Seminararbeit

Gaifmans Splitting Theorem

ausgeführt von

Stefan Schrott

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Hetzl

Wien, am 13. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Notation

Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen des Seminars aus Logik im Wintersemester 2020 an der TU Wien entstanden und basiert auf Kapitel 7 des Buches *Models of Peano Arithmetic* von Richard Kaye, siehe [1]. Auch die Notation in der Arbeit orientiert sich an diesem Buch.

Im folgenden betrachten die Sprache der Arithmetik $\mathscr{L}_A = \{0, 1, +, -, <\}$, wobei wir naheliegende Abkürzungen wie etwa $x \leq y$ für $x < y \vee x = y$ verwenden.

Mit x, y, z bezeichnen wir üblicherweise freie Variable, während a, b, c meist Elemente eines Modells M sind. Entsprechend bezeichnet etwa $\bar{a}$ ein Tupel von Elementen von M und $\bar{x}$ ein Tupel von freien Variablen. Hier verwenden wir auch die etwas ungenaue Schreibweise $\bar{a} \in M$, um auszudrücken, dass $\bar{a}$ ein Tupel von Elementen aus M ist.

Insbesondere sind $\exists \bar{x}$ bzw. $\forall \bar{x}$ Abkürzungen für $\exists x_1 \ldots \exists x_k$ bzw. $\forall x_1 \ldots \forall x_k$.

1.1 Die arithmetische Hierarchie

Sei φ eine $\mathscr{L}_A$-Formel und t ein Term. Wir definieren nun die Abkürzungen

$$\exists x < t(\bar{y})\varphi(x, \bar{y}) \equiv \exists x(x < t(\bar{y}) \wedge \varphi(x, \bar{y})) \qquad \forall x < t(\bar{y})\varphi(x, \bar{y}) \equiv \forall x(x < t \rightarrow \varphi(x, \bar{y}))$$

und bezeichnen die Ausdrücke $\exists x < t(\bar{y})$ und $\forall x < t(\bar{y})$ als beschränkte Quantoren. Eine $\mathscr{L}_A$-Formel heißt beschränkt, falls sie nur beschränkte Quantoren enthält.

Wir bezeichnen mit $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ die Menge der beschränkten Formeln. Induktiv definieren wir nun Σ_n- und Π_n-Formeln: Eine Formel ist in Σ_{n+1} falls sie von der Form $\exists \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ ist, wobei $\varphi \in \Pi_n$. Eine Formel ist in Π_{n+1} falls sie von der Form $\forall \bar{x}\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ ist, wobei $\varphi \in \Sigma_n$.

Per definitionem ist also Σ_n unter existenzieller Quantifizierung sowie Π_n unter universeller Quantifizierung abgeschlossen; weitere Abschlusseigenschaften gelten für die Formelmengen Σ_n und Π_n nicht.

Im Folgenden sei T eine Theorie und M ein Modell. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \Sigma_n(M) &:= \{\theta(\bar{x}) : \text{Es gibt eine Formel } \varphi(\bar{x}) \in \Sigma_n \text{ sodass } M \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \theta(\bar{x}))\} \\ \Sigma_n(T) &:= \{\theta(\bar{x}) : \text{Es gibt eine Formel } \varphi(\bar{x}) \in \Sigma_n \text{ sodass } T \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \theta(\bar{x}))\} \end{aligned}$$

sowie auf analoge Weise auch $\Pi_n(M)$ und $\Pi_n(T)$.

Offenbar gilt für alle Theorien T (und genauso für alle Modelle M), dass die Negationen der $\Sigma_n(T)$-Formeln genau die $\Pi_n(T)$-Formeln sind.

Im folgenden Kapitel werden wir auf eine weitere Abschlusseigenschaft zu sprechen kommen.

2 Das Collection Axiom

2.1 Induktion

In dieser Arbeit werden wir immer mit der Theorie PA^- oder mit Erweiterungen dieser Theorie arbeiten. Die Theorie PA^- axiomatisiert wesentliche algebraische und ordnungstheoretische Eigenschaften des Standardmodells $\mathbb{N}$, nämlich Assoziativität, Kommutativität und Distributivität der Operationen $+$ und $\cdot$, die Rolle von 0 und 1 als neutrale Elemente dieser Operationen sowie die Tatsache, dass $<$ eine unendliche diskrete lineare Ordnung mit kleinstem Element 0 und direktem Nachfolger 1 ist. Eine genaue Liste der Axiome findet sich in [1, Kapitel 2.1]

Aus diesen Axiomen folgt jedoch noch nicht das aus $\mathbb{N}$ wohlbekannte Induktionsprinzip. Daher werden wir Induktion als Axiome fordern und somit auch zu stärkeren Theorien gelangen.

Sei $\varphi(x, \bar{y})$ eine $\mathscr{L}_A$-Formel. Dann ist das Induktionsaxiom für φ gegeben als

$$I\varphi \equiv \forall \bar{y}(\varphi(0, \bar{y}) \to \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(x+1, \bar{y})) \to \forall x \varphi(x, \bar{y})).$$

Damit können wir nun für $n \geq 0$ Theorien, die PA^- erweitern, definieren:

$$I\Sigma_n := PA^- \cup \{I\varphi : \varphi \in \ \Sigma_n\}$$
$$I\Pi_n := PA^- \cup \{I\varphi : \varphi \in \ \Pi_n\}$$
$$I\Delta_n := PA^- \cup \{I\varphi : \varphi \in \ \Delta_n\}.$$

Tatsächlich sind diese Theorien für festes n jeweils gleich stark, das heißt genauer:

Lemma 2.1. *Σ_n-Induktion und Π_n-Induktion sind äquivalent, das heißt konkret $I\Sigma_n \vdash I\Pi_n$ sowie $I\Pi_n \vdash I\Sigma_n$.*

Beweis. siehe [1, Lemma 7.5] □

Des weiteren definieren wir die Theorie der Peano-Arithmetik als

$$PA := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I\Sigma_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I\Pi_n.$$

Da jede $\mathscr{L}_A$-Formel φ nur endlich viele Quantoren enthält und da wir jede Formel in Pränex-Form bringen können, gibt es ein hinreichend großes n, sodass φ logisch äquivalent zu einer Σ_n- und einer Π_n-Formel ist. Das heißt PA erlaubt Induktion über beliebige $\mathscr{L}_A$-Formeln.

