

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT

Primmodelle, Typen und Enderweiterungen in PA

Leopold Fajtak

betreut von
Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan HETZL

22. Jänner 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Voraussetzungen	2
2.1	Codieren von Tupeln	2
2.2	Elementare Untermodelle	2
3	Primmodelle	3
4	Vermeiden von Typen	6
5	Enderweiterungen	9

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen des Seminars aus Logik im WS2020/21 an der Technischen Universität Wien verfasst und basiert größtenteils auf Kapitel 8 des Buches 'Models of Peano Arithmetic' von Richard Kaye [3].

Es hat sich dabei sehr gut ergeben den dort bewiesenen Satz (Omitting Types Theorem 4.2) dem bekannteren Resultat, hier Satz, 4.1 gegenüberzustellen.

Im letzten Kapitel geht es um elementare Erweiterungen von Modellen der Peano Arithmetik.

2 Voraussetzungen

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_A$ die Sprache der Arithmetik. Sie enthält Konstantensymbole $0, 1$, zweistellige Funktionssymbole $+, \cdot$, und ein zweistelliges Prädikatensymbol $<$.

Ist A eine Menge an Variablensymbolen, so bezeichnet $\mathcal{L}(A)$ die Sprache, die aus $\mathcal{L}$ entsteht, wenn man ihr die Symbole aus A als Konstanten hinzufügt. PA bezeichnet die Axiome der Peano Arithmetik. Wir werden später Lemma 4.2 aus [3] benötigen, nämlich

Lemma 2.1. *PA beweist alle Instanzen $L_x\phi$ des Prinzips der kleinsten Zahl*

Hierbei bezeichnet für eine $\mathcal{L}_A$ -Formel $\phi(x, \bar{y})$ $L_x\phi$ den Satz

$$\forall \bar{y}(\exists x\phi(x, \bar{y}) \rightarrow \exists z(\phi(z, \bar{y}) \wedge \forall w < z \neq \phi(w, \bar{y})))$$

2.1 Codieren von Tupeln

Um Tupel zu codieren gehen wir vor wie in [2, Abschnitt 1.3], bzw. [3, Kapitel 5], und definieren

$$\langle x, y \rangle := \frac{(x + y + 1)(x + y)}{2} + y$$

und $\langle x_1, \dots, x_n \rangle := \langle x_1, \langle x_2, \dots \rangle \rangle$.

Um Folgen zu codieren hilft uns Gödels Lemma [3, Lemma 5.9] :

Lemma 2.2 (Gödels Lemma). *Sei $M \models PA$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x_0, \dots, x_{n-1} \in M$. Dann existiert $u \in M$, sodass*

$$M \models (u)_i = x_i$$

mit $(u)_i := \left(\frac{a}{m(i+1)+1} \right)$, wobei a, m durch $x = \langle a, m \rangle$ eindeutig gegeben sind.

2.2 Elementare Untermodelle

Definition 2.1. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache in Prädikatenlogik erster Stufe, M, N $\mathcal{L}$ -Modelle, so ist M ein *Untermodell* von N ($M \leq N$), falls die Domäne von M eine Teilmenge jener von N ist, alle Konstanteninterpretationen von M enthält, unter den Funktionen von N abgeschlossen ist, und die Interpretationen aller Prädikaten- und Funktionensymbole von $\mathcal{L}$ in M die Einschränkungen jener von N auf die Domäne von M ist.

Weiters ist M ein *elementares Untermodell* von N ($M \preceq N$), falls $M \leq N$ und für alle $\mathcal{L}$ -Formeln $\phi(\bar{x})$ und alle $\bar{a} \in M$

$$M \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \phi(\bar{a})$$

Satz 2.1 (Tarski-Vaught). *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache in Prädikatenlogik erster Stufe, $M \leq N$ $\mathcal{L}$ -Modelle. Dann ist äquivalent:*

(i) $M \preceq N$

(ii) Für jede $\mathcal{L}$ -Formel $\phi(\bar{x}, y)$ und für alle $\bar{a} \in M$

$$N \models \exists y \phi(\bar{a}, y) \Rightarrow \text{es existiert } b \in M, \text{ sodass } N \models \phi(\bar{a}, b)$$

Beweis. Ist M ein elementares Untermodell von N , so gilt (ii) nach Definition 2.1.

