind ihre Kardinalzahlen nach der zuvor angegebenen Definition gleich groß: Denn man kann jeder Zahl g in G genau eine in $\mathbb{N}$ zuordnen ($0 \to 0$, $2 \to 1$, $4 \to 2$, …, $g \to g/2$, …).

Als Konsequenz könnte man entweder den Begriff der Größe für Mengen als unsinnig verwerfen – oder man gibt ihm einen anderen Namen, etwa Mächtigkeit. Der Einfachheit halber behalten wir die Wortwahl bei, auch wenn sie im Unendlichen unerwartete Folgen hat.

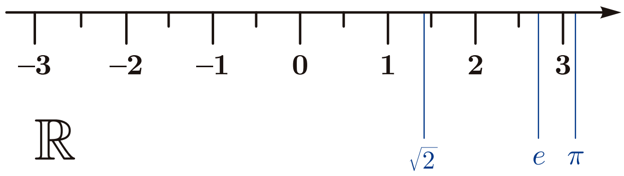
Der deutsche Logiker und Begründer der modernen Mengenlehre, Georg Cantor, fand im 19. Jahrhundert heraus, dass nicht alle unendlichen Mengen gleich groß sind. Wie er bewies, ist die Potenzmenge P(X) einer – endlichen oder unendlichen – Menge X stets größer als X selbst. Daraus folgt unter anderem, dass keine größte Unendlichkeit existiert und damit auch keine »Allmenge«, die alle Mengen enthält.

Eine ungelöste Vermutung

Dafür gibt es so etwas wie eine kleinste Unendlichkeit: Alle unendlichen Mengen sind größer oder gleich den natürlichen Zahlen. Man nennt Mengen X, die so groß sind wie $\mathbb{N}$ (mit einer Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und X) abzählbar, ihre Kardinalzahl heißt $\aleph_0$. Zu jeder unendlichen Kardinalzahl $\aleph_a$ gibt es eine nächstgrößere, $\aleph_{a+1}$. Nach der kleinsten unendlichen Kardinalzahl $\aleph_0$ kommt also $\aleph_1$, gefolgt von $\aleph_2$ und so weiter. Die reellen Zahlen sind genauso groß wie die Potenzmenge von $\mathbb{N}$; ihre Kardinalzahl bezeichnet man mit $2^{\aleph_0}$ oder Kontinuum.

In den 1870er Jahren fragte sich Cantor, ob die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die nächstgrößere nach den natürlichen Zahlen ist – anders ausgedrückt, ob $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Bis dahin

PHROOD~COMMONSWIKI (COMMONS.WIKIMEDIA.ORG/WIKI/FILE:REAL_NUMBER_LINE.SVG)



DAS KONTINUUM Die reellen Zahlen sind alle Zahlen, die man auf einem Zahlenstrahl findet. Prominente Vertreter sind die Eulersche Zahl *e* und die Kreiszahl π.

stellte sich jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ entweder als genauso groß wie $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ selbst heraus. Das veranlasste Cantor zur so genannten Kontinuumshypothese: Er vermutete, die Größe von $\mathbb{R}$ sei die kleinstmögliche überabzählbare Kardinalzahl. Jahrzehntelang beschäftigte die Vermutung zahlreiche Mathematiker, doch ein Beweis entzog sich ihnen. Wie sich später herausstellte, waren ihre Versuche zwangsläufig zum Scheitern verurteilt.

Die Mengenlehre ist zwar extrem mächtig, fast alle mathematischen Konzepte und Probleme lassen sich durch sie formalisieren, aber sie hat auch Schwachstellen. Das Fundament dieser Disziplin bildet das vor über 100 Jahren vom deutschen Logiker Ernst Zermelo formulierte und von seinem deutsch-israelischen Kollegen Abraham Fraenkel ergänzte Axiomensystem, ZFC genannt (C steht dabei für das Auswahlaxiom, englisch: axiom of choice). Es handelt sich um eine Sammlung von Grundannahmen, mit der sich fast die gesamte Mathematik betreiben lässt – nur ein verschwindend geringer Anteil benötigt zusätzliche Annahmen. Doch der österreichische Mathematiker Kurt Gödel erkannte 1931 einen grundlegenden Makel des Systems: Die Theorie ist unvollständig. Das heißt, man kann Aussagen formulieren, die sich mit den Mitteln von ZFC weder widerlegen noch beweisen lassen. Unter anderem ist es unmöglich, innerhalb eines Systems zu zeigen, dass dieses zu keinerlei Widersprüchen führt (siehe »Axiomatisierung der Mengenlehre«).