2.2 Collection

Um eine weitere Klasse von Axiomen zu motivieren, betrachten wir die folgende Formel:

$$\forall x < t \exists y \, \varphi(x, y).$$

Falls die Formel im Standard-Modell gilt, können wir folgende Beobachtung machen: Für jedes $x \in \{0, \ldots, |t|_{\mathbb{N}}\}$, wobei $|t|_{\mathbb{N}}$ den Wert des Termes t in $\mathbb{N}$ bezeichnet, gibt es einen Zeugen y_x sodass $\mathbb{N} \models \varphi(x, y_x)$. Im Standardmodell gibt es überdies $s := \max_{x=0}^{|t|_{\mathbb{N}}} y_x$ und es gilt

$$\mathbb{N} \models \forall x < t \exists y < s + 1 \, \varphi(x, y).$$

Dies motiviert die folgende Definition:

Sei $\varphi(x, \bar{y}, \bar{z})$ eine $\mathscr{L}_A$-Formel. Dann ist das Collection Axiom für φ definiert als

$$B\varphi \equiv \forall \bar{z} \forall t\, (\forall x < t \exists \bar{y}\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) \to \exists s \forall x < t \exists \bar{y} < s\, \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}))$$

Wir bemerken, dass die Rückrichtung in obiger Implikation in allen $\mathscr{L}_A$-Strukturen wahr ist. Eine Folgerung aus $B(\neg\varphi)$, die manchmal hilfreich ist, lautet

$$\forall \bar{z} \forall t (\exists x < t \forall \bar{y} \varphi(x, \bar{y}, \bar{z}) \leftrightarrow \forall s \exists x < t \forall \bar{y} < s \varphi(x, \bar{y}, \bar{z})). \tag{1}$$

Wir definieren nun die Theorien

$$\begin{aligned} Coll_n &:= PA^- \cup \{B\varphi : \varphi \in \Sigma_n\}, \qquad n \geq 0 \\ Coll &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Coll_n \end{aligned}$$

Wir können damit eine weitere Abschlusseigenschaft zeigen:

Proposition 2.2. *$\Sigma_n(Coll_n)$ und $\Pi_n(Coll_n)$ sind abgeschlossen unter beschränkter Quantifizierung. Insbesondere: Sei M ein Modell, sodass $M \models Coll_n$, bzw. T eine Theorie, sodass $T \vdash Coll_n$, so sind auch $\Sigma_n(M)$ und $\Pi_n(M)$ bzw. $\Sigma_n(T)$ und $\Pi_n(T)$ abgeschlossen unter beschränkter Quantifizierung.*

Beweis. Wir zeigen simultan per Induktion auf n: $\Sigma_n(Coll_n)$ und $\Pi_n(Coll_n)$ sind abgeschlossen unter beschränkter Quantifizierung. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen, da $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ per definitonem abgeschlossen unter beschränkter Quantifizierung ist.

Für den Induktionsschritt sei $n \geq 1$ und wir nehmen an, dass $\Sigma_{n-1}(Coll_{n-1})$ sowie $\Pi_{n-1}(Coll_{n-1})$ abgeschlossen unter beschränkter Quantifizierung sind. Wir zeigen die Aussage nur für $\Sigma_n(Coll_n)$, da die Argumentation für $\Pi_n(Coll_n)$ völlig analog ist. Des weiteren bemerken wir, dass die Abgeschlossenheit von $\Sigma_n(Coll_n)$ unter beschränkter existenzieller Quantifizierung trivial ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $\Sigma_n(Coll_n)$ unter beschränkter universeller Quantifizierung abgeschlossen ist.

Dafür reicht es zu zeigen: Sei $\varphi(x, \bar{y})$ eine Σ_n-Formel. Dann gibt es eine Σ_n-Formel $\chi(\bar{y})$, sodass

$$Coll_n \vdash \forall \bar{y} (\forall x < t\, \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \chi(\bar{y})).$$

Zuerst bemerken wir, dass es eine Π_{n-1}-Formel $\hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z})$ gibt, sodass $\varphi(x, \bar{y}) \equiv \exists \bar{z} \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z})$. Es gilt nun

$$Coll_n \vdash \forall \bar{y} (\forall x < t\, \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \exists s \forall x < t\, \exists \bar{z} < s\, \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z})).$$

Die auf der rechten Seite auftretende Formel $\exists \bar{z} < s\, \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z})$ ist nach Induktionsvorraussetzung über $Coll_{n-1}$ äquivalent zu einer Π_{n-1}-Formel $\psi(x, \bar{y}, s)$, das heißt:

$$Coll_{n-1} \vdash \forall x \forall \bar{y} \forall s (\psi(x, \bar{y}, s) \leftrightarrow \exists \bar{z} < s\, \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{z})).$$

Insgesamt folgt nun

$$Coll_n \vdash \forall \bar{y} (\forall x < t \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \exists s \forall x < t \psi(x, \bar{y}, s)),$$

wobei die Formel $\exists s \forall x < t \psi(x, \bar{y}, s)$ offensichtlich Σ_n ist. □

2.3 Beziehung zwischen Induktion und Collection

Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass Induktion und Collection über $I\Delta_0$ äquivalent sind. Da der Fokus dieser Arbeit auf den modelltheoretischen Aspekten des Themas liegen soll, werden wir in diesem Abschnitt nicht alle Resultate beweisen.

