



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

S E M I N A R A R B E I T

# Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

ausgeführt am

Institut für  
Diskrete Mathematik und Geometrie  
TU Wien

unter der Anleitung von

**Stefan Hetzl**

durch

**Martin Gius**

Matrikelnummer: 01611151

Spengergasse 11

1050 Wien

Wien, 18. Juni 2018

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                         |           |
|----------|-----------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                       | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé</b> | <b>2</b>  |
| <b>3</b> | <b>Hanfs Theorem</b>                    | <b>10</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>             | <b>15</b> |

# 1 Einleitung

Diese Seminararbeit ist eine Ausarbeitung eines Teils des sechsten Kapitels des Buches *Descriptive Complexity* von Neil Immerman [Imm12]. Dabei ist die Arbeit so verfasst, dass sie mit elementaren Kenntnissen der mathematischen Logik bzw. Modelltheorie, auch unabhängig vom Buch, verständlich ist.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele sind eine Beweismethode in der Modelltheorie, die verwendet wird, um die genaue Anzahl von benötigten Quantoren und Variablen zum Ausdrücken gewisser Aussagen der Prädikatenlogik erster Stufe zu bestimmen. Dabei werden wir uns auf endliche, relationale Vokabulare beschränken. Wir werden sehen, dass die Spiele sogar eine vollständige Methodik bieten, um nachzuweisen, dass gewisse boolesche Abfragen nicht first-order formulierbar sind.

Im Vordergrund stehen der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé, der den Zusammenhang zwischen Prädikatenlogik und den Spielen liefert und Hanfs Theorem, der eine einfache algebraische Methode bietet um Gewinnstrategien zu konstruieren. Außerdem werden mehrere Negativbeispiele angeführt um das Verständnis zu vertiefen. Eines davon ist beispielsweise, dass Azyklizität von Graphen nicht first-order ausdrückbar ist.

Zusätzliche Literatur, die nicht direkt verwendet wurde, aber zum Verständnis des Themengebiets beigetragen hat, sind [Pap94] und [Lib13].

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

**Definition 2.1.** Sei  $\tau$  ein relationales Vokabular,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{STRUC}[\tau]$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$  und

$$\alpha_0 : \text{const}(\tau) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \hookrightarrow |\mathcal{A}|, \beta_0 : \text{const}(\tau) \cup \{x_1, \dots, x_k\} \hookrightarrow |\mathcal{B}|$$

partielle Funktionen mit  $\text{dom}(\alpha_0) = \text{dom}(\beta_0)$  und für  $c \in \text{const}(\tau)$  soll  $\alpha_0(c) = c^{\mathcal{A}}, \beta_0(c) = c^{\mathcal{B}}$  gelten. Dann bezeichnet  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$  das  $m$ -Runden *Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel* (EF-Spiel) mit  $k$ -Spielsteinen und einer  $k$ -Konfiguration  $(\alpha_0, \beta_0)$ , das nach folgenden Regeln gespielt wird:

Es gibt zwei Spieler, Samson und Delilah (häufig auch Spoiler und Duplicator genannt). Die Spielsteine sind die Elemente in  $\text{const}(\tau) \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ . Zu Beginn des Spiels befinden sich genau die Spielsteine auf dem Spielbrett, die im Definitionsbereich  $\text{dom}(\alpha_0) = \text{dom}(\beta_0)$  liegen, das sind zumindest die Konstanten. Sind es genau die Konstanten, also  $\text{dom}(\alpha_0) = \text{dom}(\beta_0) = \text{const}(\tau)$ , so schreibt man auch  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

In der  $r$ -ten Runde ( $1 \leq r \leq m$ ) beginnt Samson und wählt einen Spielstein  $x_r$ , diesen setzt er auf ein Element  $a \in \mathcal{A}$  oder  $b \in \mathcal{B}$ . Daraufhin setzt Delilah den (zweiten) Spielstein  $x_r$  auf ein Element der jeweils anderen Struktur. Dies entspricht der rekursiven Definition zweier partieller Funktionen durch

$$\alpha_r(x_j) := \begin{cases} \alpha_{r-1}(x_j), & j \neq r \\ a, & j = r \\ x_j^{\mathcal{A}}, & x_j \in \text{const}(\tau) \end{cases} \quad \beta_r(x_j) := \begin{cases} \beta_{r-1}(x_j), & j \neq r \\ b, & j = r \\ x_j^{\mathcal{B}}, & x_j \in \text{const}(\tau) \end{cases}.$$

Durch die Menge  $\{(\alpha_r(x), \beta_r(x)) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}| : x \in \text{dom}(\alpha_r) = \text{dom}(\beta_r)\}$  wird eine Relation  $\Phi$  induziert. Erfüllt  $\Phi$  die Eigenschaften

- $\Phi$  ist eine Abbildung und  $\Phi$  ist injektiv, das heißt

$$\forall x, y \in \text{dom}(\alpha_r) : \alpha_r(x) = \alpha_r(y) \Leftrightarrow \beta_r(x) = \beta_r(y) \quad (2.1)$$

- $\Phi$  erfüllt die Homomorphiebedingung: für ein  $n$ -stelliges Relationssymbol  $R \in \tau$  und  $x_1, \dots, x_n \in \text{dom}(\alpha_r)$  gilt:

$$(\alpha_r(x_1), \dots, \alpha_r(x_n)) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (\beta_r(x_1), \dots, \beta_r(x_n)) \in R^{\mathcal{B}} \quad (2.2)$$

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

so spricht man auch von einem partiellen Isomorphismus zwischen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  (die Homomorphiebedingung für Konstanten ist per Definition immer erfüllt) und Delilah gewinnt die  $r$ -te Runde des EF-Spiels. Wird kein partieller Isomorphismus induziert, so gewinnt Samson das Spiel. Delilah kann das Spiel also nur gewinnen, wenn sie jede Runde des Spiels gewinnt.  $\square$

**Bemerkung 2.2.**  $(\mathcal{A}, \alpha_r)$  und  $(\mathcal{B}, \beta_r)$  können auch als Interpretationen im Sinne der Logik erster Stufe gedeutet werden. Dies ermöglicht eine alternative Charakterisierung der Eigenschaften (2.1) und (2.2) durch die Eigenschaften

$$\forall x, y \in \text{dom}(\alpha_r) : (\mathcal{A}, \alpha_r) \models x = y \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \beta_r) \models x = y \quad (2.1')$$

$$(\mathcal{A}, \alpha_r) \models R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \beta_r) \models R(x_1, \dots, x_n) \quad (2.2')$$

$\square$

Da zu jedem Zeitpunkt einer Entscheidung in einem EF-Spiel sowohl Samson als auch Delilah das vorangegangene Spielgeschehen bekannt ist, hat einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie. Falls Delilah eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$  hat, schreiben wir  $(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim_m^k (\mathcal{B}, \beta_0)$ . Gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim_m^k (\mathcal{B}, \beta_0)$  so notieren wir  $(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim_m (\mathcal{B}, \beta_0)$ , analog für  $(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim^k (\mathcal{B}, \beta_0)$ . Eine Motivation für diese Notation bietet folgendes Lemma.

