Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Seminararbeit

Untertheorien von PA

Autor
Paul Hotzy
Matr.Nr.: 01426503

Betreuer
Assoc. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn.
Stefan Hetzl

Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8-10
1040 Wien, Österreich

Abgabedatum: 24. Januar 2021

1 Einführung

Diese Seminararbeit beruht zu großen Teilen auf dem Buch *Models of Peano Arithmetik* von Richard Kaye [2] und diskutiert vor allem die Resultate aus Kapitel 10. Es wird gezeigt, dass die Untertheorien $I\Sigma_n$ und $B\Sigma_n$ von PA (Peano Arithmetik) eine Hierarchie bilden. Daraus kann unter anderem gefolgert werden, dass PA nicht endlich axiomatisierbar ist. Diverse grundlegende Begrifflichkeiten und Definitionen der Prädikatenlogik und der Modelltheorie werden für den folgenden Text vorausgesetzt, diese werden in den meisten Fachbüchern für Prädikatenlogik erster Stufe und/oder Modelltheorie, wie zum Beispiel in [1] oder [2, Kapitel 0], eingeführt. In folgenden Unterkapiteln werden die wichtigsten Definitionen und Notationen, die darüber hinausgehen, angeführt. Für eine ausführlichere Beschreibung sei an dieser Stelle auf Kapitel 1-5, 7 und 9 von [2] verwiesen.

1.1 Vorbemerkungen

Die Sprache der Arithmetik $\mathcal{L}_A$ ist jene Sprache erster Ordnung welche, abgesehen von den logischen Symbolen $\neg, \exists$ und $\forall$, aus den Konstantensymbolen 0 und 1, dem binären Relationssymbol $<$ und den binären Funktionssymbolen $+$ und $\cdot$ besteht.

$\mathcal{L}$-Strukturen (auch: $\mathcal{L}$-Modelle) für eine gegebene Sprache erster Ordnung $\mathcal{L}$ werden mit $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{K}$ bezeichnet. Da wir uns stets mit $\mathcal{L}_A$-Strukturen beschäftigen nennen wir diese fortan schlichtweg Modelle (oder Strukturen), außer es ist explizit von einer bestimmten Sprache die Rede. Außerdem werden wir nicht strikt zwischen einem Modell $\mathfrak{M}$, also einer nicht-leeren Grundmenge (Universum) M und der zugehörigen Interpretation I, und dem Universum des Modells M selbst unterschieden und notieren daher beide mit M. Aus dem Kontext ist meist klar, welches Objekt gemeint ist

Unterstrukturen (auch: Untermodelle) M von einem weiteren Modell N in derselben Sprache sind Modelle deren Grundmenge von M eine Teilmenge von N ist, die alle Konstanten von N enthält und abgeschlossen bezüglich der Funktionen von (dem Modell) N ist. Außerdem sollen alle nicht-logischen Symbole in der zugrundeliegenden Sprache entsprechend der Einschränkung der Interpretation von I des Modells N auf M interpretiert werden. Dieser Zusammenhang wird mit $M \subseteq N$ notiert - es ist meist aus dem Kontext klar wann die Teilmengenrelation zwischen den Universen der Modelle oder die Unterstrukturrelation gemeint ist.

Vereinfachte Notationen werden darüber hinaus für endliche Folgen von Elementen eines Modells (also seiner Grundmenge) mit $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ bezeichnen. Mit $\bar{a} \in M$ meinen wir dann $\bar{a} = (a_1, \dots, a_l) \in M^l$. Analog notieren wir endliche Folgen von Variablen mit $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ und schreiben statt $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_l(\dots)$ einfach $\exists \bar{x}(\dots)$. Selbige Notation gilt auch für den Allquantor. Außerdem werden wir die Notation für die Gültigkeit einer Formel unter einer bestimmten Variablenbelegung b missbräuchlich verwenden. Wir schreiben für eine Formel $\varphi(\bar{x})$, dass $M \models \varphi(\bar{a})$ für ein $\bar{a} \in M$ gilt, wenn wir meinen, dass eine Belegung b (nämlich jene Belegung die $\bar{x}$ auf $\bar{a}$ abbildet) gibt, sodass $M \models \varphi(\bar{x})[b]$ - also das Modell die Formel $\varphi(\bar{x})$ unter der Belegung b erfüllt. Wir führen nun folgende Abkürzungen für die beschränkte Quantifikation von Formeln ein. Sei t ein Term in der Sprache $\mathcal{L}$, dann sind $\exists x < t(\dots)$ und $\forall x < t(\dots)$ Abkürzungen für die Formeln $\exists x(x < t \wedge \dots)$ und $\forall x(x < t \rightarrow \dots)$. Analog verwenden wir die Abkürzungen in denen $x < t$ mit $x \leq t$ ersetzt wird, wobei $x \leq y$ wiederum eine Abkürzung für die Formel $x < y \vee x = y$ darstellt.

1.2 Definitionen

Standard- und Nichtstandardmodelle werden folgendermaßen unterschieden. Als Standardmodelle werden in diesem Text jene Modelle bezeichnet, die isomorph zu dem Modell der natürlichen Zahlen sind. Dieses Modell wird oft als *das Standardmodell* bezeichnet und ist jenes Modell in der Sprache $\mathcal{L}_A$, dessen Universum die Menge aller natürlichen Zahlen umfasst und die übliche Interpretation von Konstanten, Funktionen und Relationen besitzt. Nicht-isomorphe Modelle zu $\mathbb{N}$ werden als *Nichtstandardmodelle* bezeichnet. Von besonderem Interesse im Zusammenhang solcher

Modelle ist das formale System der Peano Arithmetik PA. Dieses System besteht aus den Axiomen der Basistheorie PA^- gegeben in [2, Kapitel 2] und den Induktionsaxiomen $I_x\varphi$ (oder nur $I\varphi$ wenn klar ersichtlich ist welche Variable die Induktionsvariable ist) gegeben durch

$$\forall \bar{y}(\varphi(0,\bar{y}) \wedge \forall x(\varphi(x,\bar{y}) \to \varphi(x+1,\bar{y})) \to \forall x \varphi(x,\bar{y})) \tag{1}$$

für $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(x,\bar{y})$. Für eine Menge von $\mathcal{L}_A$-Formeln Γ ist $I\Gamma$ die Menge aller $I\varphi$ mit $\varphi \in \Gamma$. Ein weiteres wichtiges Axiomenschema ist das Prinzip der kleinsten Zahl (engl. *least-number principle*), diese Formeln $L\varphi$ sind gegeben durch

$$\forall \bar{y}(\exists x \varphi(x,\bar{y}) \to \exists z(\varphi(z,\bar{y}) \wedge \forall w < z \neg\varphi(w,\bar{y})) \tag{2}$$

für $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(x,\bar{y})$. Analog wie zuvor ist $L\Gamma$ definiert.
Wir führen des Weiteren die sogenannten Sammlungsaxiome ein. Diese sind gegeben durch Formeln $B\varphi$, diese sind definiert durch

$$\forall \bar{z}, t(\forall x < t \exists \bar{y} \varphi(x,\bar{y},\bar{z}) \to \exists s \forall x < t \exists \bar{y} < s \varphi(x,\bar{y},\bar{z})) \tag{3}$$

für $\mathcal{L}_A$-Formeln $\varphi(x,\bar{y})$. Analog wie zuvor ist $B\Gamma$ definiert.