Proposition 2.3. *Für alle $n \geq 1$ gilt $I\Sigma_n \vdash Coll_n$.*

Beweis. siehe [1, Proposition 7.2]. □

Proposition 2.4. *Für alle $n \geq 0$ gilt $I\Pi_n \cup Coll_{n+2} \vdash I\Sigma_{n+1}$.*

Beweis. Wir betrachten also ein Modell M von $I\Pi_n \cup Coll_{n+2}$ sowie eine beliebige Σ_{n+1}-Formel $\varphi(x, \bar{a})$ und setzen voraus, dass

$$M \models \varphi(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \varphi(x + 1, \bar{a})). \tag{2}$$

Um das Induktionsaxiom für φ zu verifizieren haben wir nun zu zeigen, dass für alle $b \in M$ gilt $M \models \varphi(b, \bar{a})$. Wir schreiben $\varphi(x, \bar{a}) \equiv \exists \bar{y} \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a})$, wobei $\hat{\varphi} \in \Pi_n$.

Wir beobachten zuerst: Wenn wir uns auf $x \leq b$ einschränken, gibt es ein c, sodass es entweder Zeugen $\bar{y} \leq c$ für $\hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a})$ gibt oder gar keinen. Es gilt nämlich:

$$M \models \forall x \leq b \exists \bar{y} \underbrace{(\hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a}) \vee \forall \bar{z} \neg \hat{\varphi}(x, \bar{z}, \bar{a}))}_{=:\chi},$$

wobei $\chi \in \Pi_{n+1} \subseteq \Sigma_{n+2}$. Da $M \models Coll_{n+2}$, erfüllt M das Collection Axiom für χ, das heißt es existiert ein $c \in M$, sodass

$$M \models \forall x \leq b \exists \bar{y} < c(\hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a}) \vee \forall z \neg \hat{\varphi}(x, z, \bar{a}))$$

und daraus folgt wiederum

$$M \models \forall x \leq b(\exists y \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a}) \leftrightarrow \exists \bar{y} < c \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a})).$$

Die Formel $\exists \bar{y} < c \hat{\varphi}(x, \bar{y}, \bar{a})$ ist in $\Pi_n(Coll_n)$ und somit ist sie nach Proposition 2.2 in M äquivalent zu einer Π_n-Formel $\psi(x, \bar{a})$. Aus (2) folgt nun

$$M \models \psi(0, \bar{a}) \wedge \forall x < b(\psi(x, \bar{a}) \rightarrow \psi(x + 1, \bar{a})).$$

Die Formel $\tilde{\psi}(x, \bar{a}) \equiv (x > b) \vee \psi(x, \bar{a})$ ist nun wieder Π_n und erfüllt nun

$$M \models \tilde{\psi}(0, \bar{a}) \wedge \forall x(\tilde{\psi}(x, \bar{a}) \rightarrow \tilde{\psi}(x + 1, \bar{a}))$$

und somit können wir das Induktionsaxiom für $\tilde{\psi}$ anwenden und erhalten $M \models \forall x \tilde{\psi}(x, \bar{a})$ und somit insbesondere $M \models \psi(b, \bar{a})$, also auch $M \models \exists \bar{y} < c \hat{\varphi}(b, \bar{y}, \bar{a})$ und schlussendlich $M \models \varphi(b, \bar{a})$. □

Zusammenfassend erhalten wir nun

Satz 2.5. *PA ist äquivalent zu $I\Delta_0 \cup Coll$.*

Beweis. Aus Proposition 2.3 folgt sofort $PA \vdash I\Delta_0 \cup Coll$. Umgekehrt folgt aus Proposition 2.4 und Lemma 2.1 dass $I\Sigma_n \cup Coll \vdash I\Sigma_{n+1}$. Damit folgt per Induktion nun leicht, dass $I\Delta_0 \cup Coll \vdash PA$. □

3 Gaifmans Splitting Theorem

3.1 Erweiterungen

Wir betrachten im folgenden zwei $\mathscr{L}_A$-Modelle M und N. Wir notieren die dazugehörigen Funktionen und Konstanten als $0_M, 1_M, +_M$, etc.

Definition 3.1. M ist ein Untermodell von N, in Zeichen $M \subseteq N$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Die Trägermenge von M ist eine Teilmenge der Trägermenge von N.
- $0_N, 1_N \in M$
- Die Trägermenge von M ist abgeschlossenen unter den Operationen von N, das heißt deren Einschränkungen

$$+_N|_{M\times M} : M \times M \to M \qquad \cdot_N|_{M\times M} : M \times M \to M$$

  sind wohldefiniert.
- Die Interpretation von $\mathscr{L}_A$ in M ist die Einschränkung der Interpretation von $\mathscr{L}_A$ in N.

In dieser Situation sagen wir auch: N ist eine Erweiterung von M.

Wir geben nun zwei Spezialfälle von Erweiterungen an, die im folgenden wichtig sein werden:

Definition 3.2. M ist ein Anfangssegment von N, in Zeichen $M \subseteq_e N$, falls M ein Untermodell von N ist und zusätzlich

$$\forall x \in M \forall y \in N : (N \models y < x) \Rightarrow y \in M$$

gilt. In dieser Situation sagen wir auch: N ist eine Enderweiterung von M.