**Lemma 2.3.**  $\sim_m^k$  ist eine Äquivalenzrelation.

**Beweis.** *Reflexivität:* Seien  $(\mathcal{A}, \alpha_0)$  eine Interpretation und  $m, k \in \mathbb{N}$  beliebig. Wir zeigen, dass Delilah eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{A}, \alpha_0)$  hat.

Der Induktionsanfang mit  $m = 0$  folgt aus der initialen Konfiguration  $(\alpha_0, \alpha_0)$ . In der  $(m + 1)$ -ten Runde wählt Samson einen Spielstein und setzt ihn auf ein  $a \in \mathcal{A}$ , dann setzt Delilah den Spielstein auf das selbe Element in  $\mathcal{A}$ . Damit und mit der Induktionshypothese ist also  $\beta_{m+1} = \alpha_{m+1}$  und die Eigenschaften für den partiellen Isomorphismus sind trivialerweise erfüllt.

*Symmetrie:* Es gelte  $(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim_m^k (\mathcal{B}, \beta_0)$ , damit hat Delilah eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$ . Da die Definition von EF-Spielen aber symmetrisch ist, gilt

$$\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0) = \mathcal{G}_m^k(\mathcal{B}, \beta_0, \mathcal{A}, \alpha_0).$$

Also hat Delilah eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{B}, \beta_0, \mathcal{A}, \alpha_0)$  und damit gilt  $(\mathcal{B}, \beta_0) \sim_m^k (\mathcal{A}, \alpha_0)$ .

*Transitivität:* Es gelte  $(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim_m^k (\mathcal{B}, \beta_0)$  und  $(\mathcal{B}, \beta_0) \sim_m^k (\mathcal{C}, \gamma_0)$ . Dann hat Delilah Gewinnstrategien für die entsprechenden EF-Spiele. Für eine beliebige Spielrunde erhalten wir wegen der vorhandenen Gewinnstrategien durch Formeln (2.1) und (2.2) folgende Äquivalenzen:

$$\forall x, y \in \text{dom}(\alpha_r) : \alpha_r(x) = \alpha_r(y) \Leftrightarrow \beta_r(x) = \beta_r(y) \Leftrightarrow \gamma_r(x) = \gamma_r(y)$$

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

$$(\alpha_r(x_1), \dots, \alpha_r(x_n)) \in R^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow (\beta_r(x_1), \dots, \beta_r(x_n)) \in R^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow (\gamma_r(x_1), \dots, \gamma_r(x_n)) \in R^{\mathcal{C}}$$

Damit wird auch durch die Menge  $\{(\alpha_r(x), \gamma_r(x)) \in |\mathcal{A}| \times |\mathcal{C}| : x \in \text{dom}(\alpha_r) = \text{dom}(\gamma_r)\}$  ein partieller Isomorphismus induziert und Delilah hat folglich eine Gewinnstrategie für das EF-Spiel  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{C}, \gamma_0)$ . ■

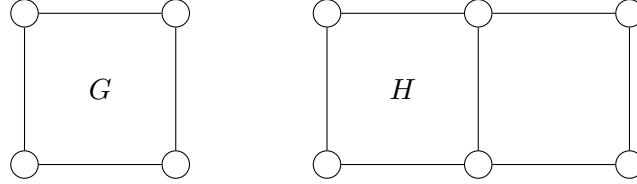


Abbildung 2.1: Zwei Graphen  $G$  und  $H$

**Beispiel 2.4.** Wir betrachten das Vokabular  $\tau = \langle E^2 \rangle$ , auf dem die zwei Graphen  $G$  und  $H$  aus Abbildung 2.1 definiert sind. Dabei bezeichne  $E$  eine zweistellige Kantenrelation. Delilah hat folgende Gewinnstrategie für das EF-Spiel mit zwei Spielsteinen  $\mathcal{G}_m^2(G, H)$ . Legt Samson den ersten Spielstein, so kann Delilah mit einem beliebigen Zug antworten, kommt bereits der zweite Spielstein von Samson ins Spiel, so liegen auf einem der Graphen zwei Spielsteine  $x_1, x_2$ . Es gilt  $E(x_1, x_2)$  oder  $\neg E(x_1, x_2)$ . Nun kann Delilah ihren Spielstein immer so legen, dass die entsprechende Relation auch im anderen Graphen erfüllt ist. Das heißt  $G \sim^2 H$ .

Wird allerdings mit drei Spielsteinen gespielt, hat Samson eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_3^3(G, H)$ , indem er den Satz “ausspielt”, dass drei Elemente existieren, die nicht mit einer Kante verbunden sind:

$$\varphi \equiv (\exists x \exists y \exists z : \text{distinct}(x, y, z) \wedge \neg E(x, y) \wedge \neg E(y, z) \wedge \neg E(x, z)).$$

Es gilt  $G \models \neg \varphi$  und  $H \models \varphi$ . Eine Gewinnstrategie für Samson ist es damit, drei Elemente in  $H$  zu wählen, auf die sich die Formel  $\varphi$  bezieht. Denn dann kann Delilah in der dritten Runde kein Element aus  $G$  wählen, das  $\varphi$  erfüllt, und der partielle Isomorphismus ist zerstört (vgl. Bemerkung 2.2). □

Beispiel 2.4 sowie Bemerkung 2.2 lassen uns schon den engen Zusammenhang zwischen Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen und Prädikatenlogik erster Stufe erahnen. Wir müssen allerdings noch einige Begrifflichkeiten einführen, um den zentralen Satz dieses Abschnitts formulieren und beweisen zu können.

**Definition 2.5.** Ist  $\tau$  ein Vokabular und  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(\tau)$ , so ist die *Quantorentiefe* einer Formel, in Zeichen  $\text{qr}(\cdot)$  definiert als

- $\text{qr}(\varphi) = 0$ , falls  $\varphi$  atomar ist,

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

- $\text{qr}(\varphi \wedge \psi) = \max\{\text{qr}(\varphi), \text{qr}(\psi)\},$
- $\text{qr}(\neg\varphi) = \text{qr}(\varphi),$
- $\text{qr}((\exists x)\varphi) = \text{qr}(\varphi) + 1.$

□

**Definition 2.6.** Sei  $\tau$  ein Vokabular,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{STRUC}(\tau)$  und  $i, j$  Variablenbelegungen von  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$ , dann bezeichne  $\mathcal{L}_m^k(\tau)$  die Menge aller Formeln in  $\mathcal{L}(\tau)$ , die eine Quantorentiefe von höchstens  $m$  haben und in denen nur die Variablen  $x_1, \dots, x_k$  vorhanden sind. Des Weiteren spricht man von elementarer  $\mathcal{L}$ - bzw.  $(m, k)$ -Äquivalenz, falls

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}, i) \equiv_{\mathcal{L}} (\mathcal{B}, j) &: \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{L}(\tau) : (\mathcal{A}, i) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, j) \models \varphi \quad \text{bzw.} \\ (\mathcal{A}, i) \equiv_m^k (\mathcal{B}, j) &: \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{L}_m^k(\tau) : (\mathcal{A}, i) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, j) \models \varphi. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.7.** Ist  $\tau$  ein endliches, relationales Vokabular, so existieren in  $\mathcal{L}_m^k(\tau)$  nur endlich viele nicht äquivalente Formeln.