Arithmetische Hierarchie. Die Menge aller $\mathcal{L}_A$-Formeln in denen alle Quantoren beschränkt sind wird mit $\Delta_0 = \Pi_0 = \Sigma_0$ bezeichnet. Für alle $n \geq 1$ ist Σ_n definiert als die Menge aller Formeln der Form $\exists \bar{x}\theta(\bar{x},\bar{y})$ mit $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Pi_{n-1}$. Analog ist Π_n definiert als die Menge aller Formeln der Form $\forall \bar{x}\theta(\bar{x},\bar{y})$ mit $\theta(\bar{x},\bar{y}) \in \Sigma_{n-1}$. Wir erlauben in diesen Definitionen auch, dass ein Block von Quantoren leer sein darf. Damit folgt sofort $\Pi_n \cup \Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1} = \Delta_{n+1}$. Wir unterscheiden nun zwischen *strikter* und *nicht strikter* Elementschaft von Formeln im Bezug auf die obigen Formelmengen. Eine Formel liegt *strikt* in einer dieser Mengen wenn sie syntaktisch mit einer Formel wie oben beschrieben übereinstimmt. Gegebene eine Theorie T, dann liegt eine Formel $\varphi(\bar{x})$ *nicht strikt* in Σ_n oder Π_n, wenn es eine Formel $\psi(\bar{x})$ die strikt in Σ_n respektive Π_n liegt und $T \vdash \forall \bar{a}(\varphi(\bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{a}))$. Es ist leicht zu zeigen, dass für alle $n \geq 0$ die Mengen Σ_n und Π_n abgeschlossen unter $\wedge$ und $\vee$, jedoch nicht gegenüber $\neg$ sind. Für eine Formel $\theta(\bar{x}) \in \Sigma_n$ gilt $\neg\theta(\bar{x}) \in \Pi_n$, sowie für eine Formel $\psi(\bar{x}) \in \Pi_n$, $\neg\psi(\bar{x}) \in \Sigma_n$ gilt. Damit ist Δ_n abgeschlossen unter $\neg$. Insgesamt ergibt sich durch diese Eigenschaften der obigen Formelmengen ein Hierarchie wie sie in [2, Abbildung 4] veranschaulicht ist.

In Kapitel 7 von [2] werden die Beziehungen zwischen $I\Sigma_n$, $L\Sigma_n$, $B\Sigma_n$, $I\Pi_n$,$L\Pi_n$ und $B\Pi_n$ diskutiert, der folgende Satz fasst die Beziehungen, die für diesen Text relevant sind zusammen. Im wesentlich beschäftigt sich Kapitel 10 von [2] damit, zu zeigen, dass die vertikalen Rückrichtungen des folgenden Satzes nicht gelten. Also, dass die genannten Untertheorien von PA eine Hierarchie bilden.

Satz 1.1. *Sei $n \geq 0$, es gilt*

$$\begin{array}{l} I\Sigma_{n+1} \\ \Downarrow \\ B\Sigma_{n+1} \Leftrightarrow B\Pi_n \\ \Downarrow \\ I\Sigma_n \Leftrightarrow I\Pi_n \Leftrightarrow L\Sigma_n \Leftrightarrow L\Pi_n \ . \end{array}$$

Eine sehr zentrale Definition, die in viele Resultate eingehen wird, weil sie den Zusammenhang der Erfüllbarkeit von Formeln und Theorien in unterschiedlichen Unterstrukturen beschreibt, ist die folgende.

Definition 1.2 (Elementare Unterstrukturen)**.** Wir bezeichnen ein Modell M als *elementare Unterstruktur* eines Modells N in der selben Sprache $\mathcal{L}$, $M \prec N$, wenn $M \subseteq N$ und

$$(M \vDash \theta(\bar{a}) \Leftrightarrow N \vDash \theta(\bar{a})), \qquad \text{für alle } \bar{a} \in M \tag{4}$$

für alle Formeln $\theta(\bar{x})$ in der gegebenen Sprache $\mathcal{L}$. Analog sei für eine Formelmenge Γ das Modell M eine Γ-*elementare Unterstruktur* von N, $M \prec_\Gamma N$, wenn $M \subseteq N$ und (4) für alle Formeln $\theta(\bar{x})$ aus Γ gilt.

Satz 1.3 (Tarski-Vaught Test). *Seien $M \subseteq N$ Modelle der selben Sprache $\mathcal{L}$, dann gilt $M \prec N$ genau dann, wenn*

$$N \vDash \exists y \varphi(\bar{a}, y) \Rightarrow \exists b \in M, \text{ sodass } N \vDash \varphi(\bar{a}, b), \qquad \text{für alle } \bar{a} \in M$$

für alle $\mathcal{L}$-Formeln $\varphi(\bar{x}, y)$.

Beweis. Per Induktion über die Formelkomplexität. ■

Bemerkung 1.4. Dieses Kriterium ist ein sehr nützliches Hilfsmittel, um zu zeigen, dass Modelle elementare Unterstrukturen voneinander sind. Es zeigt, dass es reicht die Erfüllbarkeit von Formeln im Modell N zu prüfen, nicht aber in M.

Definition 1.5 (Anfangssegmente). Seien M und N $\mathcal{L}_A$-Strukturen und $M \subseteq N$, dann ist M ein *Anfangssegment* von N, $M \subseteq_e N$, wenn

$$N \vDash y < x \Rightarrow y \in M$$

für alle $x \in M$ und alle $y \in N$. M heißt *echtes Anfangssegment*, wenn $M \neq N$.

1.3 Weitere wichtige Konzepte

Die Paarungsfunktion (engl. *pairing function*) ermöglicht es ein Tupel von Zahlen mit einer einzigen Zahl eindeutig zu kodieren. Zu diesem Zweck wird in [2, Kapitel 5.1] die folgende Bijektion angegeben

$$\langle x, y \rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

Die Wahl einer solchen Funktion ist nicht eindeutig, spielt aber für die Resultate in dieser Arbeit nur eine untergeordnete Rolle. Die Paarungsfunktion kann auf n-Tupel verallgemeinert werden, indem wir

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_n \rangle \rangle$$

definieren. Zusätzlich führen wir die Funktion $(x)_y$ mit

$$(x)_y = \left(\frac{a}{m(y+1)+1} \right)$$

ein, wobei a und m eindeutige Zahlen sind mit $x = \langle a, m \rangle$ und die Formel $(x)_y = z$ ist Δ_0 ist. Für weitere Eigenschaften sei wieder auf [2, Kapitel 5.1] verwiesen.

Die Kodierungen von Folgen inklusive ihrer Länge erweist sich als weiteres wesentliches Hilfsmittel. Dabei soll die Länge der Folge in der Kodierung gespeichert werden. Sei $(x)_0 = y$ in PA äquivalent zu der Formel $\mathrm{len}(x) = y$, wobei $\mathrm{len}(x)$ als Länge der von x kodierten Folge aufgefasst werden kann. Für eine beliebige Folge $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ existiert eine eindeutige Zahl $[x_0, \ldots, x_{n-1}] = z \in \mathbb{N}$, nämlich die kleinste Zahl, die diese Folge kodiert und $\mathrm{len}(z) = n$ erfüllt. Die Formel $[x_0, \ldots, x_{n-1}] = z$ ist Δ_0. Für eine genauere Diskussion sei wieder auf [2, Kapitel 9.1] verwiesen.