Ein einfaches Beispiel dafür: Das Standardmodell $\mathbb{N}$ ist ein Anfangsabschnitt eines jeden Modells M von PA. Falls M ein Nicht-Standard-Modell ist, ist $\mathbb{N}$ insbesondere ein echter Anfangsabschnitt von $\mathbb{N}$.

Definition 3.3. Sei M ein Untermodell von N. Dann heißt M cofinal in N, in Zeichen $M \subseteq_{cf} N$, falls

$$\forall a \in N \exists b \in M \ : N \models (b \geq a).$$

In dieser Situation sagen wir auch: N ist eine cofinale Erweiterung von M.

Wir wollen uns überlegen, ob nicht-triviale Erweiterungen dieses Typs überhaupt existieren. Die Situation ist hier nicht mehr so einfach wie im Fall der Enderweiterungen.

Das Standardmodell $\mathbb{N}$ erlaubt keine echten cofinalen Erweiterungen, denn schon PA^- verbietet, das zwischen zwei Standardzahlen eine Nicht-Standardzahl liegt, siehe auch [1, Theorem 2.2].

Für Nicht-Standardmodelle ist die Situation hingegen anders: Jedes Nicht-Standard-Modell von PA hat echte cofinale Erweiterungen:

Beispiel 3.4. Sei $M \models PA$ ein Nicht-Standardmodell. Wir fügen nun jedes $a \in M$ sowie ein weiteres neues Konstantensymbol c zur Sprache $\mathscr{L}_A$ hinzu. Sei $b \in M$ eine fixe Nicht-Standardzahl. Wir betrachten nun die Theorie

$$\{\varphi(\bar{a}) : \bar{a} \in M, \varphi\ \mathscr{L}_A\text{-Formel}, M \models \varphi(\bar{a})\} \cup \{c \neq a : a \in M\} \cup \{c < b\}.$$

Da jede Nicht-Standardzahl und somit insbesondere auch b unendlich viele Vorgänger hat, haben alle endlichen Teilmengen dieser Theorie ein Modell. Nach dem Kompaktheitssatz hat somit auch diese Theorie ein Modell N und dieses ist offenbar eine echte Erweiterung von M, da die Interpretation von c nicht in M liegen kann. Wir setzen nun

$$K := \{d \in N : \text{Es gibt ein } a \in M, \text{ sodass } N \models d < a\}.$$

Offenbar ist M cofinal in K und wegen $c < b$ enthält K auch die Interpretation von c und ist somit eine echte Erweiterung von M.

Im nächsten Abschnitt werden wir Gaifmans Splitting Theorem beweisen. Es besagt, dass wir mit diesen beiden Typen von Erweiterungen im wesentlichen alle Erweiterungen von Modellen der Peano-Arithmetik verstanden haben: Für alle Modelle $M \subseteq N$ von PA existiert ein eindeutiges $K \models PA$, sodass $M \subseteq_{cf} K \subseteq_e N$.

Dazu benötigen wir zunächst noch eine weitere Begriffsbildung:

Definition 3.5. Sei Γ eine Menge von $\mathscr{L}_A$-Formeln. M ist ein Γ-elementares Untermodell von N, in Zeichen $M \prec_\Gamma N$, falls M ein Untermodell von N ist und zusätzlich für jede Formel $\varphi(\bar{x}) \in \Gamma$ und jedes $\bar{a} \in M$ gilt:

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}).$$

In dieser Situation sagen wir auch N ist eine Γ-elementare Erweiterung von M. Ist Γ die Menge aller $\mathscr{L}_A$-Formeln, so sprechen wir einfach von einer elementaren Unterstruktur bzw. Erweiterung und schreiben $M \prec N$.

Folgende einfache Tatsachen werden wir später noch benötigen:

Lemma 3.6. *Für $\mathscr{L}_A$-Strukturen M und N gilt:*

(a) Seien $M \subseteq N$ und bezeichne O die Menge der quantorenfreien Formeln. Dann gilt $M \prec_O N$.

(b) Seien $M \subseteq_e N$. Dann gilt $M \prec_{\Delta_0} N$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a})$ für alle $\bar{a} \in M$ per Induktion über den Formelaufbau. Der Induktionsschritt für logische Verknüpfungen ist trivial.

Daher reicht es für (a), die Aussage für Atomformeln zu zeigen: Für Atomformeln folgt $M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a})$ allerdings unmittelbar aus der Definition der Interpretation von $\varphi(\bar{a})$ sowie aus der Tatsache, dass die Interpretation von N eingeschränkt auf M mit jener von M übereinstimmt.

Für (b) müssen wir noch den Induktionsschritt für beschränkte Quantoren unter der stärkeren Voraussetzung $M \subseteq_e N$ zeigen. Dafür reicht es, den beschränkten Allquantor zu betrachten. Sei also $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ eine Formel, sodass für alle $\bar{a}, \bar{b} \in$ gilt $M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$.

Sei also $\bar{a} \in M$ und t ein Term. Offenbar ist nun $t(\bar{a}) \in M$ und da M ein Anfangsabschnitt von N ist folgt somit $\{m \in M : m < t(\bar{a})\} = \{n \in N : n < t(\bar{a})\}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} & M \models \forall \bar{x} < t(\bar{a})\, \varphi(\bar{a}, \bar{x}) \\ \Leftrightarrow\ & \forall \bar{b} \in M, \bar{b} < t(\bar{a}) : M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \\ \Leftrightarrow\ & \forall \bar{b} \in N, \bar{b} < t(\bar{a}) : N \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \\ \Leftrightarrow\ & N \models \forall \bar{x} < t(\bar{a})\, \varphi(\bar{a}, \bar{x}). \end{aligned}$$

□

3.2 Gaifmans Splitting Theorem

Proposition 3.7. *Seien $M \subseteq_{cf} N$ beides Modelle von PA^-, die die Collection Axiome erfüllen. Dann folgt aus $M \prec_{\Delta_0} N$ schon $M \prec N$.*

Beweis. Wir zeigen $M \prec N$ per Induktion über die Formelkomplexität. Die Voraussetzung $M \prec_{\Delta_0} N$ ist der Induktionsanfang und für den Induktionsschritt haben wir zu zeigen, dass aus $M \prec_{\Sigma_n} N$ auch $M \prec_{\Sigma_{n+1}} N$ folgt.