Das berühmteste Beispiel für einen unentscheidbaren Satz in der Mengenlehre ist die Kontinuumshypothese. In einer 1938 erschienenen Arbeit bewies Gödel, dass man Cantors Vermutung innerhalb von ZFC nicht widerlegen kann. Wie der US-amerikanische Mathematiker Paul Cohen 25 Jahre später zeigte, lässt sie sich mit den Mitteln von ZFC ebenso wenig beweisen. Daher wird man mit

Axiomatisierung der Mengenlehre

Der mengentheoretischen Intuition nach sollte man beliebige mathematische Objekte zu einer Menge zusammenfassen können. Das führt aber rasch auf einen Widerspruch, das so genannte Russell-Paradoxon. Ein Beispiel dafür ist ein Barbier, der alle Dorfbewohner rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Soll er sich nun selbst rasieren oder nicht? Was immer er tut, er widerspricht der Anforderung. So einen Barbier kann es also nicht geben. Ebenso existiert keine Menge, die alle Mengen umfasst, die sich nicht selbst enthalten.

Das Axiom »Jede mathematische Eigenschaft definiert eine Menge jener Elemente, welche die Eigenschaft erfüllen« ist daher widersprüchlich. Bei der Formulierung der Axiome, aus denen man dann weitere Eigenschaften herleiten kann, muss man vorsichtig vorgehen — man kann nicht alles zulassen.

Die Mengenlehre baut deshalb auf Grundannahmen auf, die nur für gewisse Eigenschaften E die Existenz einer solchen Menge fordern. Ein Beispiel ist das Paarmengenaxiom: Für alle Objekte x, y gibt es eine Menge, die sowohl x als auch y enthält, und sonst nichts. Oder das Potenzmengenaxiom: Für jede Menge X gibt es eine Menge Y, so dass alle Teilmengen von X Elemente von Y sind – und sonst nichts. Eine andere wichtige Grundannahme ist das Unendlichkeitsaxiom, das die Existenz unendlicher Mengen garantiert. Diese und weitere Axiome bilden das Fundament der Mengenlehre, ZFC, benannt nach Ernst Zermelo und Abraham Fraenkel, wobei C für das Auswahlaxiom (englisch: axiom of choice) steht.

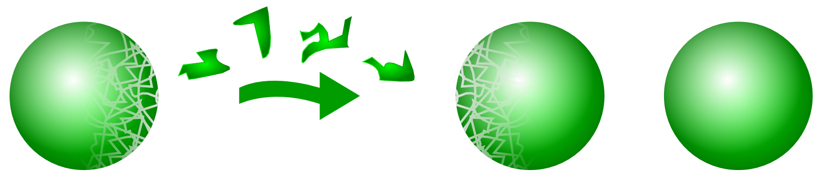
ZFC bietet also eine formale Grundlage für die gesamte Mathematik. Aber woher weiß man, ob die damit abgeleiteten Sätze wirklich wahr sind? Oder könnte man sogar irgendwann auf einen Widerspruch wie $0 \neq 0$ stoßen?

Der bedeutende Mathematiker David Hilbert wollte um 1900 mit Hilfe einer »unverdächtigen« Theorie (deren Axiome zweifelsfrei gelten) beweisen, dass das stärkere ZFC-System konsistent ist. Leider scheitert der Versuch an Gödels Unvollständigkeitssatz (1931): Man kann nicht einmal mit den Mitteln von ZFC beweisen, dass ZFC zu keinen Widersprüchen führt – geschweige denn in schwächeren Systemen.

Man kann sich also nicht sicher sein, ob das Fundament der Mathematik konsistent ist. Zwar erscheinen die Axiome den meisten Mengentheoretikern als richtig, aber das schützt nicht vor Irrtum. Vermutlich würde auch der Satz »Zu jeder Eigenschaft gibt es die Menge aller Objekte, welche die Eigenschaft erfüllen« den meisten Mathematikern als wahr erscheinen, wenn ihnen das Russell-Paradoxon nicht bekannt wäre.