**Beweis.** Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über  $m$ .  $\mathcal{L}_0^k(\tau)$  enthält alle Formeln, die aus Kombinationen von Konstanten- und Relationssymbolen aus  $\tau$ , den Symbolen  $=, \neg, \wedge$  und Variablen  $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$  entstehen. Da  $\tau$  nur endlich viele Konstanten- und Relationssymbole enthält und die Variablenmenge auch endlich ist, kann es nur endlich viele nicht äquivalente Formeln in  $\mathcal{L}_0^k(\tau)$  geben.

Im Induktionsschritt betrachten wir  $\varphi \in \mathcal{L}_{m+1}^k(\tau)$ . Man kann  $\varphi$  als Kombination aus den endlich vielen Symbolen von  $\tau$  und  $(\exists x)\psi$  mit  $\psi \in \mathcal{L}_m^k(\tau)$  darstellen (sonst hätte  $\varphi$  nicht Quantorentiefe  $m+1$ ). Nach Induktionshypothese gibt es auch nur endlich viele nicht äquivalente Formeln  $\psi \in \mathcal{L}_m^k(\tau)$  und damit können in  $\mathcal{L}_{m+1}^k(\tau)$  auch nur endlich viele nicht äquivalente Formeln liegen. ■

**Satz 2.8.** (*Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé*)

Sei  $\tau$  ein endliches, relationales Vokabular,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{STRUC}[\tau]$  und  $(\alpha_0, \beta_0)$  eine  $k$ -Konfiguration von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ . Dann gilt

$$(\mathcal{A}, \alpha_0) \sim_m^k (\mathcal{B}, \beta_0) \Leftrightarrow (\mathcal{A}, \alpha_0) \equiv_m^k (\mathcal{B}, \beta_0).$$

**Beweis.** Wir zeigen die Aussage mittels vollständiger Induktion über  $m$ . Im Induktionsanfang  $m = 0$  müssen wir also zeigen, dass Delilah genau dann eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_0^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$  hat, wenn die Strukturen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  mit keiner quantorenlosen Formel mit  $k$  freien Variablen aus  $\text{dom}(\alpha_0) = \text{dom}(\beta_0)$  unterschieden werden können. Dies entspricht genau den Bedingungen (2.1') und (2.2') in Bemerkung 2.2.

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

Die Aussage gelte also für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Von links nach rechts gehen wir mittels Kontraposition vor. Sei folglich  $\varphi \in \mathcal{L}_{m+1}^k(\tau)$  eine Formel, in der sich  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  unterscheiden, das heißt  $\mathcal{A} \models \varphi$  und  $\mathcal{B} \models \neg\varphi$  oder umgekehrt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte der erstere Fall. Wir machen folgende prädikatenlogische Beobachtungen:

- ist  $\varphi$  von der Form  $\neg a$  für  $a \in \mathcal{L}_{m+1}^k(\tau)$ , dann unterscheiden sich  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  auch in  $a$
- ist  $\varphi$  von der Form  $a \wedge b$  für  $a, b \in \mathcal{L}_{m+1}^k(\tau)$ , dann unterscheiden sich  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  in  $a$  oder in  $b$  weil  $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$

Damit können wir annehmen, dass  $\varphi$  von der Form  $(\exists x_i)\psi$  mit  $\psi \in \mathcal{L}_m^k(\tau)$  ist. Samsons erster Zug in  $\mathcal{G}_{m+1}^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$  ist es, den Spielstein  $x_i$  auf ein Element in  $\mathcal{A}$  zu setzen, das  $\psi$  erfüllt. Delilah kann nun kein Element in  $\mathcal{B}$  finden, das  $\psi$  erfüllt, weil  $\varphi$  in  $\mathcal{B}$  nicht gilt. Also unterscheiden sich  $(\mathcal{A}, \alpha_1)$  und  $(\mathcal{B}, \beta_1)$  nach der ersten Runde in der Formel  $\psi$  mit Quantorentiefe  $m$  und daher hat Delilah nach Induktionshypothese keine Gewinnstrategie für  $G_m^k(\mathcal{A}, \alpha_1, \mathcal{B}, \beta_1)$  und daher auch nicht für  $G_{m+1}^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$ .

Die Richtung von rechts nach links zeigen wir direkt. Es gelte  $\mathcal{A} \equiv_{m+1}^k \mathcal{B}$ . Samson legt o.B.d.A. in der ersten Runde von  $\mathcal{G}_{m+1}^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$  einen Spielstein  $x_i$  auf  $\mathcal{A}$  und definiert somit  $\alpha_1$ . Sei  $\Phi$  die Konjunktion aller Formeln  $\varphi \in \mathcal{L}_m^k(\tau)$  sodass  $(\mathcal{A}, \alpha_1) \models \varphi$ . Nach Lemma 2.7 ist  $\Phi$  wohldefiniert und es gilt  $\Phi \in \mathcal{L}_m^k(\tau)$ . Damit erhalten wir

$$(\mathcal{A}, \alpha_0) \models (\exists x_i)\Phi$$

und da die Quantorentiefe von  $\Phi$  gleich  $m$  ist, nach Voraussetzung

$$(\mathcal{B}, \beta_0) \models (\exists x_i)\Phi.$$

Folglich gewinnt Delilah die erste Runde, indem sie  $x_i$  auf ein Element in  $\mathcal{B}$  legt, welches  $\Phi$  erfüllt. Insgesamt erhalten wir also  $(\mathcal{A}, \alpha_1) \models \Phi$  und  $(\mathcal{B}, \beta_1) \models \Phi$ . Nach Definition von  $\Phi$  also

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}_m^k(\tau) : (\mathcal{A}, \alpha_1) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{B}, \beta_1) \models \varphi,$$

was nichts anderes bedeutet als  $(\mathcal{A}, \alpha_1) \equiv_m^k (\mathcal{B}, \beta_1)$ . Damit hat Delilah nach Induktionshypothese auch eine Gewinnstrategie für das verbleibende Spiel. ■

Sehr nützlich ist folgendes Korollar, da es die Argumentation mittels EF-Spielen deutlich erleichtert.

**Korollar 2.9.** Hat Samson eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}_m^k(\mathcal{A}, \alpha_0, \mathcal{B}, \beta_0)$ , so hat er auch eine Gewinnstrategie für dasselbe Spiel, wenn er keine Spielsteine mehrmals auf ein Element einer Struktur setzt.

Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé gibt uns mittels der in EF-Spielen verpackten partiellen Isomorphie einen algebraischen Zugang, um sich mit Prädikatenlogik erster Stufe



## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

auseinanderzusetzen. In vielen Anwendungen des Satzes geht es um die Frage, wie viele Variablen bzw. Quantoren benötigt werden, um gewisse Aussagen zu formulieren. Die Idee wird es sein, eine Gewinnstrategie für Delilah in einem passendem EF-Spiel zu konstruieren und das Ergebnis dann auf den Aufbau von gewissen Formeln zu übertragen. Diese Gewinnstrategien sind meist nicht trivial und teilweise mit kombinatorischen Argumenten verbunden, es gibt aber auch Methoden, mit denen man diese vermeiden kann. Dazu mehr im zweiten Abschnitt dieser Arbeit.