Gödel Nummerierung. In Kapitel 9.2 von [2] wird die sogenannte Gödel Nummerierung eingeführt. Dabei wird jeder Formel σ in der Sprache der Arithmetik $\mathcal{L}_A$ eine eindeutige natürliche Zahl $\ulcorner \sigma \urcorner$zugeordnet.

Σ_n-vollständige und Π_n-vollständige Formeln werden mit den obigen Werkzeugen als Formeln definiert, welche die Menge

$$S_\Gamma = \{(\theta(\bar{v}), a) | \theta(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \Gamma \text{ und } \mathbb{N} \vDash \theta((a)_1, \ldots, (a)_n)\},$$

für $\Gamma = \Sigma_n$ oder $\Gamma = \Pi_n$ in $\mathbb{N}$ definieren. Diese Formeln werden mit $Sat_{\Sigma_n}(x, y)$ respektive $Sat_{\Pi_n}(x, y)$ bezeichnet und im Zuge von Kapitel 9 in [2] definiert. Für die vorliegende Arbeit ist wesentlich, dass für diese Formeln

$$\mathrm{PA} \vdash \forall a (\varphi((a)_1, \ldots, (a)_n) \leftrightarrow Sat_\Gamma(\ulcorner \varphi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \urcorner, a)$$

gilt mit $\Gamma = \Sigma_n$ oder $\Gamma = \Pi_n$. Weiters liegen diese Formeln in Σ_n respektive Π_n.

1.4 Aussagen über Sammlungsaxiome

Wir notieren die Theorie

$$\mathrm{PA}^- + \{B\varphi | \varphi \text{ ist eine } \mathcal{L}_A\text{-Formel}\}$$

mit Coll und deren Untertheorien

$$\mathrm{PA}^- + \{B\varphi | \varphi \text{ ist eine } \Sigma_n\text{-Formel}\}$$

mit Coll_n. Das folgende Resultat aus Kapitel 7 in [2] besagt, dass Σ_n und Π_n in $\mathrm{Coll_n}$ abgeschlossen unter beschränkter Quantifikation sind.

Satz 1.6. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $\theta(x, \bar{y}) \in \Gamma$ und $t(\bar{y})$ ein $\mathcal{L}_A$ Term. Dann gilt für $\Gamma = \Sigma_n$, dass $\forall x < t(\bar{y})\theta(x, \bar{y})$ in $\Sigma_n(\mathrm{Coll_n})$ und für $\Gamma = \Pi_n$, dass $\exists x < t(\bar{y})\theta(x, \bar{y})$ in $\Sigma_n(\mathrm{Coll_n})$.*

Beweis. Siehe [2, Proposition 7.1]. ∎

Im Zusammenhang mit den Hauptresultaten dieser Arbeit sei noch folgender Satz angeführt.

Satz 1.7. *Sei $n \geq 1$, dann gilt $I\Sigma_n \vdash \mathrm{Coll}\Sigma_n$. Damit folgt insbesondere* $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Coll}$.

Beweis. Siehe [2, Proposition 7.2]. ∎

2 Σ_n-definierbare Elemente

Definition 2.1. Sei $M \vDash PA^-$, $A \subseteq M$ und $n \geq 1$. Die Unterstruktur $K^n(M; A) \subseteq M$ ist gegeben durch die Menge aller $b \in M$, sodass

$$M \vDash \theta(b, \bar{a}) \wedge \forall x(\theta(x, \bar{a}) \rightarrow x = b) \tag{5}$$

für eine Formel $\theta(x, \bar{y}) \in \Sigma_n$ und ein $\bar{a} \in A$. Des Weiteren bezeichnen wir die Elemente $b \in K^n(M; A)$ als Σ_n-definierbare Elemente in M über A. $K^n(M; \emptyset)$ und $K^n(M; \{\bar{a}\})$ notieren wir meist mit $K^n(M)$ respektive $K^n(M; \bar{a})$.

Wir können an dieser Stelle zeigen, dass es sich bei $K^n(M; A)$ tatsächlich um eine Unterstruktur von M handelt. Sei hierfür $b, d \in K^n(M; A)$, die durch die Formeln $\eta(x_1, \bar{a})$ respektive $\xi(x_2, \bar{c})$ definiert sind, also $\eta(x_1, \bar{y}_1), \xi(x_2, \bar{y}_2) \in \Sigma_n$ und $n \geq 1$. Das Element $b + c$ kann nun durch die Σ_n-Formel

$$\exists x_1, x_2(\eta(x_1, \bar{a}) \wedge \xi(x_2, \bar{c}) \wedge x = x_1 + x_2)$$

definiert werden. Damit gilt $b + d \in K^n(M; A)$, also ist $K^n(M; A)$ abgeschlossen unter der Funktion $+$. Analog kann auch gezeigt werden, dass $K^n(M; A)$ abgeschlossen bezüglich $\cdot$ ist. Damit ist $K^n(M; A)$ eine Unterstruktur von M.

Als Vorbereitung für unser erstes Resultat in diesem Kapitel beweisen wir zunächst eine veränderte Variante des Tarski-Vaught Tests (Satz 1.3) für elementare Unterstrukturen.

Satz 2.2 (Tarski-Vaught Test für Σ_n-elementaren Unterstrukturen)**.** *Seien $M \subseteq N$ $\mathcal{L}_A$-Strukturen. Es gilt $M \prec_{\Sigma_k} N$ genau dann, wenn*

1. *$M \prec_{\Delta_0} N$*
2. *Für jede $\mathcal{L}_A$-Formel $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ und jedes $\bar{a} \in M$ gilt, dass aus $\exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$ in Σ_n und $N \vDash \exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$ auch folgt, dass ein $\bar{b} \in M$ existiert, sodass $N \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $M \prec_{\Sigma_n} N$ gilt. Da $\Delta_0 \subseteq \Sigma_n$ folgt daraus unmittelbar $M \prec_{\Delta_0} N$. Außerdem, wenn $\exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$ in Σ_n liegt und $N \vDash \exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$ gilt, folgt auch, dass $M \vDash \exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$. Das heißt, es gibt ein $\bar{b} \in M$, sodass $M \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$. Da $M \subseteq N$ gilt auch $N \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$.

Für die andere Richtung sei $n \geq 1$, für $n = 0$ bleibt nichts zu zeigen. Sei zunächst $\psi(\bar{x}, \bar{a}) \in \Delta_0$. Damit folgt aus $N \vDash \exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$, dass es ein $\bar{b} \in M$ gibt, sodass $N \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$. Da $M \prec_{\Delta_0} N$ gilt, folgt damit auch $M \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$ und daraus wiederum $M \vDash \exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$. Sei nun $M \vDash \exists \bar{x}\psi(\bar{x}, \bar{a})$, dann folgt ebenfalls, dass es ein $\bar{b} \in M$ gibt, sodass $M \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$ und damit auch $N \vDash \psi(\bar{b}, \bar{a})$, also $N \vDash \exists \bar{x} \psi(\bar{x}, \bar{a})$. Wir haben gezeigt, dass $M \prec_{\Sigma_1} N$ gilt. Damit folgt aber auch $M \prec_{\Pi_1} N$, denn

$$M \vDash \neg\psi(\bar{x}) \Leftrightarrow M \nvDash \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow M \nvDash \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow N \vDash \neg\psi(\bar{x}).$$

In analoger Weise können wir aus $M \prec_{\Pi_{k-1}} N$ auch $M \prec_{\Sigma_k} N$ für $n \geq k \geq 1$ zeigen. Damit kann man wie oben gezeigt, $M \prec_{\Pi_k} N$ folgern. Der Beweis kann iterativ fortgesetzt werden bis wir $M \prec_{\Sigma_n} N$ erhalten. ■

Bemerkung 2.3. Aus $M \prec_{\Sigma_n} N$ folgt auch

$$M \vDash \neg\psi(\bar{x}) \Leftrightarrow M \nvDash \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow N \nvDash \psi(\bar{x}) \Leftrightarrow N \vDash \neg\psi(\bar{x})$$

für alle Σ_n Formeln $\psi(\bar{x})$. Da Δ_0 abgeschlossen unter der Negation $\neg$ ist folgt daher auch $M \prec_{\Pi_n} N$.