Was würde passieren, falls sich ZFC als inkonsistent herausstellt? Zunächst wahrscheinlich nicht allzu viel: Der überwiegende Teil der Mathematik benötigt nur sehr schwache Fragmente der Theorie.

Auswahlaxiom und Banach-Tarski-Paradoxon



BENJAMIN D. ESHAM (BDESHAM) (COMMONS.WIKIMEDIA.ORG/WIKI/FILE:BANACH-TARSKI_PARADOX.SVG); BEARBEITUNG: SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Das Auswahlaxiom kann zu extrem seltsamen Ergebnissen führen. Es besagt, dass es zu jeder Familie von nicht leeren Mengen eine Funktion gibt, die in jeder dieser Mengen ein Element auswählt. Für endliche Familien ist das Axiom offensichtlich wahr, doch im Unendlichen hat es unerwartete Folgen. Eine davon ist das Banach-Tarski-Paradoxon, das mit geometrischen Figuren zusammenhängt.

Zwei ebene Objekte, etwa Dreiecke, sind kongruent, wenn man das eine durch Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen in das andere verwandeln kann. Zum Beispiel sind zwei Halbkreise kongruent, falls sie den gleichen Radius haben. Genauso lässt sich Kongruenz im dreidimensionalen Raum definieren. Das Lebesguemaß (der Flächeninhalt oder das Volumen) ändert sich bei Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen nicht, weshalb kongruente Figuren das gleiche Maß haben.

Eine ähnliche Eigenschaft wie Kongruenz beschreibt die Zerlegungsäquivalenz, wenn man zwei Objekte in endlich viele Teile zerlegen kann, die paarweise kongruent sind. Zum Beispiel lässt sich ein gleichschenkliges Dreieck, mit einer Grundseite von $2a$ und einer Höhe von b, in zwei rechtwinklige Dreiecke mit Katheten a und b teilen.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man damit das Banach-Tarski-Paradoxon herleiten: Wenn Figur A aus zwei Kugeln mit Radius eins besteht, die Figur B eine einzige Kugel mit Radius eins ist, dann sind A und B zerlegungsäquivalent. Das heißt, man kann aus einer Kugel mit Radius eins zwei gleich große – ebenfalls mit Radius eins – konstruieren (siehe Bild)! Das ist auf den ersten Blick widersprüchlich, denn bei einer Zerlegung in endlich viele Bruchstücke kann man kein Volumen gewinnen oder verlieren – ebenso wenig wie beim Verschieben, Drehen oder Spiegeln einzelner Teile.

Tatsächlich sind die Objekte, in die man die Kugeln zerteilen muss, aber so kompliziert und ausgefranst, dass man ihnen kein Maß (in diesem Fall: kein Volumen) zuordnen kann, sie sind nicht messbar. Physikalisch hat das Paradoxon keine Relevanz, denn nichtmessbare Größen spielen in der mathematischen Beschreibung der Natur keine Rolle.

den üblichen Axiomen der Mengenlehre niemals eine Antwort auf die Kontinuumshypothese finden. Es bleibt also offen, ob Mengen existieren, die größer als die natürlichen und gleichzeitig kleiner als die reellen Zahlen sind (siehe »Spektrum« Februar 2021, S. 12).

Neben der Kardinalität gibt es andere Methoden, um die Größe einer Menge zu beschreiben. Wenn man sich Mengen beispielsweise geometrisch vorstellt, kann man ihnen eine Länge, einen Flächeninhalt oder ein Volumen zuordnen. Eine Menge von Punkten, die ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b bilden, hat beispielsweise eine Fläche von $a \cdot b$. Für kompliziertere Teilmengen der Ebene braucht man manchmal andere Hilfsmittel, um deren Flächeninhalt zu berechnen, etwa die aus der Schule bekannte Integralrechnung. Die Methode reicht aber für bestimmte komplexe Mengen nicht aus. Um diese trotzdem zu vermessen, nutzt man das so genannte Lebesguemaß, eine Funktion, die auch kompliziertesten Objekten eine Länge, Fläche oder ein Volumen zuordnet. Dennoch ist es möglich, Teilmengen der Ebene zu definieren, die überhaupt nicht messbar sind: Sie sind derart ausgefranst, dass eine Vermessung gänzlich scheitert.