Es gelte umgekehrt (ii). Wir beweisen, dass für jede $\mathcal{L}$ -Formel $\psi(\bar{y})$ in Pränexform, $\bar{a} \in M$

$$M \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow N \models \psi(\bar{a}) \quad (1)$$

per Induktion über die Anzahl an Quantoren in ψ .

Ist ψ quantorenfrei, so gilt (1), da alle Konstanten-, Funktionen-, und Prädikatensymbole eingeschränkt auf M gleich interpretiert werden wie in N .

Es gelte die Aussage für Formeln ϕ in Pränexform mit n Quantoren, und $\psi = \exists x \phi(\bar{y}, x)$, wobei ϕ von ebendieser Form sei. Gilt die rechte Seite $N \models \exists x \psi(\bar{a}, x)$, so gibt es nach (ii) ein b in M , sodass $N \models \psi(\bar{a}, b)$. Nach Induktionshypothese gilt dann auch $M \models \psi(\bar{a}, b)$, also $M \models \exists x \psi(\bar{a}, x)$. Gilt umgekehrt $M \models \phi(\bar{a})$, so gibt es ein $b \in M$, sodass $M \models \psi(\bar{a}, b)$, daher nach Induktionshypothese $N \models \psi(\bar{a}, b)$, also $N \models \phi(\bar{a})$.

Formeln der Form $\phi(\bar{y}) = \forall x \psi(\bar{y}, x)$ sind durch Negation erklärt.

□

Definition 2.2. Seien M, N Modelle der Sprache $\mathcal{L}$. Eine Funktion $h : M \rightarrow N$ heißt *Einbettung* von M nach N , falls h injektiv, und ein Homomorphismus bezüglich der Konstanten- und Funktionensymbole in $\mathcal{L}$ ist, der für jedes n -stellige Relationensymbol R von $\mathcal{L}$ für $a_1 \dots a_n$ $M \models R(a_1 \dots a_n)$ genau dann, wenn $N \models R(h(a_1) \dots h(a_n))$ erfüllt.

Bemerkung 2.1. Im Falle $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$ bedeutet das, dass h ein monotoner $(0, 1, +, \cdot)$ -Homomorphismus ist.

Definition 2.3. Seien $M, N, \mathcal{L}, h$ wie oben. Ist $h[M] \preceq N$, so heißt h *elementare Einbettung* von M nach N .

3 Primmodelle

Definition 3.1. Sei M ein $\mathcal{L}$ -Modell, $A \subseteq M$. Ein Element $b \in M$ heißt *definierbar in M über A* , gdw es eine $\mathcal{L}$ -Formel $\theta(x, \bar{y})$ und ein Tupel $\bar{a} \in A$ gibt, sodass $M \models \exists! x \theta(x, \bar{a})$ und $b \in M$ dieser eindeutige Zeuge ist, also $M \models \theta(b, \bar{a})$. Weiters bezeichnen

$$\begin{aligned} K(M; A) &:= \{b \in M \mid b \text{ ist definierbar über } A\} \\ K(M; a_1, \dots, a_n) &:= K(M; \{a_1, \dots, a_n\}) \\ K(M) &:= K(M; \emptyset) \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1. Da jedes $a \in A$ durch die Formel $x = a$ definierbar ist, folgt $A \subseteq K(M; A)$.