Zuerst bemerken wir, dass $M \prec_{\Sigma_n} N$ äquivalent zu $M \prec_{\Pi_n} N$ ist, da die Π_n-Formeln (bis auf logische Äquivalenz) genau die Negationen der Σ_n-Formeln sind.

Sei nun $\varphi(\bar{a})$ eine beliebige Σ_{n+1}-Formel, dann gibt es eine Π_n-Formel $\hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x})$, sodass $\varphi \equiv \exists \bar{x} \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x})$.

Wir nehmen zuerst an, dass $M \models \varphi(\bar{a})$. Dann gibt es ein $\bar{b} \in M$, sodass $M \models \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$. Wegen $M \subseteq N$ ist auch $\bar{b} \in N$ und wegen der Induktionsvoraussetzung folgt nun $N \models \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$ und somit auch $M \models \varphi(\bar{a})$.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $N \models \varphi(\bar{a})$. Wegen der Cofinalität von M existiert ein $b \in M$, sodass $N \models \exists \bar{x} < b\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x})$. Nach Proposition 2.2 gibt es nun eine Π_n-Formel ψ, sodass $Coll_n \vdash \psi \leftrightarrow \exists \bar{x} < b\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x})$. Da M und N die Collection Axiome erfüllen erhalten wir nun aus der Induktionsvoraussetzung:

$$N \models \exists \bar{x} < b\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x}) \Leftrightarrow N \models \psi \Leftrightarrow M \models \psi \Leftrightarrow M \models \exists \bar{x} < b\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x})$$

und somit insbesondere $M \models \exists \bar{x}\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{x})$. □

Satz 3.8. *Seien $M \subseteq_{cf} N$ beides Modelle von PA^-, wobei M sogar ein Modell von PA ist. Falls $M \prec_{\Delta_0} N$, so folgt $M \prec N$ und somit insbesondere $N \models PA$.*

Bemerkung 3.9. Für den Beweis dieses Satzes benötigen ein Konzept um Tupel mit einzelnen Zahlen zu codieren. Dazu wird im Wesentlichen eine solche Codierung, die im Standardmodell $\mathbb{N}$ wohlbekannt ist, in PA formalisiert. An dieser Stelle werden nur Notationen erklärt und die im folgenden Beweis von Satz 3.8 benötigten Eigenschaften angeführt. Genaueres kann in [1, Kapitel 5.2] nachgelesen werden.

Der Ausdruck $(x)_y = z$ soll bedeuten "der y-te Eintrag des mit x codierten Tupels lautet z". Diese Formel ist eine Δ_0-Formel und folgende Eigenschaften lassen sich in PA beweisen:

(i) $\forall x \exists y (y)_0 = x$

(ii) $\forall x, y, z \exists w (\forall i < z((w)_i = (y)_i) \wedge (w)_z = x)$.

Wir überlegen uns nun noch, wie man damit endlich viele Zeugen eines Existenzsatzes zu einem Tupel zusammenfassen kann. Sei also M ein Modell von PA, seien $\bar{a}, b \in M$ und gelte

$$M \models \forall y < b \exists z \varphi(\bar{a}, y, z). \tag{3}$$

Dann definieren wir die Formel $\psi(\bar{a}, b, y)$ als

$$\psi(\bar{a}, b, x) \equiv (x < b) \to \exists w \forall y \leq x \forall z ((w)_y = z \to \varphi(\bar{a}, y, z))$$

Aus (3) sowie (i) folgt nun $M \models \psi(\bar{a}, b, 0)$ und aus (3) sowie (ii) folgt $M \models \psi(\bar{a}, b, z) \to \psi(\bar{a}, b, z+1)$. Daher folgt mit Induktion auf ψ nun $M \models \forall z \psi(\bar{a}, b, z)$ und daraus folgt nun leicht:

$$M \models \exists w \forall y < b \forall z (z = (w)_y \to \varphi(\bar{a}, y, z))).$$

Lemma 3.10. *Sei $M \subseteq N$, $n \geq 1$ und gelte für alle Σ_n-Formeln $\varphi(\bar{x})$ und für alle $\bar{a} \in M$*

$$N \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow M \models \varphi(\bar{a}).$$

Dann gilt sogar $M \prec_{\Sigma_n} N$.

Beweis. Sei $\varphi(\bar{x})$ eine beliebige Σ_n-Formel und $\bar{a} \in M$, sodass $M \models \varphi(\bar{a})$. Wir haben nun zu zeigen, dass auch $N \models \varphi(\bar{a})$.

Wir können schreiben $\varphi(\bar{x}) \equiv \exists \bar{y} \hat{\varphi}(\bar{x}, \bar{y})$, wobei $\hat{\varphi} \in \Pi_{n-1}$. Da $\neg\hat{\varphi} \in \Sigma_n$ können wir nun wie folgt argumentieren: Da $M \models \varphi(\bar{a})$ gibt es $\bar{b} \in M \subseteq N$, sodass $M \models \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$ und daher auch $M \not\models \neg\hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$ und somit nach der Kontraposition der Voraussetzung auch $N \not\models \neg\hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$. Somit $N \models \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{b})$, also $N \models \varphi(\bar{a})$. □

Beweis von Satz 3.8. Wir zeigen nun per Induktion über n, dass $M \prec_{\Sigma_n} N$. Für den Induktionsanfang zeigen wir $M \prec_{\Sigma_2} N$. Nach Lemma 3.10 genügt es zu zeigen, dass für eine beliebige Σ_2-Formel $\varphi(\bar{x})$ und $\bar{a} \in M$ gilt $N \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow M \models \varphi(\bar{a})$.