Der folgende Satz wird sich als hilfreiches Resultat für alle weiteren Sätze in diesem Kapitel herausstellen.

Satz 2.4. *Sei $A \subseteq M \vDash I\Sigma_{k-1}$ und $n \geq k \geq 1$. Dann gilt $A \subseteq K^n(M; A) \prec_{\Sigma_n} M$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $K^n(M; A) \prec_{\Delta_0} M$. Sei $\psi(\bar{x})$ eine Δ_0-Formel und $\bar{b} \in K^n(M; A)$. Aus $K^n(M; A) \vDash \psi(\bar{b})$ folgt unmittelbar $M \vDash \psi(\bar{b})$, da $K^n(M; A)$ eine Unterstruktur von M ist. Sei nun $\exists x < t(\bar{y})\varphi(x, \bar{y})$ eine Δ_0-Formel, sodass $M \vDash \exists x < t(\bar{b})\psi(x, \bar{b})$ für ein $\bar{b} \in K^n(M; A)$. Da $M \vDash I\Delta_0$ und $I\Delta_0 \vdash L\Delta_0$ folgt aus dem Prinzip der kleinsten Zahl, dass es einen kleinsten Zeugen $c \in M$ gibt der diese Formel erfüllt, also

$$M \vDash c < t(\bar{b}) \wedge \varphi(c, \bar{b}) \wedge \forall x[x < c \wedge (t(\bar{b}) \leq x \vee \neg\varphi(x, \bar{b}))].$$

Diese Formel ist ebenfalls Δ_0 und definiert c, also ist $c \in K^n(M; A)$. Damit folgt $K^n(M; A) \vDash \exists x < t(\bar{b})\psi(x, \bar{b})$.
Für jedes $a \in A$ ist $x = a$ eine Δ_0-Formel, daher auch eine Σ_n-Formel, die dieses Element definiert. Es folgt also $A \subseteq K^n(M; A)$. Die verallgemeinerte Paarungsfunktion $\langle x_1, \ldots, x_l \rangle$ mit $l \geq 2$ ist eine Bijektion zwischen M^l und M und hat einen Δ_0 Graph ($\langle x_1, \ldots, x_l \rangle = y$ ist eine Δ_0-Formel) in allen Modellen $M \vDash I\Delta_0$. Seien nun $x, \bar{y} \in M$ mit $x = \langle y_1, \ldots, y_l \rangle \in K^n(M; A)$. Das bedeutet es gibt eine Σ_n-Formel $\zeta(x, \bar{a})$, die x mit $\bar{a} \in A$ definiert. Die Formel

$$\exists x, y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_l(\zeta(x, \bar{a}) \wedge x = \langle y_1, \ldots, y_l \rangle)$$

ist ebenfalls in Σ_n und definiert damit y_i. Es gilt also auch $y_i \in K^n(M; A)$ für alle $i \leq n$. Um nun zu zeigen, dass $K^n(M; A) \prec_{\Sigma_n} M$, reicht es mit Hilfe des Tarski-Vaught Tests für Σ_n-elementare Unterstrukturen (Theorem 2.2) zu zeigen, dass aus $\bar{b} \in K^n(M; A)$ und $\varphi(x, \bar{b}) \in \Pi_{k-1}$

$$M \vDash \exists x\varphi(x, \bar{b}) \Rightarrow \exists c \in K^n(M; A), \text{ sodass } M \vDash \varphi(c, \bar{b})$$

folgt. Wobei wir die verallgemeinerte Paarungsfunktion $\langle \bar{y} \rangle$ verwenden, um eine Π_{k-1}-Formel $\theta(\bar{x}, \bar{b})$ mit einer äquivalenten Formel $\varphi(x, \bar{b})$, gegeben durch

$$\forall \bar{y} \leq x(x = \langle \bar{y} \rangle \rightarrow \theta(\bar{y}, \bar{b})),$$

zu ersetzen. Angenommen $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_l) \in K^n(M; A)$ und $\varphi(x, \bar{b}) \in \Pi_{k-1}$. Es gelte außerdem, dass $M \vDash \exists x\varphi(x, \bar{b})$ und die b_i's seien definiert durch die Σ_n-Formeln $\eta_i(v_i, \bar{a})$ mit $\bar{a} \in A$.
Laut Voraussetzung gilt $M \vDash I\Sigma_{k-1}$ und da $I\Sigma_{k-1} \vdash L\Pi_{k-1}$ (Satz 1.1) folgt aus dem Prinzip der kleinsten Zahl für $\varphi(x, \bar{b})$, dass

$$M \vDash \exists! z[\varphi(z, \bar{b}) \wedge \forall u < z \neg\varphi(u, \bar{b})].$$

Für $k = 1$ ist $\forall u < z \neg\varphi(u, \bar{b})$ eine Δ_0-Formel. Für $k \geq 2$ folgt aus Satz 1.7, dass $I\Sigma_{k-1} \vdash B\Sigma_{k-1}$. Da $\neg\varphi(u, \bar{b})$ eine Σ_{k-1}-Formel ist, folgt mit Satz 1.4, dass $\forall u < z \neg\varphi(u, \bar{b})$ äquivalent in M zu einer Σ_{k-1} Formel ist. Insgesamt gilt also

$$M \vDash \exists! z \exists v_1, \ldots, v_l \left[\bigwedge_{i=1}^{l} \eta(v_i, \bar{a}) \wedge \varphi(z, \bar{v}) \wedge \forall u < z \neg\varphi(u, \bar{b}) \right].$$

Die Formel in den eckigen Klammern ist eine Konjunktion von Σ_n-,Π_{k-1}- und Σ_{k-1}-Formeln und ist daher eine Σ_n-Formel. Seien $\bar{v}, z \in M$ Zeugen dieser Formel, so folgt $v_i = b_i$ für alle i. Damit definiert die Formel

$$\exists v_1, \dots, v_l \left[\bigwedge_{i=1}^{l} \eta(v_i, \bar{a}) \wedge \varphi(z, \bar{v}) \wedge \forall u < z \neg\varphi(u, \bar{b}) \right]$$

das eindeutige Element z und es gilt $z \in K^n(M; A)$ sowie $M \vDash \varphi(z, \bar{b})$. ∎

Bemerkung 2.5. Man kann das Modell M, A und n so wählen, dass $K^n(M; A)$ nicht-standard ist. Sei beispielsweise $A = \emptyset$, $n = 1$ und gelte $M \vDash PA + \exists x\chi(x)$, wobei $\chi(x) \in \Delta_0$, sodass $\mathbb{N} \vDash \forall x \neg\chi(x)$. Ein solches Modell M existiert aufgrund des Unvollständigkeit Satzes [2, Korollar 3.10]. Da $K^1(M)$ insbesondere ein Modell von PA^- ist, folgt aus [2, Theorem 2.2], dass wir $\mathbb{N}$ als Anfangssegment von M identifizieren können, also $\mathbb{N} \subseteq_e K^1(M)$. Außerdem existiert aufgrund dem Prinzip der kleinsten Zahl ein kleinstes $x \in M$, sodass $M \vDash \chi(x)$. Laut Satz 2.4 gilt aber $\mathbb{N} \prec_{\Delta_0} M$ und damit kann nicht $x = n \in \mathbb{N}$ sein, da sonst $\mathbb{N} \vDash \chi(n)$ gilt. Also ist x nicht-standard und damit auch $K^1(M)$, weil es durch eine Σ_1-Formel definiert wird.