Im zweidimensionalen Raum ist eine Linie (etwa ein Kreis, eine endliche Strecke oder eine Gerade) stets messbar, und ihr Flächeninhalt ist null. Man nennt sie daher Nullmenge. Auch im Eindimensionalen lassen sich Nullmengen definieren: Auf dem Zahlenstrahl hat die Menge zweier Zahlen, etwa {3, 5} das Maß null, während ein Intervall wie [3, 5], also die Strecke von 3 nach 5, das Maß zwei hat.

Vernachlässigbare Mengen

Das Konzept der Nullmenge ist in der Mathematik äußerst nützlich: Oft kann man Theoreme nicht allgemein für reelle Zahlen beweisen, aber für alle bis auf eine Nullmenge. Für die meisten Anwendungen genügt das. Dabei können Nullmengen sehr groß erscheinen: Zum Beispiel sind die rationalen Zahlen innerhalb der reellen (also auf dem Zahlenstrahl) eine Nullmenge, selbst wenn es unendlich viele davon gibt. Das liegt daran, dass in diesem Zusammenhang jede abzählbare – oder endliche – Menge eine Nullmenge ist. Umgekehrt muss aber eine Teilmenge der x-y-Ebene mit großer Kardinalität weder messbar sein noch großes Maß haben. Zum Beispiel hat die gesamte Ebene mit ihren $2^{\aleph_0}$ Elementen das Maß unendlich. Aber die x-Achse mit gleicher Kardinalität hat ein zweidimensionales Maß von null und ist daher eine Nullmenge der Ebene.

Solche vernachlässigbaren Mengen führten zu grundlegenden Fragen über die Größe von zehn unendlichen Kardinalzahlen, die lange Zeit unbeantwortet blieben. Zum

Beispiel wollten Mathematiker herausfinden, wie groß eine Menge mindestens sein muss, damit sie keine Nullmenge ist. Man bezeichnet die Familie aller Nullmengen mit $\mathcal{N}$ und die kleinste Kardinalzahl einer Nichtnullmenge mit non($\mathcal{N}$). Für diese Zahl gilt: $\aleph_0 < \mathrm{non}(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$, denn jede Menge der Größe $\aleph_0$ ist eine Nullmenge, aber die reellen Zahlen (mit Größe $2^{\aleph_0}$) ist keine Nullmenge im eindimensionalen Maß. Damit ergibt sich $\aleph_1 \leq \mathrm{non}(\mathcal{N}) \leq 2^{\aleph_0}$, weil $\aleph_1$ die erste überabzählbare Kardinalzahl ist. Wenn man von der Kontinuumshypothese ausgeht, ist $\mathrm{non}(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$, da es in dem Fall keine Kardinalzahl gibt, die zwischen der Größe der natürlichen und der reellen Zahlen liegt.

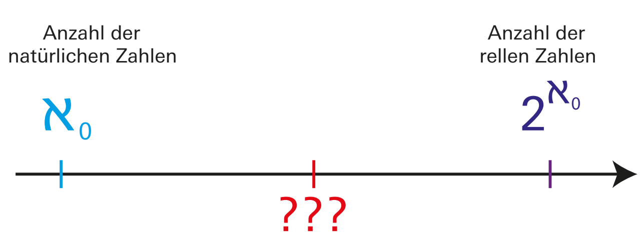
Ähnlich lässt sich eine weitere Kardinalzahl add($\mathcal{N}$) definieren, als Antwort auf die Frage: Wie viele Nullmengen muss man mindestens vereinigen, um eine Nichtnullmenge zu erhalten? Diese Zahl ist kleiner oder gleich non($\mathcal{N}$). Wenn A eine Nichtnullmenge ist, die non($\mathcal{N}$) viele Elemente enthält, ergibt die Vereinigung über alle non($\mathcal{N}$) einelementigen Teilmengen von A eben die Nichtnullmenge A. Allerdings könnte eine kleinere Anzahl von Nullmengen genügen (die wären dann nicht einelementig), die vereinigt eine Nichtnullmenge ergeben, deshalb gilt $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{non}(\mathcal{N})$.