Dazu schreiben wir $\varphi(\bar{x}) \equiv \exists \bar{y} \forall \bar{z}\, \hat{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, wobei $\hat{\varphi} \in \Delta_0$. Sei $\bar{a} \in M$, sodass $N \models \varphi(\bar{a})$. Wegen der Cofinalität von M in N gibt es nun ein $b \in M$, sodass $N \models \exists \bar{y} < b \forall \bar{z}\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z})$. Insbesondere gilt nun für alle $c \in M$ auch $N \models \exists \bar{y} < b \forall \bar{z} < c\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z})$, wobei diese Formel nun Δ_0 ist. Da wir $M \prec_{\Delta_0} N$ vorausgesetzt haben gilt nun also auch $M \models \exists \bar{y} < b \forall \bar{z} < c\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z})$. Da $c \in$ beliebig war gilt also auch

$$M \models \forall c \exists \bar{y} < b \forall \bar{z} < c\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z}),$$

woraus mit dem Collection Axiom für $\neg\hat{\varphi}$, siehe (1), folgt $M \models \exists \bar{y} < b \forall \bar{z}\, \hat{\varphi}(\bar{a}, \bar{y}, \bar{z})$ und somit insbesondere $M \models \varphi(\bar{a})$.

Für den Induktionsschritt haben wir nun zeigen, dass $M \prec_{\Sigma_n} N \Rightarrow M \prec_{\Sigma_{n+1}} N$, wobei $n \geq 2$. Nach Lemma 3.10 reicht es zu zeigen, dass für jede Σ_{n+1}-Formel $\psi(\bar{x})$ und jedes $\bar{a} \in M$ gilt

$N \models \psi(\bar{a}) \Rightarrow M \models \psi(\bar{a})$. Stattdessen zeigen wir, dass für jede Π_{n+1}-Formel $\varphi(\bar{x})$ und jedes $a \in M$ gilt $M \models \varphi(\bar{a}) \Rightarrow N \models \varphi(\bar{a})$.

Seien also $\varphi(\bar{x})$ und $\bar{a} \in M$, sodass $M \models \varphi(\bar{a})$ und schreiben wir $\varphi(\bar{x}) \equiv \forall \bar{y} \exists \bar{z} \hat{\varphi}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, wobei $\hat{\varphi} \in \Pi_{n-1}$. Unter Verwendung der Δ_0-Codierung von Tupeln, siehe auch Bemerkung 3.9, können wir annehmen, dass $\bar{y}$ und $\bar{z}$ einfach Skalare y und z sind.

Da M cofinal in N ist, reicht es für alle $b \in M$ zu zeigen, dass

$$M \models \forall y < b \exists z \hat{\varphi}(\bar{a}, y, z) \Rightarrow N \models \forall y < b \exists z \hat{\varphi}(\bar{a}, y, z).$$

Aus $M \models \forall y < b \exists z \hat{\varphi}(\bar{a}, y, z)$ folgt aber mit unserer Überlegung aus Bemerkung 3.9

$$M \models \exists w \forall y < b \forall z (z = (w)_y \rightarrow \hat{\varphi}(\bar{a}, y, z))),$$

wobei letztere Formel nun aus Σ_n ist. Damit können wir die Induktionshypothese anwenden und erhalten

$$N \models \exists w \forall y < b \forall z (z = (w)_y \rightarrow \hat{\varphi}(\bar{a}, y, z))).$$

Da der Π_2-Satz $\forall y, w \exists z (z = (w)_y)$ in PA beweisbar und somit in M und somit in N wahr ist, folgt nun auch

$$N \models \forall y < b \exists z \hat{\varphi}(\bar{a}, y, z).$$

□

Man beachte, dass wir in der Argumentation in Bemerkung 3.9 das Induktionsaxiom entscheidend verwendet haben. Um also im Vergleich zu Proposition 3.7 die Voraussetzungen an N abzuschwächen (N muss nur mehr ein Modell von PA^- sein und nicht Collection erfüllen), mussten wir die Voraussetzungen an M verstärken: Es muss nun PA erfüllen; laut Satz 2.5 entspricht dies genau der zusätzlichen Forderung $M \models I\Delta_0$.

Eine Formel heißt $\exists_1$-Formel, falls sie von der Form $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x})$ ist, wobei φ quantorenfrei ist. Der folgende Satz ist sehr tiefliegend und wir können ihn hier nicht beweisen:

Satz 3.11 (MRDP-Theorem). *Sei $\varphi(\bar{x})$ eine Σ_1-Formel. Dann gibt es eine $\exists_1$-Formel $\psi(\bar{x})$, sodass $PA \vdash \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.*

Die für uns entscheidende Anwendung des MRDP-Theorems ist die folgende Beobachtung:

Proposition 3.12. *Seien $M \subseteq N$ beides Modelle von PA. Dann gilt $M \prec_{\Delta_0} N$.*

Beweis. Sei $\theta(\bar{x})$ eine beliebige Δ_0-Formel. Nach dem MRDP-Theorem gibt es also quantorenfreie Formeln $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ und $\psi(\bar{x}, \bar{z})$, sodass

$$PA \vdash \forall \bar{x}(\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \exists \bar{y} \varphi(\bar{x}, \bar{y}))$$
$$PA \vdash \forall \bar{x}(\neg\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \exists \bar{z} \psi(\bar{x}, \bar{z})).$$