Satz 2.6. *Seien A endlich, $n \geq 1$ und $M \vDash \mathrm{PA}$ derart, dass $K^n(M; A)$ nicht-standard ist. Dann gilt $K^n(M; A) \nvDash PA$.*

Beweis. Sei $c \in K^n(M; A)$, dann existiert ein $e \in \mathbb{N}$, sodass

$$M \vDash Sat_{\Sigma_n}(e, [\bar{a}, c]) \wedge \forall y(Sat_{\Sigma_n}(e, [\bar{a}, y]) \to y = c).$$

Dieses e ist genau jene Gödelnummer die die Σ_n-Formel kodiert, die c definiert. Diese Formel ist eine Konjunktion aus einer Σ_n und einer Π_n Formel. Damit folgt aus Satz 2.4 und Bemerkung 2.3, dass

$$K^n(M; A) \vDash Sat_{\Sigma_n}(e, [\bar{a}, c]) \wedge \forall y(Sat_{\Sigma_n}(e, [\bar{a}, y]) \to y = c).$$

Damit folgt weiters für alle nicht-standard Elemente $d \in K^n(M; A)$ auch

$$K^n(M; A) \vDash \forall c \exists e < d \, [Sat_{\Sigma_n}(e, [\bar{a}, c]) \wedge \forall y(Sat_{\Sigma_n}(e, [\bar{a}, y]) \to y = c)] \, .$$

Angenommen $K^n(M; A) \vDash PA$, dann gäbe es ein kleinstes nicht-standard $d_0 \in K^n(M; A)$, sodass die obige Formel in $K^n(M; A)$ erfüllt ist. Es folgt, dass $d_0 \in \mathbb{N}$, da d_0 kleiner oder gleich als alle nicht-standard Elemente sein muss. Aus der obigen Formel folgt damit aber auch, dass $K^n(M; A)$ nur endliche viele Elemente besitzt - ein Widerspruch, denn $\mathbb{N}$ kann als Anfangssegment in $K^n(M; A)$ identifiziert werden. ∎

Satz 2.7. *Es gibt keine endlich axiomatisierbare Erweiterung von PA.*

Beweis. Sei T eine konsistente Erweiterung von PA, PA $\subseteq T$, und nehmen wir an diese Erweiterung wäre endlich axiomatisierbar. Damit existiert ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, sodass alle Axiome von T in Π_n liegen. Sei außerdem $M \vDash T$ ein nicht-standard Modell und a ein nicht-standard Element in M. Aus Satz 2.4 und Bemerkung 2.3 folgt $K^n(M; a) \prec_{\Pi_n} M$. Also gilt auch $K^n(M; a) \vDash T$ und damit auch $K^n(M; a) \vDash \mathrm{PA}$. Das kann aber laut Satz 2.6 nicht sein, da $K^n(M; a)$ nicht-standard ist - ein Widerspruch. ∎

Satz 2.8. *Sei $n > k \geq 1$, $M \vDash I\Sigma_k$ und $A \subseteq M$. Dann gilt $K^n(M; A) \vDash I\Sigma_k$.*

Beweis. Sei $\bar{b} \in K^n(M; A)$ und $\theta(x, \bar{b})$ eine Σ_k-Formel. Angenommen es gelte

$$K^n(M; A) \vDash \theta(0, \bar{b}) \wedge \forall x(\theta(x, \bar{b}) \to \theta(x + 1, \bar{b})),$$

dann folgt, da diese Formel eine Π_{k+1}-Formel ist und $K^n(M; A) \prec_{\Pi_{k+1}} M$,

$$M \vDash \theta(0, \bar{b}) \wedge \forall x(\theta(x, \bar{b}) \to \theta(x + 1, \bar{b})).$$

Da M die Induktionsaxiome $I\Sigma_k$ erfüllt, gilt auch $M \vDash \forall x\theta(x, \bar{b})$. Aus $K^n(M; A) \prec_{\Pi_{k+1}} M$ folgt, weil $\forall x\theta(x, \bar{b})$ eine Π_{n+1}-Formel darstellt, auch $K^n(M; A) \vDash \forall x\theta(x, \bar{b})$. Damit gilt

$$K^n(M; A) \vDash \theta(0, \bar{b}) \wedge \forall x(\theta(x, \bar{b}) \to \theta(x + 1, \bar{b})) \to \forall x\theta(x, \bar{b})$$

für alle Σ_k-Formeln $\theta(x, \bar{b})$, also $K^n(M; A) \vDash I\Sigma_k$. ∎

Lemma 2.9 (Das Taubenschlagprinzip der Arithmetik). *Sei ψ eine beliebige $\mathcal{L}_A$-Formel, dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{PA} \vdash \forall \bar{a}, s[\forall x < s+1 \exists y < s \psi(x, y, \bar{a}) \rightarrow \\ \exists x_1, x_2 < s+1 \exists y < s(x_1 \neq x_2 \wedge \psi(x_1, y, \bar{a}) \wedge \psi(x_2, y, \bar{a}))]. \end{aligned}$$

Das folgende Resultat zeigt, dass der Satz 2.8 in gewisser Hinsicht nicht verstärkt werden kann, also nicht $K^n(M;A) \vDash B\Sigma_n$ geschlossen werden kann, für Modelle $K^n(M;A)$ wie in Satz 2.8. Selbst dann nicht, wenn man $M \vDash \mathrm{PA}$ fordert.

Satz 2.10. *Sei $M \vDash PA$, $A \subseteq M$ endlich und $n \geq 1$, sodass $K^n(M;A)$ nicht-standard ist. Dann gilt $K^n(M;A) \nvDash B\Sigma_n$.*

Beweis. Jedes $b \in K^n(M;A)$ ist definierbar durch eine Formel $\exists \bar{z} \psi(x, \bar{z}, \bar{a})$ mit $\psi(x, \bar{z}, \bar{a}) \in \Pi_{n-1}$ und $\bar{a} \in A$. Mit der Paarungsfunktion können wir b auch durch die Formel

$$\exists y[\forall \bar{z}(y = \langle \bar{z} \rangle \rightarrow \delta(x, \bar{z}, \bar{a}))]$$

definieren. Wobei die Formel in den eckigen Klammern wieder in Π_{n-1} liegt, und damit die gesamte Formel in Σ_n. Wir notieren die Formel in den eckigen Klammern fortan mit $\gamma(x, y, \bar{a})$.
Wir erkennen, dass für jedes $b \in K^n(M;A)$ ein $e \in \mathbb{N}$ existiert, nämlich die Gödelnummer $e = \ulcorner \gamma(x, y, \bar{a}) \urcorner$, sodass

$$\begin{aligned} M \vDash \exists u[\exists u_0 u_1(u = \langle u_0, u_1 \rangle) \wedge u_0 = b \wedge Sat_{\Pi_{n-1}}(e, [u_0, u_1, \bar{a}]) \wedge \\ \forall z < u \forall z_0, z_1 \leq z(z = \langle z_0, z_1 \rangle \rightarrow \neg Sat_{\Pi_{n-1}}(e, [z_0, z_1, \bar{a}]))]. \end{aligned}$$