Die Kardinalzahl cov($\mathcal{N}$) ist die kleinste Anzahl von Nullmengen, die vereinigt die x-y-Ebene ergeben. cov($\mathcal{N}$) ist dabei größer oder gleich add($\mathcal{N}$), denn die Ebene ist ja eine Nichtnullmenge.

Ebenfalls interessant ist die Frage nach cof($\mathcal{N}$), der kleinstmöglichen Größe einer Basis X von $\mathcal{N}$. Das ist eine Menge X von Nullmengen, die für jede Nullmenge A eine Menge B enthält, so dass A eine Teilmenge von B ist. Die damit definierten unendlichen Größen add($\mathcal{N}$), cov($\mathcal{N}$), non($\mathcal{N}$) und cof($\mathcal{N}$) sind wichtige Kennzahlen, die Eigenschaften von Nullmengen charakterisieren.

Für jede der beschriebenen Kennzahlen lässt sich eine analoge Größe definieren, die zwar ebenfalls reelle Zahlen betrifft, sich aber auf ein anderes Konzept von vernachlässigbaren Mengen bezieht. Denn nicht nur Nullmengen beschreiben einen Begriff von Kleinheit, sondern auch so genannte magere Mengen. Anschaulich handelt es sich dabei um abzählbare Vereinigungen von geschlossenen Rändern (ohne Inneres), etwa von Kreislinien in der Ebene. Im Eindimensionalen bilden die normalen Zahlen (siehe »Normale Zahlen«) eine magere Menge auf dem Zahlenstrahl, während die restlichen reellen, nichtnormalen Zahlen eine Nullmenge bilden.

KONTINUUMSHYPOTHESE Gibt es eine Unendlichkeit zwischen der Größe natürlicher und reeller Zahlen? Die Frage ist in der Mengenlehre unentscheidbar.



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / MANON BISCHOFF

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \boxed{\mathrm{cof}(\mathcal{M})} \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
& & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & & \\
\aleph_1 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{N}) \arrow[uu] \arrow[r] & \boxed{\mathrm{add}(\mathcal{M})} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

MARTIN GOLDSTERN UND JAKOB KELLNER

CICHOŃ-DIAGRAMM Die Relationen von zwölf Unendlichkeiten sind in dem Diagramm dargestellt, wobei die Pfeile für Kleiner-gleich-Beziehungen stehen.

Ausgehend davon lassen sich entsprechende Kennzahlen für die Familie $\mathcal{M}$ der mageren Mengen definieren: add($\mathcal{M}$), non($\mathcal{M}$), cov($\mathcal{M}$), cof($\mathcal{M}$). Unter der Kontinuumshypothese sind für Null- wie für magere Mengen alle Kennzahlen gleich. Umgekehrt konnten die US-amerikanischen Mathematiker Kenneth Kunen und Arnold Miller 1981 mit Hilfe des von Cohen entwickelten so genannten Forcing zeigen, dass es unmöglich ist, die Aussage $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{add}(\mathcal{M})$ mit den Mitteln der ZFC-Axiome zu beweisen. Das heißt, die Anzahl der Null- und mageren Mengen, die man vereinigen muss, um eine nicht vernachlässigbare Menge zu erzeugen, ist nicht beweisbar gleich.

Forcing ist eine Methode, um mathematische Universen zu konstruieren. Damit meint man ein Modell, das alle ZFC-Axiome erfüllt. Um zu zeigen, dass eine Aussage X nicht widerlegbar ist, verwendet man die folgende Tatsache: Wenn es ein Universum gibt, in dem neben ZFC auch X gilt, dann kann man X in ZFC nicht widerlegen – sonst hätte man einen Widerspruch erzeugt.

Mathematische Universen mit erstaunlichen Eigenschaften

Dieser Strategie folgend konstruierten Kunen und Miller ein mathematisches Universum, das sowohl die Axiome von ZFC als auch die Eigenschaft $\mathrm{add}(\mathcal{N}) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$ erfüllt. Demnach bräuchte man in diesem Modell mehr magere als Nullmengen, um eine nicht vernachlässigbare Menge zu bilden. Das weist auf eine Asymmetrie zwischen beiden Mengentypen hin, die unter Annahme der Kontinuumshypothese von Cantor jedoch verschwindet. Das Ergebnis zeigt, dass man unmöglich $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \geq \mathrm{add}(\mathcal{M})$ aus ZFC beweisen kann.