Proposition 3.1. Ist M ein $\mathcal{L}$ -Modell, $A \subseteq M$, dann ist $K(M; A) \leq M$

Beweis. Jede Konstanteninterpretation ist definiert durch die Formel $x = c$, c ein Konstantensymbol von $\mathcal{L}$. Für jedes Funktionssymbol $f(x_1 \dots x_n)$ von $\mathcal{L}$ gilt: Sind $\bar{b} = b_1, \dots, b_n \in K(M; A)$

durch die Formeln $\eta_i(x, \bar{a})$, $i \in \{1 \dots n\}$, definiert, so erfüllt $f(\bar{b})$ als einziges Element von M die Formel

$$\exists \bar{b} \left(\bigwedge_{i=1}^n \eta_i(b_i, \bar{a}) \wedge f(\bar{b}) = z \right)$$

Daher ist $f(\bar{b}) \in K(M; A)$ und $K(M; A)$ abgeschlossen unter Funktionen. $\square$

Satz 3.1 ([3] 8.1). *Sei M ein $\mathcal{L}_A$ -Modell, $M \models PA$ und $A \subseteq M$. Dann ist $K(M; A) \preceq M$.*

Unmittelbar folgt

Korollar 3.1. *Mit den obigen Voraussetzungen gilt $K(M; A) \models PA$* $\square$

Beweis. Nach Proposition 3.1 ist $K(M; A) \leq M$. Nach dem Tarski-Vaught-Test, Satz 2.1, genügt es nun zu zeigen, dass für beliebige $\mathcal{L}_A$ -Formeln $\phi(x, \bar{y})$, $\bar{c} = c_1 \dots c_n \in K(M; A)$ aus $M \models \exists x \phi(x, \bar{c})$ die Existenz eines $d \in K(M; A)$ folgt, sodass $M \models \phi(d, \bar{c})$: Sei jedes c_i definiert vermöge der Formel $\eta_i(x, \bar{y})$ und $\bar{a} \in A$, also

$$M \models \exists x, \bar{y} \left(\bigwedge_{i=1}^n \eta_i(y_i, \bar{a}) \wedge \phi(x, \bar{y}) \right)$$

Da PA alle Instanzen des Prinzips der kleinsten Zahl beweist folgt

$$M \models \exists! x \left(\left(\bigwedge_{i=1}^n \eta_i(y_i, \bar{a}) \wedge \phi(x, \bar{y}) \right) \wedge \forall z < x \forall \bar{w} \left(\bigwedge_{i=1}^n \eta_i(w_i, \bar{a}) \rightarrow \neg \phi(z, \bar{w}) \right) \right)$$

Der Zeuge der Formel in der großen Klammer d ist vermöge ebendieser Formel über A definiert, also ein Element von $K(M; A)$ mit $M \models \phi(d, \bar{c})$. $\square$

Satz 3.2 ([3] 8.2). *Sei $T \supset PA$ eine vollständige, konsistente Theorie, $M, N \models T$. Dann gibt es eine eindeutige elementare Einbettung $h : K(M) \rightarrow N$. Für diese Einbettung gilt $h[K(M)] = K(N)$*

Beweis. Wir zeigen zuerst Existenz, dann Eindeutigkeit

Existenz: Da T vollständig ist mit $N \models T$ und $K(M) \models T$ (Satz 3.1) gilt für alle $\mathcal{L}_A$ -Formeln θ :

$$N \models \exists! x \theta(x) \text{ gdw } T \vdash \exists! x \theta(x) \text{ gdw } K(M) \models \exists! x \theta(x)$$

Nun sei für jedes $a \in K(M)$ $\theta_a(x)$ eine Formel, die a in M definiert (so eine Formel existiert nach Definition von $K(M)$), und

$$h(a) := \text{der eindeutige Zeuge von } \exists! x \theta_a(x) \text{ in } N$$

Nun ist h injektiv da, falls $K(M) \models (a_1 \neq a_2)$ auch

$$K(M) \models \forall x, y (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \rightarrow x \neq y)$$

$$\text{bzw. } T \vdash \forall x, y (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \rightarrow x \neq y)$$

$$\text{und weiter } N \models \forall x, y (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \rightarrow x \neq y)$$

$$\text{bzw. } N \models (h(a_1) \neq h(a_2))$$

gelten muss. Genauso gilt mit $+ = \diamond_1$ und $\cdot = \diamond_2$ für $i \in \{1, 2\}$, falls $K(M) \models a_1 \diamond_i a_2 = a_3$