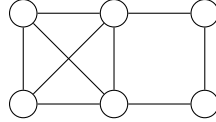


Abbildung 2.2: Ein Graph, der eine Clique mit 4 Elementen enthält

**Proposition 2.10.** Es bezeichne  $\text{CLIQUE}(k)$  die Menge aller ungerichteten Graphen, die einen vollständigen Subgraphen der Größe  $k$  (eine *Clique*) enthalten (vgl. Abb. 2.2). Dann gilt

$$\text{CLIQUE}(k) \in \mathcal{L}^k(\tau_g(\text{wo} \leq)) \setminus \mathcal{L}^{k-1}(\tau_g(\text{wo} \leq))$$

**Beweis.** Zuerst beobachten wir, dass  $\text{CLIQUE}(k)$  in  $\mathcal{L}^k(\tau_g(\text{wo} \leq))$  formulierbar ist:

$$(\exists x_1, x_2, \dots, x_k)(\text{distinct}(x_1, \dots, x_k) \wedge E(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge E(x_1, x_k) \wedge \dots \wedge E(x_{k-1}, x_k)).$$

Um zu zeigen, dass  $k$  Variablen auch wirklich nötig sind, beweisen wir  $K_k \sim^{k-1} K_{k-1}$ , wobei  $K_k$  den vollständigen Graphen mit  $k$  Knoten bezeichnet. Haben wir dies nämlich bewiesen, so gibt es nach Satz 2.8 keine Formel in  $\mathcal{L}^{k-1}(\tau_g(\text{wo} \leq))$ , welche die zwei Graphen unterscheiden kann. Damit sind  $k-1$  Variablen also zu wenige, um  $\text{CLIQUE}(k)$  zu formulieren. Wir zeigen also, dass Delilah eine Gewinnstrategie für  $\mathcal{G}^{k-1}(K_k, K_{k-1})$  hat: wir können annehmen, dass Samson immer einen Spielstein auf einen unbesetzten Knoten legt, denn sonst legt Delilah auch wie zuvor. Delilah antwortet, indem sie ihren Spielstein auch auf einen unbesetzten Knoten legt. Da es nur  $k-1$  Spielsteine gibt, ist dies stets möglich. Weil wir auf vollständigen Graphen spielen, ist jeder Knoten mit jedem verbunden und für den partiellen Isomorphismus reicht die Injektivität, womit Delilah eine Gewinnstrategie hat. ■

**Proposition 2.11.**  $\text{PATH}_k(x, y) \in \mathcal{L}(\tau_g)$  bedeute, dass ein Pfad von  $x$  nach  $y$  mit einer Länge von höchstens  $2^k$  existiert. Dann gilt

$$\text{PATH}_k \in \mathcal{L}_k^3(\tau_g(\text{wo} \leq)) \setminus \mathcal{L}_{k-1}(\tau_g).$$

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

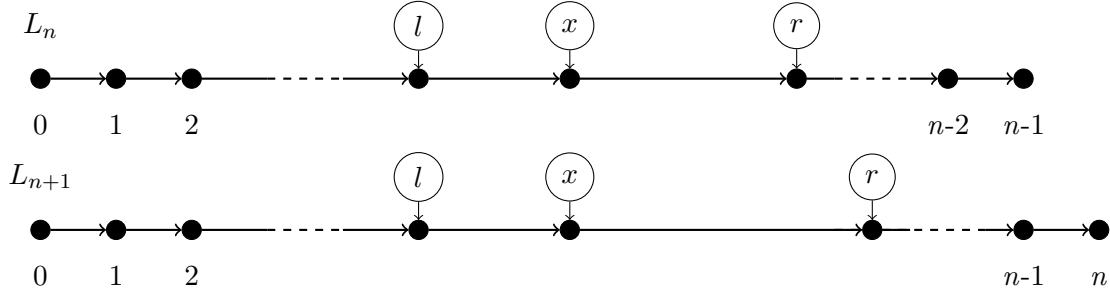


Abbildung 2.3: Die Liniensegmente  $L_n$  und  $L_{n+1}$

**Beweis.** Um zu zeigen, dass sich  $\text{PATH}_k$  mit drei Variablen und  $k$  Quantoren ausdrücken lässt, geben wir eine induktive Formulierung an:

$$\begin{aligned} \text{PATH}_0(x, y) &\equiv x = y \vee E(x, y), \\ \text{PATH}_{k+1}(x, y) &\equiv (\exists z)(\text{PATH}_k(x, z) \wedge \text{PATH}_k(z, y)). \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass man wirklich nur drei Variablen benötigt, wie man induktiv zeigen kann. Der Induktionsanfang folgt per Definition. Wir können also annehmen, dass  $\text{PATH}_k(x, z)$  bzw.  $\text{PATH}_k(z, y)$  mit drei Variablen formuliert sind. Dabei dürfen wir die gebundene Variable jeweils wählen:

$$\begin{aligned} \text{PATH}_k(x, z) &\equiv (\exists y)(\text{PATH}_{k-1}(x, y) \wedge \text{PATH}_{k-1}(y, z)), \\ \text{PATH}_k(z, y) &\equiv (\exists x)(\text{PATH}_{k-1}(z, x) \wedge \text{PATH}_{k-1}(x, y)). \end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt nur drei Variablen gebraucht, um  $\text{PATH}_{k+1}(x, y)$  zu formulieren. Es bleibt also zu zeigen, dass wir  $\text{PATH}_k$  nicht mit weniger Quantoren formulieren können. Dafür definieren wir  $L_n \in \text{STRUC}[\langle E^2, \leq^2, 0, \max \rangle]$  als ein gerichtetes Liniensegment der Länge  $n - 1$ , das heißt  $\|L_n\| = n$ . Auf  $L_n$  soll eine Ordnungsstruktur von links nach rechts definiert sein (vgl. Abb. 2.3). Für ein festes  $k \in \mathbb{N}$  wählen wir  $n := 2^{k+1} + 1$ . Per Definition haben die längsten Pfade in  $L_n$  bzw.  $L_{n+1}$  Länge  $n - 1$  bzw.  $n$ . Weil aber  $n = 2^{k+1} + 1 > 2^{k+1}$  gilt daher

$$L_n \models \text{PATH}_{k+1}(0^{L_n}, \max^{L_n}) \quad \text{und} \quad L_{n+1} \models \neg \text{PATH}_{k+1}(0^{L_{n+1}}, \max^{L_{n+1}}).$$

Das Ziel ist es jetzt wieder, den Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé anzuwenden, indem wir uns im Spiel  $\mathcal{G}_k(L_n, L_{n+1})$  eine Gewinnstrategie für Delilah überlegen. Dafür führen wir  $d(x, y)$  als die Länge des Pfades zwischen den Knoten  $x$  und  $y$  ein. Wir bemerken, dass dies auf den Graphen  $L_n$  wohldefiniert ist. Nun zeigen wir mittels vollständiger Induktion folgende Aussage: Wird die  $m$ -te Runde des Spiels mit  $m \in \{0, \dots, k\}$  und