Sei nun $\bar{a} \in M$ beliebig. Falls $M \models \theta(\bar{a})$, gibt es ein $\bar{b} \in M$, sodass $M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$. Dann gilt nach Lemma 3.6(a) auch $N \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$ und somit $N \models \theta(\bar{a})$. Falls $M \not\models \theta(\bar{a})$, dann folgt $M \models \neg\theta(\bar{a})$. Analog zu vorher gibt es dann ein $\bar{b} \in M$, sodass $M \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$ und somit auch $N \models \psi(\bar{a}, \bar{b})$. Das heißt $N \models \neg\theta(\bar{a})$ und $N \not\models \theta(\bar{a})$. □

Der folgende Satz ist nur mehr eine Zusammenfassung unserer bisherigen Ergebnisse:

Satz 3.13. *Seien $M \subseteq_{cf} N$ beides Modelle von PA^-, wobei M sogar ein Modell von PA ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $M \prec_{\Delta_0} N$

(ii) $N \models PA$

(iii) $M \prec N$.

Beweis. Die Implikation $(i) \to (iii)$ ist Satz 3.8. Die Implikation $(iii) \to (ii)$ ist trivial. Die Implikation $(ii) \to (i)$ ist Proposition 3.12. $\square$

Wir haben nun alles, was wir benötigen, um das Gaifman Splitting Theorem zu beweisen:

Satz 3.14 (Gaifman Splitting Theorem)**.** *Seien $M \subseteq N$ beides Modelle von PA. Dann gibt es ein eindeutiges PA-Modell K, sodass $M \subseteq_{cf} K \subseteq_e N$.*

Beweis. Die einzig mögliche Wahl ist

$$K = \{a \in N : \text{Es existiert ein } b \in M, \text{ sodass } N \models a < b\},$$

denn für jedes $K' \supsetneq K$ wäre M nicht cofinal in K' und für jedes $K' \subsetneq K$ ist N keine Enderweiterung von K'. Die Cofinialität von K in N ist offensichtlich.

Der einzig nicht-triviale Schritt in diesem Beweis ist also zu zeigen, dass $K \models PA$. Nach Satz 3.13 reicht es zu zeigen, dass $M \prec_{\Delta_0} K$.

Aus $K \subseteq_e N$ folgt mit Lemma 3.6(b) auch $K \prec_{\Delta_0} N$. Aus Proposition 3.12 folgt $M \prec_{\Delta_0} N$. Für eine beliebige Δ_0-Formel $\varphi(\bar{x})$ und $\bar{a} \in M$ gilt nun

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow K \models \varphi(\bar{a}) \tag{4}$$

und somit $M \prec_{\Delta_0} K$. $\square$

In Beispiel 3.4 haben wir gezeigt, dass jedes Nicht-Standardmodell M eine echte cofinale Erweiterung K hat. Wir können dies nun leicht verschärfen: Da das so konstruierte K ein Modell von PA ist, folgt mit Satz 3.13, dass K sogar eine cofinale elementare Erweiterung ist.

Wir beschließen die Arbeit mit folgender Bemerkung:

Bemerkung 3.15. Die Aussage des Gaifman Splitting Theorems wirkt sehr natürlich, daher stellt sich die Frage, ob die Anwendung des sehr starken MRDP-Theorems wirklich notwendig ist. Die Antwort lautet ja. Unter der Annahme, dass das MRDP-Theorem falsch ist, kann man PA-Modelle $M \subseteq N$ konstruieren, sodass es *kein* PA-Modell K gibt, das $M \subseteq_{cf} K \subseteq_e N$ erfüllt.

Falls das MRPD-Theorem falsch ist, gibt es eine Δ_0-Formel $\theta(\bar{x})$, die in PA zu keiner $\forall_1$-Formel äquivalent ist. Denn sonst wäre durch Übergang zur Negation jede Δ_0-Formel äquivalent zu einer $\exists_1$-Formel und somit auch jede Σ_1-Formel äquivalent zu einer $\exists_1$-Formel, was aber genau die Aussage des MRDP-Theorems ist.

Für eine derartige Formel θ gilt jedenfalls auch $PA \not\vdash \forall\bar{x}\theta(\bar{x})$ und $PA \not\vdash \forall\bar{x}\neg\theta(\bar{x})$, denn ansonsten wäre $\theta(\bar{x})$ über PA äquivalent zu $0 = 1$ bzw $0 \neq 1$, was insbesondere $\forall_1$-Formeln sind.

Für eine derartige Formel $\theta(\bar{x})$ und neue Konstantensymbole $\bar{c}$ betrachten wir dann die $\mathscr{L}_A \cup \{\bar{c}\}$-Theorie

$$T := PA \cup \{\varphi(\bar{c}) : \varphi \text{ ist eine } \forall_1\text{-Formel, die in } PA \cup \{\theta(\bar{c})\} \text{ beweisbar ist}\} \cup \{\neg\theta(\bar{c})\}.$$

Die Theorie $T' := T \setminus \{\neg\theta(\bar{c})\}$ ist offensichtlich konsistent. Für die Konsistenz von T reicht es also zu zeigen, dass $T' \nvdash \theta(\bar{c})$. Falls $T' \vdash \theta(\bar{c})$, gäbe es eine[1] $\forall_1$-Formel $\varphi(\bar{c})$, sodass $PA \cup \{\theta(\bar{c})\} \vdash \varphi(\bar{c})$ und $PA \cup \{\varphi(\bar{c})\} \vdash \theta(\bar{c})$. Mit dem Deduktionstheorem und dem Generalisierungstheorem können wir nun schließen, dass $PA \vdash \forall\bar{x}(\theta(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}))$. Dies ist nun ein Widerspruch, da wir angenommen haben, dass $\theta(\bar{x})$ zu keiner $\forall_1$-Formel in PA beweisbar äquivalent ist.