Diese Formel besagt, dass es ein kleinstes u gibt, sodass $u = \langle u_0, u_1 \rangle$ mit $u_0 = b$ und $Sat_{\Pi_{n-1}}(e, [u_0, u_1, \bar{a}])$ erfüllt ist. $Sat_{\Pi_{n-1}}$ ist eine Π_{n-1}-Formel und daher $\neg Sat_{\Pi_{n-1}}$ eine Σ_{n-1}-Formel. Da Σ_{n-1} abgeschlossen unter beschränkter Quantifikation in PA ist, folgt, dass die Formel in den eckigen Klammern in PA äquivalent zu einer Σ_n-Formel $\lambda(\bar{a}, b, e, u)$ ist. Sei nun $t \in K^n(M;A)$ nicht-standard, dann gilt

$$M \vDash \exists e < t \exists u \lambda(\bar{a}, b, e, u)$$

für alle $b \in K^n(M;A)$. Da diese Formel in Σ_n liegt, folgt aus Satz 2.4 auch

$$K^n(M;A) \vDash \exists e < t \exists u \lambda(\bar{a}, b, e, u).$$

Da diese Formel für alle $b \in K^n(M;A)$ gilt folgt damit auch

$$K^n(M;A) \vDash \forall b < t+1 \exists e < t \exists u \lambda(\bar{a}, b, e, u).$$

Diese Formel ist eine Σ_n-Formel angeführt mit einem beschränkten Allquantor. Angenommen $K^n(M;A) \vDash B\Sigma_n$, dann folgt weiters auch $M \vDash B\Sigma_n$ und damit ist in beiden Modellen Σ_n abgeschlossen unter beschränkter Allquantifizierung. Also ist obige Formel in beiden Modellen äquivalent zu einer Σ_n-Formel. Aus Satz 2.4 folgt

$$M \vDash \exists b < t+1 \exists e < t \exists u \lambda(\bar{a}, b, e, u).$$

Dies steht aber im Widerspruch zum Traubenschlagprinzip in M, Lemma 2.9, denn jedes $b \in M$ ist eindeutig durch jedes e bestimmt, welches die Formel $\exists u \lambda(\bar{a}, b, e, u)$ erfüllt. Es gilt nämlich $b = u_0$ für das kleinste $u = \langle u_0, u_1 \rangle \in M$ das $Sat_{\Pi_{n-1}}(e, [z_0, z_1, \bar{a}])$ erfüllt. Aus dem Taubenschlagprinzip würde jedoch

$$M \vDash \exists x_1, x_2 < t+1 \exists e < t[x_1 \neq x_2 \wedge \exists u \lambda(\bar{a}, x_1, e, u) \wedge \exists v \lambda(\bar{a}, x_2, e, v)]$$

folgen - ein Widerspruch, also gilt $K^n(M;A) \nvDash B\Sigma_n$. ■

Bemerkung 2.11. Satz 2.10 zusammen mit Satz 2.8 zeigt, dass $I\Sigma_n \nvdash B\Sigma_{n+1}$ für alle $n \geq 0$. Also ist die zweite (vertikale) Implikation von Satz 1.1 strikt.

3 Σ_n-elementare Anfangssegmente

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass es Modelle gibt die $B\Sigma_n$ erfüllen aber nicht $I\Sigma_n$. Hierfür werden wir zunächst passende Σ_{n-1}-elementare Anfangssegmente für Modelle von PA konstruieren und in weiterer Folge für diese ein analoges Resultat zu Satz 2.4 beweisen.

Definition 3.1. Sei $M \vDash PA^-$, $A \subseteq M$ und $n \geq 1$. Das Anfangssegment $I^n(M;A)$ von M ist gegeben durch die Menge aller Elemente $c \in M$, sodass

$$M \vDash c \leq b \tag{6}$$

für ein $b \in K^n(M;A)$. Wir bezeichnen $I^n(M;\emptyset)$ und $I^n(M;\{\bar{a}\})$ mit $I^n(M)$ respektive $I^n(M;\bar{a})$.

Es ist leicht zu zeigen, dass es sich bei $I^n(M;A)$ um eine $\mathcal{L}_A$-Struktur handelt. Für zwei Elemente $c_1, c_2 \in I^n(M;A)$ gibt es auch zwei Elemente $b_1, b_2 \in K^n(M;A)$, sodass $M \vDash c_i \leq b_i$ für $i = 1,2$ gilt. Daraus folgt $M \vDash c_1 + c_2 \leq b_1 + b_2$ und $M \vDash c_1 \cdot c_2 \leq b_1 \cdot b_2$. Da $b_1 + b_2, b_1 \cdot b_2 \in K^n(M;A)$ folgt damit auch $b_1 + b_2, b_1 \cdot b_2 \in I^n(M;A)$.

Lemma 3.2. *Sei $n \geq 1$ und $\Gamma \subseteq B\Pi_n$ die Menge aller Formeln*

$$\forall \bar{a}, t \exists s \forall x < t(\forall \bar{y} \neg\varphi(x,\bar{y},\bar{a}) \vee \exists \bar{z} < s\varphi(x,\bar{z},\bar{a}))$$

mit $\varphi(x,\bar{y},\bar{a}) \in \Pi_{n-1}$. Dann gilt $I\Sigma_n \vdash \Gamma$.

Beweis. Siehe [2, Lemma 10.6]. ∎

Satz 3.3. *Sei $A \subseteq M \vDash I\Sigma_{k-1}$ und $n \geq k \geq 1$. Dann gilt $I^n(M;A) \prec_{\Sigma_{n-1}} M$.*

Beweis. Da $I^n(M;A)$ ein Anfangssegment von M und abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$ ist, folgt unmittelbar $I^n(M;A) \prec_{\Delta_0} M$. Sei nun $n \geq 2$. Aus dem Tarski-Vaught Test für Σ_n-elementare Unterstrukturen (Satz 2.2) folgt, dass wir lediglich zeigen müssen, dass wenn $\bar{b} \in I^n(M;A)$, $\theta(\bar{x},\bar{b}) \in \Pi_{n-2}$ und $M \vDash \exists \bar{x}\theta(\bar{x},\bar{b})$, es ein $\bar{c} \in I^n(M;A)$ gibt, sodass $M \vDash \theta(\bar{c},\bar{b})$. Mit der Paarungsfunktion können wir, analog wie im Beweis für Satz 2.4, die Π_{n-2}-Formel $\theta(\bar{x},\bar{b})$ mit

$$\forall \bar{u}, \bar{v}(\langle \bar{u} \rangle = x \wedge \langle \bar{v} \rangle = b \rightarrow \theta(\bar{u},\bar{v}))$$

ersetzen, und müssen daher nur Π_{n-2}-Formeln $\theta(x,b)$ in Betracht ziehen.
Sei also $\theta(x,b) \in \Pi_{n-2}$, $M \vDash \exists x\theta(x,b)$ und $b \in I^n(M;A)$. Es gibt also ein $c \in K^n(M;A)$, welches durch eine Σ_n Formel $\eta(x,\bar{a})$ mit $\bar{a} \in A$ definiert ist und $b < c$. Nach Lemma 3.2 gibt es ein $d \in M$, sodass

$$M \vDash \forall y < c(\exists x < d\theta(x,y) \vee \forall z \neg\theta(z,y)). \tag{7}$$