## 2 Der Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé

$x, y \in \text{dom}(\alpha_m) = \text{dom}(\beta_m)$  gespielt, so gilt

$$d(\alpha_m(x), \alpha_m(y)) \leq 2^{k-m} \Rightarrow d(\alpha_m(x), \alpha_m(y)) = d(\beta_m(x), \beta_m(y)), \quad (2.3)$$

$$d(\beta_m(x), \beta_m(y)) \leq 2^{k-m} \Rightarrow d(\alpha_m(x), \alpha_m(y)) = d(\beta_m(x), \beta_m(y)),$$

$$\alpha_m(x) \leq \alpha_m(y) \Leftrightarrow \beta_m(x) \leq \beta_m(y). \quad (2.4)$$

Motivation dafür sind folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \alpha_m(x) = \alpha_m(y) &\Leftrightarrow d(\alpha_m(x), \alpha_m(y)) = 0 \leq 2^{k-m} \\ &\stackrel{(2.3)}{\Leftrightarrow} d(\beta_m(x), \beta_m(y)) = 0 \leq 2^{k-m} \\ &\Leftrightarrow \beta_m(x) = \beta_m(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\alpha_m(x), \alpha_m(y)) &\Leftrightarrow d(\alpha_m(x), \alpha_m(y)) = 1 \leq 2^{k-m} \\ &\stackrel{(2.3)}{\Leftrightarrow} d(\beta_m(x), \beta_m(y)) = 1 \leq 2^{k-m} \\ &\Leftrightarrow E(\beta_m(x), \beta_m(y)). \end{aligned}$$

Damit sind, sobald wir die Aussage gezeigt haben, Bedingungen (2.1) und (2.2) erfüllt, womit ein partieller Isomorphismus vorliegt, das heißt Delilah hat eine Gewinnstrategie.

In der nullten Runde liegen nur die Konstanten 0 und max auf dem Spielbrett. Es gilt

$$d(0^{L_n}, \max^{L_n}) = 2^{k+1} > 2^k \quad \text{und} \quad d(0^{L_{n+1}}, \max^{L_{n+1}}) = 2^{k+1} + 1 > 2^k.$$

Damit ist (2.3) erfüllt, offenbar gilt auch (2.4).

In der  $(m+1)$ -ten Runde beginnt Samson und legt einen Spielstein  $x$  auf einen Knoten. Seien  $l$  und  $r$  beliebige Spielsteine links bzw. rechts von  $x$  (vgl. Abb. 2.3). Diese existieren immer, da die Elemente 0 und max bereits auf dem Spielbrett liegen und sich Samson nicht für diese entscheidet weil Delilah dann auch wieder gezwungen ist, auf 0 oder max zu legen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege  $l$  näher (oder gleich nah) bei  $x$ . Delilah legt nun ihren Spielstein  $x$  so, dass  $d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(x)) = d(\beta_{m+1}(l), \beta_{m+1}(x))$ . Mit dieser Wahl gelten offenbar Formel (2.4) und Formel (2.3) für die Spielsteine links von  $x$ . Für die restlichen Spielsteine machen wir eine Fallunterscheidung.

- 1. Fall :  $d(\alpha_m(l), \alpha_m(r)) \leq 2^{k-m}$  oder  $d(\beta_m(l), \beta_m(r)) \leq 2^{k-m}$ .

Weil  $l$  und  $r$  in einer vorigen Runde platziert worden sind, gilt nach Definition der Konfigurationen und Induktionshypothese  $d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(r)) = d(\alpha_m(l), \alpha_m(r)) = d(\beta_m(l), \beta_m(r)) = d(\beta_{m+1}(l), \beta_{m+1}(r))$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} d(\alpha_{m+1}(x), \alpha_{m+1}(r)) &= d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(r)) - d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(x)) \\ &= d(\beta_{m+1}(l), \beta_{m+1}(r)) - d(\beta_{m+1}(l), \beta_{m+1}(x)) \\ &= d(\beta_{m+1}(x), \beta_{m+1}(r)). \end{aligned}$$

Also ist (2.3) erfüllt.

- 2. Fall :  $d(\alpha_m(l), \alpha_m(r)) > 2^{k-m}$  und  $d(\beta_m(l), \beta_m(r)) > 2^{k-m}$   
Da  $l$  näher bei  $x$  liegt als  $r$ , gilt  $d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(x)) \leq d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(r))$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} d(\alpha_{m+1}(x), \alpha_{m+1}(r)) &> 2^{k-m} - d(\alpha_{m+1}(l), \alpha_{m+1}(x)) \\ &\geq 2^{k-m} - d(\alpha_{m+1}(x), \alpha_{m+1}(r)) \end{aligned}$$

und daher

$$2d(\alpha_{m+1}(x), \alpha_{m+1}(r)) > 2^{k-m} \Leftrightarrow d(\alpha_{m+1}(x), \alpha_{m+1}(r)) > 2^{k-(m+1)}.$$

Analoges gilt für  $d(\beta_{m+1}(x), \beta_{m+1}(r))$ , womit die Kontraposition von (2.3) gezeigt ist.

In jedem Fall hat Delilah also eine Gewinnstrategie und es gilt  $L_n \sim_k L_{n+1}$ . Nach Satz 2.8 gelten in  $L_n$  genau die Formeln mit Quantorentiefe  $k$ , die auch in  $L_{n+1}$  gelten. Also ist  $\text{PATH}_{k+1}$  nicht mit  $k$  Quantoren formulierbar. ■

### 3 Hanfs Theorem

Zu Beginn dieses Abschnitts werden wir sehen, dass es hinreichend und sogar notwendig ist, EF-Spiele zu spielen, um zu zeigen, dass gewisse boolesche Abfragen nicht first-order formulierbar sind. Das bedeutet also, dass die Spiele uns eine vollständige Methodik liefern, um nicht-Ausdrückbarkeit zu beweisen. Dies ist insofern eine beträchtliche Erkenntnis, da darin eine All-Aussage steckt, wohingegen zum Beweis der Ausdrückbarkeit lediglich eine Existenz-Aussage gezeigt werden muss.