Somit ist T konsistent und hat also ein Modell M.

Wir betrachten nun eine weitere $\mathscr{L}_A \cup \{\bar{c}\} \cup M$-Theorie

$$S := PA \cup \{\theta(\bar{c})\} \cup \{\chi(\bar{a}, \bar{c}) : \ \bar{a} \in M, \ \chi \text{ ist quantorenfrei und } M \models \chi(\bar{a}, \bar{c}) \ \}.$$

Die Theorie $S' := S \setminus \{\theta(\bar{c})\}$ ist konsistent, denn M ist ein Modell für S', wenn man die Konstantensymbole $a \in M$ durch sich selbst interpretiert. Somit reicht es für die Konsistenz von S zu zeigen, dass $S' \nvdash \neg\theta(\bar{c})$. Angenommen, das wäre dann Fall, gäbe es eine[2] quantorenfreie Formel $\chi(\bar{a}, \bar{c})$, sodass $PA \cup \{\chi(\bar{a}, \bar{c})\} \vdash \neg\theta(\bar{c})$. Mit dem Deduktionstheorem folgt $PA \vdash \chi(\bar{a}, \bar{c}) \to \neg\theta(\bar{c})$ somit auch $PA \vdash \theta(\bar{c}) \to \neg\chi(\bar{a}, \bar{c})$ und nach dem Deduktionstheorem nun $PA \cup \{\theta(\bar{c})\} \vdash \neg\chi(\bar{a}, \bar{c})$ und mit dem Generalisierungstheorem $PA \cup \{\theta(\bar{c})\} \vdash \forall\bar{y}\neg\chi(\bar{y}, \bar{c})$.

Da $\forall\bar{y}\neg\chi(\bar{y}, \bar{c})$ auch eine $\forall_1$-Formel ist, ist diese in T enthalten. Da M ein Modell von T ist, kann also nicht $M \models \chi(\bar{a}, \bar{c})$ gelten, insbesondere ist $\chi(\bar{a}, \bar{c})$ nicht in S' enthalten. Dies ist aber ein Widerspruch, da die Formel $\chi(\bar{a}, \bar{c})$ aus einem S'-Beweis von $\neg\theta(\bar{c})$ stammt. Daher gilt $S' \nvdash \neg\theta(\bar{c})$.

Somit ist S konsistent und hat ein Modell N.

Wir zeigen nun, dass es eine injektive Abbildung $\iota : M \to N$ gibt, die mit den Operationen verträglich ist: Da jedes $a \in M$ ein Konstantensymbol in der Sprache $\mathscr{L}_A \cup \{\bar{c}\} \cup M$ ist, können wir $\iota(a)$ als die Interpretation von a in N definieren. Für $a_1 \neq a_2$ aus M gilt $M \models a_1 \neq a_2$, daher ist die Formel $a_1 \neq a_2$ in der Theorie S enthalten, also in N erfüllt, was genau $\iota(a_1) \neq \iota(a_2)$ bedeutet.

Auf ähnliche Weise kann man die Verträglichkeit von ι mit den Operationen und der Relation $<$ zeigen, wir führen das am Beispiel der Addition aus: Es ist also zu zeigen $\iota(a_1 +_M a_2) = \iota(a_1) +_N \iota(a_2)$. Seien $a_1, a_2 \in M$ beliebig und sei $a_3 := a_1 +_M a_2$. Dann gilt $M \models a_1 + a_2 = a_3$ und somit ist die Formel $a_1 + a_2 = a_3$ in S enthalten, also in N erfüllt. Das heißt $\iota(a_1) +_N \iota(a_2) = \iota(a_3) = \iota(a_1 +_M a_2)$.

M ist also isomorph zu $\iota(M) \subseteq N$, das heißt wir können annehmen, dass $M \subseteq N$ gilt. Offenbar sind M und N nun Modelle von PA. Nach dem Gaifman Splitting Theorem 3.14 gibt es nun ein $K \models PA$, sodass $M \subseteq_{cf} K \subseteq_e N$. In Formel (4) aus dem Beweis von Satz 3.14 sehen wir dass in dieser Situation für alle Δ_0-Formeln φ und alle $\bar{a} \in M$ gilt

$$M \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow K \models \varphi(\bar{a}).$$

[1] A priori können es auch endlich viele sein, aber deren Konjunktion ist logisch äquivalent zu einer $\forall_1$-Formel und ebenfalls in $PA \cup \{\theta(\bar{c})\}$ beweisbar. Es ist aber notwendigerweise mindestens eine, denn wir haben schon bemerkt, dass $PA \nvdash \forall\bar{x}\theta(x)$.

[2] Auch hier könnten es a priori endlich viele sein und nach einer analogen Argumentation kann man annehmen, dass es eine ist. Es ist aber ebenfalls tatsächlich mindestens eine, denn $PA \nvdash \forall\bar{x}\theta(x)$. Dass es mindestens eine solche Formel gibt wird für den Widerspruchsbeweis im folgenden entscheidend sind.

Für die Δ_0-Formel $\theta(\bar{x})$ und $\bar{a}$ die Interpretation von $\bar{c}$ in M gilt allerdings $M \not\models \theta(\bar{a})$ und $N \models \theta(\bar{a})$. Dies ist also ein Widerspruch und somit kann es kein K mit den geforderten Eigenschaften geben. Das Gaifman Splitting Theorem ist also unter der Annahme dass das MRDP-Theorem in PA falsch ist, widerlegt.

Literatur

[1] Richard Kaye *Models of Peano Arithmetic* Clarendon Presse, 1991, Oxford