$$\begin{aligned} K(M) &\models \forall x, y, z (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \wedge \theta_{a_3}(z) \rightarrow x \diamond_i y = z) \\ T &\vdash \forall x, y, z (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \wedge \theta_{a_3}(z) \rightarrow x \diamond_i y = z) \\ N &\models \forall x, y, z (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \wedge \theta_{a_3}(z) \rightarrow x \diamond_i y = z) \end{aligned}$$

also $N \models h(a_1) \diamond_i h(a_2) = h(a_3)$, und, falls $K(M) \models a_1 < a_2$, dann

$$\begin{aligned} K(M) &\models \forall x, y (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \rightarrow x < y) \\ T &\vdash \forall x, y (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \rightarrow x < y) \\ N &\models \forall x, y (\theta_{a_1}(x) \wedge \theta_{a_2}(y) \rightarrow x < y) \end{aligned}$$

also $N \models h(a_1) < h(a_2)$. Daher ist h eine Einbettung.

Es bleibt die Elementarität zu zeigen:

Da, nach Definition von h alle Bildelemente von h über N definiert sind, ist

$$h[K(M)] \subseteq K(N) \quad (2)$$

Es ist sogar $h[K(M)] = K(N)$:

Für $b \in K(N)$ gibt es eine Formel $\phi(x)$, sodass $N \models \phi(b)$ und $N \models \exists! x \phi(x)$. Daher gilt, da M und N dieselbe Theorie modellieren, $M \models \exists! x \phi(x)$. Also gibt es genau ein $a \in M$ mit $M \models \phi(a)$. Da

$$M \models \forall x, y (\phi(x) \wedge \theta_a(y) \rightarrow x = y)$$

gilt dieselbe Formel auch in N und $h(a) = b$.

Eindeutigkeit: Seien $h, k : K(M) \rightarrow N$ elementare Einbettungen. Da für alle $a \in K(M)$ $K(M) \models \theta_a(a)$ und k eine elementare Einbettung ist, folgt $N \models \theta_a(k(a))$. Da allerdings $N \models \exists! x \theta_a(x)$ muss $k(a) = h(a)$ sein.

□

Hieraus folgt direkt

Korollar 3.2. *Sei $T \supset PA$ vollständig, konsistent, und seien $M, N \models T$ Modelle derselben Theorie. Dann sind $K(M)$ und $K(N)$ isomorph.*

Beweis. Nach Satz 3.2 ist die eindeutige elementare Einbettung $h : K(M) \rightarrow N$ surjektiv auf $K(N)$. □

Daher können wir sinnvoll definieren

Definition 3.2. Es sei $T \supset PA$ eine konsistente, vollständige Theorie. Dann bezeichnet

$$K_T := K(M)$$

mit einem Modell $M \models T$ von T , das - bis auf Isomorphie - eindeutige *Primmodell* von T .

Die Bezeichnung ist durch folgendes Korollar gerechtfertigt

Korollar 3.3. Sei $T \supseteq PA$ vollständig, konsistent. Gilt für ein Modell M $M \preceq K_T$, so ist $M = K_T$.

Beweis. Da $M \models T$ gibt es nach Satz 3.2 eine eindeutige, bijektive, elementare Einbettung $h : K_T \rightarrow K(M) \preceq M \preceq K_T$. Insbesondere ist h eine elementare Einbettung von K_T nach K_T , also die Identitätsfunktion und $K_T = K(M) = M$. $\square$

Eine weitere schöne Eigenschaft ist

Korollar 3.4. Für eine vollständige, konsistente Theorie $T \supset PA$ ist die Identitätsfunktion der einzige Automorphismus auf K_T .

Beweis. Ein Automorphismus auf K_T ist eine elementare Einbettung von K_T in sich selbst, also die Identitätsfunktion. $\square$

Bemerkung 3.2. Ist $T = \text{Th}(\mathbb{N})$, so ist $K_T = \mathbb{N}$, da das Standardmodell $\mathbb{N}$ keine elementaren Unterstrukturen hat.