**Definition 3.1.** Sei  $\tau$  ein Vokabular. Ein Satz  $\varphi \in \mathcal{L}_r(\tau)$  heißt *vollständig mit Quantorentiefe  $r$* , falls

$$\forall \psi \in \mathcal{L}_r(\tau), \psi \text{ Satz} : \varphi \vdash \psi \text{ oder } \varphi \vdash \neg \psi.$$

**Bemerkung 3.2.** Ein Satz  $\varphi \in \mathcal{L}_r(\tau)$  ist also genau dann vollständig, falls für alle Sätze  $\psi \in \mathcal{L}_r(\tau)$  eine der folgenden Aussagen gilt:

$$\forall \mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau] : \mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi,$$

$$\forall \mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau] : \mathcal{A} \models \varphi \Rightarrow \mathcal{A} \models \neg \psi.$$

□

### 3 Hanfs Theorem

**Lemma 3.3.** Sei  $\tau$  ein Vokabular und  $\mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau]$ . Dann gibt es bis auf Äquivalenz genau einen vollständigen Satz  $\Phi$  mit Quantorentiefe  $r$ , sodass  $\mathcal{A} \models \Phi$ . Außerdem gilt für eine beliebige weitere Struktur  $\mathcal{B} \in \text{STRUC}[\tau]$ :

$$\mathcal{A} \models \Phi \text{ und } \mathcal{B} \models \Phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B}.$$

**Beweis.** Sei  $\text{Th}_r(\mathcal{A}) = \{\varphi \in \mathcal{L}_r(\tau) : \mathcal{A} \models \varphi, \varphi \text{ Satz}\}$  die Theorie der Tiefe  $r$  von  $\mathcal{A}$ , nach Lemma 2.7 ist diese Menge bis auf Äquivalenz der Formeln endlich. Deshalb ist

$$\Phi \equiv \bigwedge_{\varphi \in \text{Th}_r(\mathcal{A})} \varphi$$

wohldefiniert. Wir weisen nun die Vollständigkeit von  $\Phi$  nach. Seien dafür ein Satz  $\psi \in \mathcal{L}_r(\tau)$  und eine Struktur  $\mathcal{B} \in \text{STRUC}[\tau]$  mit  $\mathcal{B} \models \Phi$  beliebig aber fest. Falls  $\mathcal{A} \models \psi$  folgt  $\mathcal{B} \models \psi$ , da  $\psi$  ein Bestandteil des Satzes  $\Phi$  ist. Mit der selben Argumentation gilt auch  $\mathcal{B} \models \neg\psi$  falls  $\mathcal{A} \models \neg\psi$ . Damit ist  $\Phi$  also vollständig (vgl. Bemerkung 3.2).

Es bleibt also die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei also  $\Psi$  ein weiterer vollständiger Satz mit Quantorentiefe  $r$  und  $\mathcal{A} \models \Psi$ . Wir erhalten die zwei Aussagen:

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau] : \mathcal{A} \models \Phi \Rightarrow \mathcal{A} \models \Psi, \quad \text{oder} \quad \forall \mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau] : \mathcal{A} \models \Phi \Rightarrow \mathcal{A} \models \neg\Psi, \\ \forall \mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau] : \mathcal{A} \models \Psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \Phi, \quad \text{oder} \quad \forall \mathcal{A} \in \text{STRUC}[\tau] : \mathcal{A} \models \Psi \Rightarrow \mathcal{A} \models \neg\Phi. \end{aligned}$$

Dabei können die Fälle rechts nicht eintreten, da  $\mathcal{A} \models \Phi$  und  $\mathcal{A} \models \Psi$ . Also gelten die beiden Aussagen auf der linken Seite, dies bedeutet aber nichts anderes als dass  $\Psi \equiv \Phi$ .

Die zweite Aussage beweisen wir in den zwei Richtungen. Für den Beweis der Implikation von links nach rechts betrachten wir einen beliebigen Satz  $\psi \in \mathcal{L}_r(\tau)$ . Falls  $\psi$  in allen Strukturen gilt, in denen auch  $\Phi$  gilt, so folgt  $\mathcal{A} \models \psi$  und  $\mathcal{B} \models \psi$ . Für den zweiten Fall lässt sich analog argumentieren. Also gelten insgesamt in  $\mathcal{A}$  genau jene Sätze, die in  $\mathcal{B}$  gelten, das heißt  $\mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B}$ . Die Rückrichtung folgt direkt aus  $\text{Th}_r(\mathcal{A}) = \text{Th}_r(\mathcal{B})$  und unserer Konstruktion eines vollständigen Satzes. ■

**Satz 3.4.** Sei  $\tau$  ein endliches, relationales Vokabular,  $\mathcal{C}$  eine Klasse von Strukturen auf  $\tau$  und  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}$  eine boolesche Abfrage auf  $\mathcal{C}$ . Dann ist  $\mathcal{S}$  nicht ausdrückbar in Prädikatenlogik erster Stufe genau dann, wenn für alle  $r \in \mathbb{N}$  Strukturen  $\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_r \in \mathcal{C}$  existieren, sodass

1.  $\mathcal{A}_r \in \mathcal{S}$  und  $\mathcal{B}_r \notin \mathcal{S}$
2.  $\mathcal{A}_r \sim_r \mathcal{B}_r$ .

**Beweis.** Von links nach rechts betrachten wir die Menge  $\Phi$  aller nicht äquivalenten, vollständigen Sätze mit Quantorentiefe  $r$  für ein beliebiges, aber festes  $r \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 2.7 sind das nur endlich viele, d.h.  $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ . Nach dem vorigen Lemma existiert für jede Struktur  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$  genau ein vollständiger Satz  $\varphi_k$ , sodass  $\mathcal{A} \models \varphi_k$ . Gibt

### 3 Hanfs Theorem

es zwei Strukturen  $\mathcal{A}_r \in \mathcal{S}$  und  $\mathcal{B}_r \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{S}$ , die den selben vollständigen Satz erfüllen, so gilt wiederum nach Lemma 3.3, dass  $\mathcal{A}_r \equiv_r \mathcal{B}_r$ , also sind die obigen Bedingungen nach dem Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé erfüllt. Existieren keine zwei solchen Strukturen, so sind die  $\varphi_k$  von  $\mathcal{S}$  partitioniert. Dann definieren wir  $Y := \{k \in \mathbb{N} : (\exists \mathcal{A} \in \mathcal{S})(\mathcal{A} \models \varphi_k)\}$  und

$$\Phi \equiv \bigvee_{k \in Y} \varphi_k.$$

Offenbar gilt  $\mathcal{A} \models \Phi$  für ein  $\mathcal{A}$ , das in  $\mathcal{S}$  liegt. Sei nun  $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$  mit  $\mathcal{B} \models \Phi$ . Dann existiert ein Index  $i$ , sodass  $\mathcal{B} \models \varphi_i$ , gleichzeitig gibt es aber auch eine Struktur  $\tilde{\mathcal{B}} \in \mathcal{S}$  mit  $\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi_i$ . Wegen der Partitionierung der  $\varphi_k$  muss dann aber auch  $\mathcal{B} \in \mathcal{S}$  gelten. Dann ist  $\Phi$  aber ein Satz der Prädikatenlogik erster Stufe, der  $\mathcal{S}$  beschreibt, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Für den Beweis der Implikation von rechts nach links seien 1. und 2. erfüllt. Nach dem Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé ist 2. äquivalent zu  $\mathcal{A}_r \equiv_r \mathcal{B}_r$ . Das heißt für alle  $r \in \mathbb{N}$  und alle  $\varphi \in \mathcal{L}_r(\tau)$  gilt

$$\mathcal{A}_r \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B}_r \models \varphi.$$

Angenommen, es existiert eine Formel  $\gamma \in \mathcal{L}(\tau)$ , sodass

$$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{C} : \mathcal{A} \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{S}.$$

Dann gilt für alle  $r \in \mathbb{N}$  :

$$\mathcal{A}_r \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{A}_r \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{B}_r \models \gamma \Leftrightarrow \mathcal{B}_r \in \mathcal{S}.$$

Dies steht allerdings im Widerspruch zu 1., womit die Aussage gezeigt ist. ■

Wie wir in Proposition 2.11 gesehen haben, kann es durchaus technisch aufwändig sein, Gewinnstrategien für Delilah zu konstruieren. Daher werden wir Hanfs Theorem beweisen, das uns erlauben wird, durch lokale algebraische Beobachtungen auf eine Gewinnstrategie zu schließen. Zuerst müssen wir uns damit beschäftigen, inwiefern Lokalität zu verstehen ist, dies motiviert folgende Definitionen.