Wie der polnisch-amerikanische Mathematiker Tomek Bartoszyński drei Jahre später herausfand, ist hingegen die umgekehrte Ungleichung $\mathrm{add}(\mathcal{N}) \leq \mathrm{add}(\mathcal{M})$ mit den Mitteln von ZFC sehr wohl beweisbar. Man kann daraus allerdings weder auf $\mathrm{add}(\mathcal{N}) = \mathrm{add}(\mathcal{M})$ noch $\mathrm{add}(\mathcal{N}) < \mathrm{add}(\mathcal{M})$ schließen. Es ist genauso wie bei der Kontinuumshypothese: Es lässt sich lediglich zeigen, dass $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$, man kann aber weder beweisen, dass $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ noch dass $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ gilt.

Neben den bisher definierten Kardinalzahlen gibt es zwei weitere interessante Größen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$, die sich auf die Dominanz von Funktionen reeller Zahlen beziehen. Für zwei stetige Funktionen (von denen es $2^{\aleph_0}$ viele gibt) f und g sagt man »f wird von g dominiert«, $f < g$, wenn für alle genügend großen x die Ungleichung $f(x) < g(x)$ gilt. Zum Beispiel dominiert eine quadratische Funktion wie $g(x) = x^2$ jede lineare Funktion, etwa $f(x) = 100x + 30$.

Die Kardinalzahl $\mathfrak{d}$ ist dabei die kleinstmögliche Größe einer Menge von stetigen Funktionen, die ausreichen, um jede mögliche stetige Funktion zu dominieren.

Eine Variante dieser Definition liefert die nächste Kardinalzahl $\mathfrak{b}$. Sie entspricht der kleinsten Größe einer Familie G mit der Eigenschaft, dass es keine stetige Funktion gibt, die alle Funktionen aus G dominiert. Man kann beweisen, dass $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq 2^{\aleph_0}$ gilt.

WIGGLESTICK / GETTY IMAGES / ISTOCK

Mehr Wissen auf Spektrum.de

Unser Online-Dossier zum Thema finden Sie unter **spektrum.de/t/unendlichkeit**

Neben den bereits erwähnten Ungleichungen sind weitere Beziehungen zwischen den vorgestellten insgesamt zwölf unendlichen Kardinalzahlen bekannt. Man fasst sie im so genannten Cichoń-Diagramm zusammen, das der britische Mathematiker David Fremlin 1984 eingeführt und nach seinem polnischen Kollegen Jacek Cichoń benannt hat (siehe »Cichoń-Diagramm«). Darin ersetzt man aus typografischen Gründen die Kleiner-gleich-Zeichen meist durch Pfeile.

Die zwölf Größen sind allerdings nicht völlig unabhängig voneinander. Wie sich herausstellt, ist add($\mathcal{M}$) die kleinere der beiden Zahlen $\mathfrak{b}$ und cov($\mathcal{M}$). Ebenso entspricht cof($\mathcal{M}$) dem größeren der beiden Werte $\mathfrak{d}$ und non($\mathcal{M}$). Diese zwei abhängigen Kardinalzahlen sind im Diagramm umrahmt. Es besteht also aus zwölf überabzählbaren Größen, von denen höchstens zehn verschieden sein können.

Wie verschieden können die Unendlichkeiten sein?

Wenn die Kontinuumshypothese allerdings gilt, ist $\aleph_1$ (die kleinste Zahl des Diagramms) gleich $2^{\aleph_0}$ (dem größten darin erscheinenden Wert), und damit ist jede Kenngröße gleich. Geht man hingegen davon aus, Cantors Vermutung sei falsch, könnten sie sich alle unterscheiden.