Diese Formel ist aus Π_{n-1} und es gibt ein kleinstes $d \in M$, sodass obige Formel erfüllt ist. Mit diesem d gilt

$$\begin{aligned} M \vDash \exists c[\eta(c,\bar{a}) \wedge & \forall y < c(\exists x < d\theta(x,y) \vee \forall z \neg\theta(z,y)) \wedge \\ & \forall v < d \exists y < c(\forall x < v \neg\theta(x,y) \wedge \exists z\theta(z,y))], \end{aligned}$$

wobei, diese Formel aus Σ_n ist und damit auch d definiert. Also ist $d \in K^n(M;A)$. Aus $M \vDash \exists x\theta(x,b)$ und $b < c$ folgt mit (7) auch $\exists x < d\theta(x,b)$. Damit gibt es auch ein $x \in I^n(M;A)$ mit $M \vDash \theta(x,b)$. ∎

Satz 3.4. *Seien $n \geq 1$, $M \vDash I\Sigma_{n-1}$ und $I \subseteq_e M$ ein Σ_{n-1}-elementares echtes Anfangssegment von M, welches abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$ ist. Dann gilt $I \vDash B\Sigma_n$.*

Beweis. Sei $a \in I$ und $\theta(x,\bar{y}) \in \Pi_{n-1}$ mit $I \vDash \forall x < a\exists \bar{y}\theta(x,\bar{y})$. Da $I \subseteq_e M$, gilt für jedes $x \in M$ mit $x < a$ auch $x \in I$. Damit gibt es auch $\bar{y} \in I$, sodass $\theta(x,\bar{y})$ wahr ist in I, und daher auch in M, weil $I \prec_{\Sigma_{n-1}} M$. Wir folgern aus $I \subseteq_e M$, dass

$$M \vDash \forall x < a\exists \bar{y} < b\theta(x,\bar{y})$$

für alle $b \in M \setminus I$. Diese Formel ist äquivalent zu einer Π_{n-1} Formel. Aus dem Prinzip der kleinsten Zahl $L\Pi_{n-1}$ folgt, dass es auch ein kleinstes $b_0 \in M$ gibt, sodass

$$M \vDash \forall x < a \exists \bar{y} < b_0 \theta(x, \bar{y})$$

gilt. Da die Formel für alle $b \in M \setminus I$ gilt und $I \subseteq_e M$ ist folgt $b_0 \in I$. Also gilt für jedes $x < a$, dass es ein $\bar{y} < b_0$ gibt, sodass $M \vDash \theta(x, \bar{y})$. Aus $I \subseteq_e M$ folgt außerdem, dass diese x und $\bar{y}$ aus I sind. Damit gilt wegen $I \prec_{\Sigma_{n-1}} M$ auch $I \vDash \theta(x, \bar{y})$, und daher auch

$$I \vDash \forall x < a \exists \bar{y} < b_0 \theta(x, \bar{y}).$$

Also folgt insbesondere

$$I \vDash \exists s \forall x < a \exists \bar{y} < s \theta(x, \bar{y}).$$

■

Satz 3.5. *Sei $n \geq 1$, $A \subseteq M$ und $M \vDash B\Sigma_n$. Außerdem bezeichne $\Pi_{n+1} - \mathrm{Th}(M, \bar{a})_{\bar{a} \in A}$ die Menge aller Π_{n+1}-Formeln $\theta(\bar{a})$ mit Parametern $\bar{a} \in A$, die in M erfüllt sind. Dann gilt*

$$I^n(M; A) \vDash \Pi_{n+1} - \mathrm{Th}(M, \bar{a})_{\bar{a} \in A}.$$

Beweis. Siehe [2, Theorem 10.8]. ■

Definition 3.6 (Konservativität)**.** Seien T und S, sodass $T \vdash S$ und Γ eine beliebige Formelmenge. Dann ist T Γ-konservativ über S, wenn für alle $\sigma \in \Gamma$

$$T \vdash \sigma \Rightarrow S \vdash \sigma$$

gilt.

Korollar 3.7. *Sei $n \geq 0$, dann gilt*

$$I\Sigma_n \vdash \sigma \Leftrightarrow B\Sigma_{n+1} \vdash \sigma$$

für alle $\sigma \in \Pi_{n+2}$. Also $B\Sigma_{n+1}$ insbesondere Π_{n+2}-konservativ über $I\Sigma_n$ ist.

Beweis. Die Implikation von links nach rechts folgt aus Satz 1.1. Für die andere Richtung sei σ der Form $\forall \bar{x} \exists \bar{y} \psi(\bar{x}, \bar{y})$ mit $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Pi_{n+2}$, sodass $I\Sigma_n \nvdash \sigma$. Sei $\bar{a} \in M$ und $M \vDash I\Sigma_n + \forall \bar{y} \psi(\bar{a}, \bar{y})$. Wir konstruieren zunächst ein Modell M' für das $M \prec M'$ und $I^{n+1}(M; \bar{a}) \neq M'$ gilt.
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache die $\mathcal{L}_A$ erweitert indem für jedes $b \in M$ eine Konstante b hinzugefügt wird und zusätzlich eine weitere Konstante c. Sei nun M' eine $\mathcal{L}$-Struktur, sodass

$$M' \vDash \{\theta(\bar{b}) | \bar{b} \in M \vDash \theta(\bar{b}) \text{ für eine } \mathcal{L}_A\text{-Formel}\} \cup \{\exists! x \eta(x, \bar{a}) \to \exists x < c \eta(x, \bar{a}) | \eta \in \Sigma_{n+1}\}.$$

Das Redukt von M' auf die Sprache $\mathcal{L}_A$ erfüllt nun alle geforderten Eigenschaften, da das Element in M', welches die Konstante c realisiert, nicht in $I^{n+1}(M'; \bar{a})$ liegt. Nach Satz 3.3 folgt $\bar{a} \in I^{n+1}(M', \bar{a}) \prec_{\Sigma_n} M'$. Also folgt mit Satz 3.4, dass $I^{n+1}(M', \bar{a}) \vDash B\Sigma_{n+1}$. Laut Annahme für M' gilt aber auch $M' \vDash \forall \bar{y} \neg \psi(\bar{y}, \bar{a})$, also $M' \vDash \neg \psi(\bar{a}, \bar{b})$ für alle $\bar{b} \in I^{n+1}(M', \bar{a})$. Damit folgt, weil $I^{n+1}(M', \bar{a})$ eine Σ_n-elementare Unterstruktur von M' ist, dass $I^{n+1}(M', \bar{a}) \vDash \forall \bar{y} \neg \psi(\bar{y}, \bar{a})$. Wir schließen damit, dass $I^{n+1}(M', \bar{a}) \vdash B\Sigma_{n+1} + \neg \sigma$ und damit $B\Sigma_{n+1} \nvdash \sigma$. ■

Bemerkung 3.8. Korollar 3.7 zeigt, dass $I\Sigma_n$ und $B\Pi_{n+1}$ im Sinne der in Bemerkung 2.11 und Satz 1.1 besprochenen Hierarchie „näher" zusammen liegen, als $B\Pi_{n+1}$ und $I\Pi_{n+1}$. Beispielsweise ist *con*$(I\Sigma_n)$ in $I\Sigma_{n+1}$ beweisbar, aber nicht in $B\Sigma_{n+1}$. Wobei *con*$(I\Sigma_n)$ ein Π_1-Satz ist, der zum Ausdruck bringt, dass $I\Sigma_n$ konsistent ist. Es reicht also für beliebige $n \geq 0$ die Formelmenge Π_1 aus, um $I\Sigma_{n+1}$ und $B\Sigma_{n+1}$ zu trennen. Damit ist hier gemeint, dass $B\Sigma_{n+1}$ *nicht* Π_1-konservativ über $I\Sigma_{n+1}$ ist. Wir haben in Korollar 3.7 gezeigt, dass für $I\Sigma_n$ und $B\Pi_{n+1}$ hierfür mindestens Π_{n+3}, also mit n wachsende Formelmengen, notwendig wären.