**Definition 3.5.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Struktur auf dem Vokabular  $\tau = \langle R_1^{a_1}, \dots, R_n^{a_n}, c_1, \dots, c_n \rangle$ . Der *Gaifman-Graph*  $G_{\mathcal{A}} = (|\mathcal{A}|, E_{\mathcal{A}})$  ist definiert als Struktur mit der binären Relation

$$E_{\mathcal{A}} = \{(a, b) : (\exists i)(\exists \langle d_1, \dots, d_{a_i} \rangle \in R_i^{\mathcal{A}})(a, b \in \{d_1, \dots, d_{a_i}\})\}.$$

Sei  $(\mathcal{A}, \alpha_r)$  die Konfiguration der Struktur nach einer Runde  $r$  eines EF-Spiels und sei  $a \in \text{rng}(\alpha_r)$ . Die  $\ell$ -Umgebung von  $a$  ist definiert als die Struktur  $N(a, \ell)_{\alpha_r}$  mit Universum

$$|N(a, \ell)_{\alpha_r}| = \{b \in \text{rng}(\alpha_r) : d(a, b) \leq \ell\}$$

### 3 Hanfs Theorem

und Relationen von  $\mathcal{A}$ . Dabei bezeichnet  $d(a, b)$  die Länge des kürzesten Weges zwischen  $a$  und  $b$  im Gaifman-Graphen  $G_{\mathcal{A}}$ . Wenn im Zusammenhang ersichtlich ist, von welcher Abbildung die Rede ist so, verwenden wir auch die Notation  $N(a, \ell)$ .

Den  $\ell$ -Typ von  $a$  definieren wir als den Isomorphietyp von  $N(a, \ell)_{\alpha_r}$  d.h. die Äquivalenzklasse von  $N(a, \ell)_{\alpha_r}$  bezüglich der durch Isomorphie induzierten Äquivalenzrelation.  $\square$

**Lemma 3.6.** Sei  $\tau$  ein relationales Vokabular,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{STRUC}[\tau]$  und  $(\mathcal{A}, \alpha), (\mathcal{B}, \beta)$  Konfigurationen. Dann gilt für ein festes  $m \in \mathbb{N}$ : Falls  $a \in |\mathcal{A}|$  und  $b \in |\mathcal{B}|$  vom selben  $m$ -Typen sind, dann auch vom selben  $(m-1)$ -Typen.

**Beweis.** Da  $a$  und  $b$  sind vom selben  $m$ -Typ sind, gilt  $[N(a, m)]_{\cong} = [N(b, m)]_{\cong}$ . Also existiert ein Isomorphismus  $\varphi : |\mathcal{A}| \rightarrow |\mathcal{B}|$ , es ist natürlich auch  $\varphi|_{N(a, m-1)}$  ein Isomorphismus, es bleibt nur zu zeigen, dass das Bild auch wirklich  $N(b, m-1)$  ist. Sei dazu  $x \in N(a, m-1)$  also  $d(a, x) \leq m-1$ . Wie man leicht mit vollständiger Induktion zeigt, ist Distanz in einem Graphen invariant unter Isomorphie. Deshalb folgt durch  $d(a, a) = 0$ , dass  $d(\varphi(a), \varphi(a)) = 0$ , das kann aber nur für das Element  $b$  gelten, also  $\varphi(a) = b$ . Insgesamt folgt also  $d(b, \varphi(x)) = d(\varphi(a), \varphi(x)) = d(a, x) \leq m-1$  und daher  $\varphi(x) \in N(b, m-1)$ . Wir erhalten also  $N(a, m-1) \cong N(b, m-1)$  und somit die Aussage.  $\blacksquare$

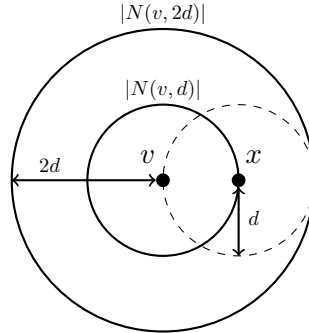


Abbildung 3.1: Induktiver Schritt zum Beweis von Hanfs Theorem mit  $d = 2^{r-(m+1)}$

**Satz 3.7.** (*Hanfs Theorem*)

Sei  $\tau$  ein endliches, relationales Vokabular,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \text{STRUC}[\tau]$  und  $r \in \mathbb{N}$ . Es gelte für jeden möglichen  $2^r$ -Typ  $t$ , dass  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  genau dieselbe Anzahl an Elementen des Typs  $t$  haben. Dann gilt  $\mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B}$ .

**Beweis.** Wir zeigen  $\mathcal{A} \sim_r \mathcal{B}$  und wenden dann Satz 2.8 an, wir konstruieren also eine Gewinnstrategie für Delilah. Da es keine Restriktion in der Anzahl der Spielsteine gibt, können wir annehmen, dass Samson jede Runde einen neuen Spielstein legt. Daher ist

### 3 Hanfs Theorem

ein partieller Isomorphismus in der letzten Runde auch ein partieller Isomorphismus für alle vorherigen Runden. Damit müssen wir nur eine Gewinnstrategie für die letzte Runde angeben. Dafür zeigen wir folgende Aussage: Nach Runde  $m$  von  $\mathcal{G}_r(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  gilt

$$(\mathcal{A}, \alpha_m), (\mathcal{B}, \beta_m) \text{ haben die selbe Anzahl an } 2^{r-m}\text{-Typen.} \quad (3.1)$$