Über mehrere Jahrzehnte untersuchten Mathematiker, ob man für einige der Relationen des Diagramms statt nur der Kleiner-oder-gleich-Beziehung sogar Gleichheit beweisen kann. Dazu konstruierten sie zahlreiche unterschiedliche Universen, in denen sie zunächst die zwei kleinsten überabzählbaren Kardinalzahlen $\aleph_1$ und $\aleph_2$ auf verschiedene Weise dem Diagramm zuordneten. Zum Beispiel fanden sie ein Universum, in dem $\aleph_1$ = add($\mathcal{N}$) = cov($\mathcal{N}$) gilt und $\aleph_2$ = non($\mathcal{M}$) = cof($\mathcal{M}$).

Durch diese Arbeiten konnten die Forscher in den 1980er Jahren bestätigen: Zwischen allen Paaren von Kardinalzahlen des Diagramms kann man nur die darin angegebenen Beziehungen (mit den Mitteln von ZFC) beweisen. Genauer: Für jede sinnvolle Beschriftung des Cichoń-Diagramms mit den Werten $\aleph_1$ und $\aleph_2$ gibt es ein Universum, in dem die entsprechenden Einträge realisiert werden.

Seit fast vier Jahrzehnten wusste man also, dass sämtliche Konstellationen von $\aleph_1$ und $\aleph_2$ im Diagramm möglich sind. Aber wie sieht es mit mehreren verschiedenen Werten zugleich aus? Könnten beispielsweise alle unabhängigen Einträge unterschiedlich sein? Einzelne Fälle mit drei Werten sind seit 50 Jahren bekannt, und in den 2010er Jahren fand man weitere Universen, in denen bis zu sieben verschiedene Kardinalzahlen im Cichoń-Diagramm auftraten.

Zusammen mit dem israelischen Mathematiker Saharon Shelah von der Hebrew University of Jerusalem konnten wir in einer 2019 erschienenen Arbeit ein Universum konstruieren, in dem tatsächlich die maximal mögliche Anzahl verschiedener unendlicher Werte (also zehn), im Cichoń-Diagramm vorkommen. Dabei verwendeten wir allerdings ein stärkeres Axiomensystem als ZFC, das die Existenz so genannter großer Kardinalzahlen voraussetzt – Unendlichkeiten, die mit den Mitteln von ZFC allein nicht beweisbar sind.

Das war zwar ein Fortschritt, doch wir waren damit nicht ganz zufrieden. Wir suchten zwei Jahre lang nach einer solchen Lösung, die lediglich mit den Axiomen von ZFC funktioniert. Zusammen mit unseren Kollegen Shelah und dem kolumbianischen Mathematiker Diego Mejía von der Shizuoka-Universität in Japan gelang es uns schließlich, das Ergebnis auch ohne diese zusätzlichen Annahmen beweisen.

Damit haben wir gezeigt: Die zehn Kenngrößen der reellen Zahlen können alle gleichzeitig verschieden sein. Das neue Resultat besagt jedoch nicht, dass es mindestens, höchstens oder genau zehn unendliche Kardinalzahlen zwischen $\aleph_1$ und dem Kontinuum geben kann. Das hat der US-amerikanische Mathematiker Robert Solovay schon 1963 bewiesen: Tatsächlich kann die Größe der reellen Zahlen stark variieren, es könnte 8, 27 oder unendlich viele Kardinalzahlen zwischen $\aleph_1$ und $2^{\aleph_0}$ geben – sogar überabzählbar viele. Wie unser Ergebnis belegt, gibt es mathematische Universen, in denen zehn bestimmte Kardinalzahlen, die zwischen $\aleph_1$ und $2^{\aleph_0}$ liegen, nicht gleich ausfallen.

Hiermit ist die Geschichte aber nicht zu Ende. Wie in der Mathematik üblich, bleiben viele Fragen offen, und es tauchen neue auf. Zum Beispiel gibt es neben den genannten Kardinalzahlen schon seit den 1940er Jahren zahlreiche weitere unendliche Größen, die zwischen $\aleph_1$ und dem Kontinuum liegen, deren genaue Beziehungen untereinander unbekannt sind. Wir hoffen, künftig herauszufinden, ob auch diese zusätzlich zu denen in Cichońs Diagramm verschieden sein können. ◂

QUELLEN

Goldstern, M. et al.: Cichoń's maximum. Annals of Mathematics 190, 2019

Goldstern, M. et al.: Cichoń's maximum without large cardinals. ArXiv 1906.06608, 2019