Das folgende Resultat vollendet den Beweis, dass die vertikalen Implikationen aus Satz 1.1 nicht in die umgekehrte Richtung gelten und daher die besprochenen Theorien eine Hierarchie bilden.

Satz 3.9. *Sei $A \subseteq M$ endlich, $n \geq k \geq 1$ und $M \vDash I\Sigma_{k-1}$. Wenn $I^n(M;A)$ nicht-standard ist, dann gilt $I^n(M;A) \vDash B\Sigma_n$ und $I^n(M;A) \nvDash I\Sigma_n$.*

Beweis. Die erste Aussage, $I^n(M;A) \vDash B\Sigma_n$, folgt direkt aus Satz 3.4. Sei nun $A = \{\bar{a}\}$ und $b \in I^n(M;A)$ nicht-standard. Ziel ist es nun eine Σ_n-Formel $\theta(x,w)$ und ein $w \in M$ mit $w < b$ zu finden, sodass

$$x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow I^n(M;A) \vDash \theta(x,w)$$

gilt. Damit folgt zunächst $I^n(M;A) \neq \mathbb{N}$ und daher auch $I^n(M;A) \nvDash I_x\theta$.
Wir beobachten zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
M \vDash \exists w < b\Big[&len(w) \geq x \\
&\wedge [w]_0 = [\ulcorner x = 0 \urcorner] \\
&\wedge \forall i < len(w)([w]_i \leq \max(\ulcorner x = 0\urcorner, i) \wedge \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_i, [y, \bar{a}])) \\
&\wedge \forall i < len(w)(i > 0 \rightarrow ([w]_i = [w]_{i-1} \wedge (\neg \exists z Sat_{\Pi_{n-1}}(i, [z, \bar{a}]) \\
&\qquad \vee \forall y(Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_{i-1}, [y, \bar{a}]) \rightarrow \exists z \leq y Sat_{\Pi_{n-1}}(i, [z, \bar{a}])))) \\
&\quad \vee ([w]_i = i \wedge \exists z Sat_{\Pi_{n-1}}(i, [z, \bar{a}]) \\
&\qquad \wedge \forall z(Sat_{\Pi_{n-1}}(i, [z, \bar{a}]) \rightarrow \exists y \leq z Sat_{\Pi_{n-2}}([w]_{i-1}, [z, \bar{a}]))))\Big]
\end{aligned}$$

gilt. Diese Formel bedeutet, dass w die Folge $[w]_0, [w]_1, \dots, [w]_{x-1}$ kodiert, sodass $[w]_0 = [\ulcorner x = 0 \urcorner]$ und für alle $0 < i < x$ entweder

1. $[w]_i = i$, wenn i die Gödelnummer von einer Π_{n-1}-Formel $\theta(v_0, \bar{v})$ ist, sodass das kleinste $u \in M$ mit $M \vDash \theta(u, \bar{a})$ existiert und größer ist als das kleinstes $u \in M$ mit $M \vDash Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_{i-1}, [u, \bar{a}])$; oder

2. $[w]_i = [w]_{i-1}$, wenn obige Eigenschaft nicht zutrifft.

Nach dem Overspill Lemma [2, Lemma 6.1] gibt es ein Element $w < b$ in M, sodass die obige Formel in den eckigen Klammern erfüllt ist für ein nicht-standard $x \in I^n(M;A)$. Dieses w kodiert nun eine Folge von Π_{n-1}-Formeln, die in M erfüllt sind. Das kleinste y, welches die Formel, die von $[w]_i$ kodiert wird, erfüllt ist größer oder gleich dem kleinsten z, das jene Formel erfüllt, die von $[w]_{i-1}$ kodiert wird, für standard $i \in M$.
Sei w wie eben beschrieben gewählt und $c \in I^n(M;A)$ beliebig. Wir zeigen nun, dass $c \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn

$$I^n(M;A) \vDash \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_c, [y, \bar{a}]).$$

Sei also $c \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$M \vDash \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_c, [y, \bar{a}]).$$

Es gilt aber $[w]_c \leq \max(c, \ulcorner v_0 = 0 \urcorner)$ und damit $[w]_c = k \in \mathbb{N}$. Da aber die Formel $[w]_c = k$ aus Δ_0 ist, gilt $I^n(M;A) \vDash [w]_c = k$ und damit auch $M \vDash \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}(k, [y, \bar{a}])$. Nach Satz 3.5 gilt daher auch $I^n(M;A) \vDash \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}(k, [y, \bar{a}])$, also $I^n(M;A) \vDash Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_c, [y, \bar{a}])$.
Für die andere Richtung seien $c, y \in I^n(M;A)$, sodass

$$I^n(M;A) \vDash \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_c, [y, \bar{a}]),$$

daraus folgt auch $M \vDash \exists y Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_c, [y, \bar{a}])$, weil $I^n(M;A) \prec_{\Sigma_{n-1}} M$. Da $y \in I^n(M;A)$, gibt es ein $d \in M$ mit $y < d$, welches durch eine Formel $\exists \bar{v} \theta(d, \bar{v}, \bar{a})$ Σ_n-definiert ist, wobei $\theta \in \Pi_{n-1}$. Sei nun $\psi(v_0, \bar{v})$ die Π_{n-1}-Formel $\forall r, \bar{s}(\langle r, \bar{s} \rangle = v_0 \rightarrow \theta(r, \bar{s}, \bar{v}))$ und $i = \ulcorner \psi(v_0, \bar{v}) \urcorner$. Für jedes $v \in M$, das nun $\psi(v, \bar{a})$ erfüllt gilt $v \geq d > y$. Aus Induktion über j in M folgt damit

$$M \vDash \forall j \geq i(j < len(w) \rightarrow \forall u(Sat_{\Pi_{n-1}}([w]_j, [u, \bar{a}]) \rightarrow u > y)).$$

Dies zeigt, dass $c < i$ und damit gilt $c \in \mathbb{N}$. ■

Bemerkung 3.10. Satz 3.9 zeigt nun, dass $B\Sigma_n \nvDash I\Sigma_n$ gilt und damit auch gezeigt ist, dass die zweite Implikation aus Satz 1.1 strikt ist, also die Rückrichtung nicht gilt. Damit ist gezeigt, dass die in Satz 1.1 genannten Untertheorien von PA eine Hierarchie bilden.

Literatur

[1] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory.* Elsevier, 1990.

[2] R. Kaye, S. Kaye, and O. U. Press. *Models of Peano Arithmetic.* Oxford logic guides. Clarendon Press, 1991. ISBN 9780198532132.