Haben wir dies nämlich gezeigt, so gilt nach der letzten Runde, dass für  $i \in \{1, \dots, r\}$  ein Isomorphismus  $f_i$  von  $N(\alpha_r(x_i), 1)$  in  $(\mathcal{A}, \alpha_r)$  nach  $N(\beta_r(x_i), 1)$  in  $(\mathcal{B}, \beta_r)$  existiert. Daher gilt für  $x, y, x_1, \dots, x_{a_i} \in \text{dom}(\alpha_r) = \text{dom}(\beta_r)$

$$\begin{aligned} \alpha_r(x) = \alpha_r(y) &\Leftrightarrow \beta_r(x) = f(\alpha_r(x)) = f(\alpha_r(y)) = \beta_r(y), \\ \langle x_1, \dots, x_{a_i} \rangle \in R_i^{\mathcal{A}} &\Leftrightarrow E_{\mathcal{A}}(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge E_{\mathcal{A}}(x_1, x_{a_i}) \wedge \dots \wedge E_{\mathcal{A}}(x_{a_i-1}, x_{a_i}) \\ &\Leftrightarrow \alpha_r(x_1), \dots, \alpha_r(x_{a_i}) \in |N(\alpha_r(x_1), 1)| = \dots = |N(\alpha_r(x_{a_i}), 1)| \\ &\Leftrightarrow \beta_r(x_1), \dots, \beta_r(x_{a_i}) \in |N(\beta_r(x_1), 1)| = \dots = |N(\beta_r(x_{a_i}), 1)| \\ &\Leftrightarrow E_{\mathcal{B}}(x_1, x_2) \wedge \dots \wedge E_{\mathcal{B}}(x_1, x_{a_i}) \wedge \dots \wedge E_{\mathcal{B}}(x_{a_i-1}, x_{a_i}) \\ &\Leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_{a_i} \rangle \in R_i^{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Es bleibt also nur (3.1) zu zeigen. Wir machen eine vollständige Induktion über  $m$ . Für  $m = 0$  folgt die Aussage nach Voraussetzung. In der  $(m+1)$ -ten Runde setzte Samson o.B.d.A. auf ein Element  $v \in |\mathcal{A}|$ . Nach Induktionshypothese kann Delilah auf ein  $v' \in |\mathcal{B}|$  mit demselben  $2^{r-m}$ -Typ wie  $v$  setzen. Weil erst in dieser Runde das erste Mal ein Spielstein auf  $v$  gelegt wurde, gilt für ein  $a \in |\mathcal{A}|$

$$\begin{aligned} d(a, v) \leq 2^{r-(m+1)} &\Leftrightarrow v \in N(a, 2^{r-(m+1)})_{\alpha_{m+1}} \\ &\Leftrightarrow N(a, 2^{r-(m+1)})_{\alpha_{m+1}} \neq N(a, 2^{r-(m+1)})_{\alpha_m}. \end{aligned}$$

Ist  $d(a, v) > 2^{r-(m+1)}$ , so sind also die Nachbarschaften der jetzigen und vorherigen Konfiguration dieselben. Nach Induktionshypothese stimmen in  $(\mathcal{A}, \alpha_m), (\mathcal{B}, \beta_m)$  außerdem die Anzahl der  $2^{r-m}$ -Typen überein und daher nach induktivem anwenden von Lemma 3.6 sogar die Anzahl der  $2^{r-(m+1)}$ -Typen.

Gilt andererseits  $d(a, v) \leq 2^{r-(m+1)}$ , so betrachten wir den Isomorphismus

$$\varphi : N(v, 2^{r-m}) \rightarrow N(v', 2^{r-m})$$

der durch die Wahl von Delilah existiert. Da Isomorphismen Distanzen erhalten, wird durch  $\varphi$  jedes Element  $x \in N(v, 2^{r-(m+1)})$  auf ein  $x' \in N(v', 2^{r-(m+1)})$  abgebildet. Weil  $N(x, 2^{r-(m+1)})$  vollständig in  $N(v, 2^{r-m})$  liegt, wird auch diese Umgebung isomorph auf die Umgebung  $N(x', 2^{r-(m+1)})$  abgebildet (vgl. Abb. 3.1). Damit ist auch hier die Anzahl der  $2^{r-(m+1)}$ -Typen gleich und die Aussage ist gezeigt. ■

Als Abschluss und Krönung dieser Arbeit führen wir noch ein Beispiel einer typischen Anwendung des bisher Gezeigten an.



**Proposition 3.8.** Azyklizität ist nicht formulierbar in Prädikatenlogik erster Stufe.

**Beweis.** Für ein beliebiges  $r \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{A}_r$  das Liniensegment mit  $2^{r+3}$  Knoten und  $\mathcal{B}_r$  die Vereinigung eines Liniensegments und eines Zyklus mit jeweils  $2^{r+2}$  Knoten (vgl. Abbildung 3.2). Wir betrachten die  $2^r$ -Typen im Graph  $\mathcal{A}_r$ . Da  $\mathcal{A}_r$  ein Liniensegment ist, geht es nur um die Anzahl der Elemente in der  $2^r$ -Umgebung eines Knotens. Daher haben der erste und der letzte Knoten denselben Typen und sind auch die einzigen Knoten von diesem Typen. Nun geht man induktiv ein Element weiter nach innen und erhält wieder zwei Knoten vom selben Typen, die einzigen mit diesem Typen. Dies kann man so lange tun, bis Elemente mit maximalen Typen kommen, also in deren Umgebung  $2^r + 1$  Knoten liegen. Dies passiert genau nach dem  $2^r$ -ten bzw.  $(2^{r+3} - 2^r)$ -ten Knoten. Deshalb kann man auch im kürzeren Liniensegment des Graphen  $\mathcal{B}_r$  so vorgehen und erhält jeweils dieselbe Anzahl von Elementen desselben nicht-maximalen Typs. Es bleibt also nur noch, die Anzahl der Elemente maximalen Typs in den Graphen zu zählen. In  $\mathcal{A}_r$  sind das genau  $2^{r+3} - 2^{r+1} = 3 \cdot 2^{r+1}$ . Im Liniensegment in  $\mathcal{B}_r$  liegen  $2^{r+2} - 2^{r+1} = 2^{r+1}$  Knoten maximalen Typs und da der Zyklus mehr als  $2^r + 1$  Elemente besitzt, sind alle Knoten darin maximal. Das heißt, wir erhalten insgesamt  $2^{r+1} + 2^{r+2} = 3 \cdot 2^{r+1}$  Knoten maximalen Typs in  $\mathcal{B}_r$ . Damit sind die Voraussetzungen von Hanfs Theorem erfüllt und es gilt  $\mathcal{A}_r \equiv_r \mathcal{B}_r$ . Schlussendlich folgt nach Satz 3.4 die Aussage. ■

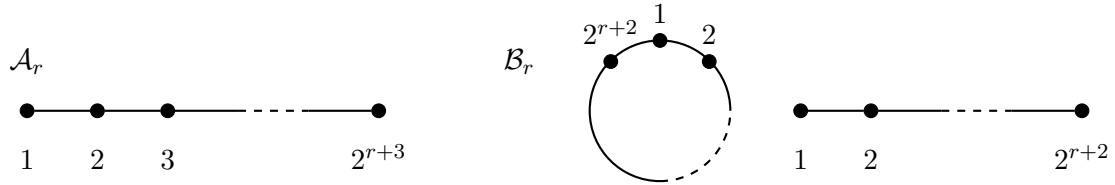


Abbildung 3.2: Ein azyklischer und ein zyklischer Graph

## Literaturverzeichnis

- [Imm12] Neil Immerman. *Descriptive Complexity* -. Springer Science & Business Media, Berlin Heidelberg, 2012.
- [Lib13] Leonid Libkin. *Elements of Finite Model Theory* -. Springer Science & Business Media, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Pap94] Christos H. Papadimitriou. *Computational Complexity* -. Addison-Wesley, Amsterdam, 1994.