4 Vermeiden von Typen

Definition 4.1. Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe, $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ endlich viele Variablensymbole. Ein *Typ* über den Variablen $\bar{x}$ ist eine konsistente Menge $\Sigma(\bar{x})$ an $\mathcal{L}$ -Formeln $\sigma(\bar{x})$ in den Variablen $\bar{x}$.

Ist T eine $\mathcal{L}$ -Theorie, so heißt ein Typ $\Sigma(\bar{x})$ *konsistent mit T* , falls $T \cup \Sigma(\bar{x})$ eine konsistente $\mathcal{L}(\{x_1 \dots x_n\})$ -Theorie ist. Genauso nennen wir eine Formel $\phi(\bar{x})$ *konsistent mit T* , falls $\{\phi\}$ konsistent mit T ist.

Ist ein Typ $\Sigma(\bar{x})$ konsistent mit einer Theorie T , so folgt aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz, dass $T \cup \Sigma(\bar{x})$ ein Modell M hat. Da das Redukt von M auf $\mathcal{L}$ ein Modell von T ist, definieren wir entsprechend

Definition 4.2. Ein Modell M *realisiert* einen Typen $\Sigma(\bar{x})$, falls es $\bar{a} \in M$ gibt mit $M \models \sigma(\bar{a})$ für alle $\sigma(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$. Wir schreiben auch $M \models \Sigma(\bar{x})$. Ist dies nicht der Fall, *vermeidet* M den Typen $\Sigma(\bar{x})$.

Bemerkung 4.1. Aus dem Kompaktheitssatz folgt, dass T ein Modell hat, welches $\Sigma = \Sigma(\bar{x})$ realisiert, genau dann wenn jede endliche Teilmenge von Σ mit T konsistent ist.

Um die Frage zu klären wann T ein Modell hat, welches Σ vermeidet ist die Idee des lokalen Realisierens zentral:

Definition 4.3. Sei $\Sigma = \Sigma(\bar{x})$ ein $\mathcal{L}$ -Typ. Eine $\mathcal{L}$ -Theorie T *realisiert Σ lokal* in einer Formel $\phi(\bar{x})$, gdw es eine $\mathcal{L}$ -Formel $\phi(\bar{x})$ gibt, sodass

- (i) ϕ konsistent mit T ist, und
- (ii) Für alle $\sigma(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$, $T \vdash \phi(\bar{x}) \rightarrow \sigma(\bar{x})$.

T *vermeidet Σ lokal*, falls $T \cup \Sigma$ nicht lokal realisiert.

Proposition 4.1. Sei T eine vollständige $\mathcal{L}$ -Theorie, $\Sigma = \Sigma(\bar{x})$ ein $\mathcal{L}$ -Typ. Hat T ein Modell, welches Σ vermeidet, so vermeidet $T \cup \Sigma$ lokal.

Beweis. Realisiert $T \Sigma$ lokal vermöge der Formel ϕ , so gilt $T \vdash \phi$. In jedem Modell M von T gibt es ein Tupel $\bar{a} \in M$, welches die Konstanten $\bar{x}$ interpretiert. Damit gilt $M \models \phi(\bar{a})$, und für alle $\sigma \in \Sigma$ gilt $M \models \sigma(\bar{a})$. Daher realisiert jedes Modell von T den Typen Σ . $\square$

Der folgende Satz erklärt die umgekehrte Richtung in dem Fall, dass $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache ist

Satz 4.1. [Omitting Types [1]] *Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache, $\Sigma(\bar{x})$ ein Typ. vermeidet $T \Sigma$ lokal, so hat T ein abzählbares Modell, welches Σ vermeidet.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen gehen wir davon aus, dass $\Sigma(x)$ nur Formeln in einer Variablen enthält. Sei $C = \{c_0, c_1, \dots\}$ eine abzählbare Menge neuer Konstantensymbole, und $\mathcal{L}' := \mathcal{L}(C)$. Dann ist $\mathcal{L}'$ ebenfalls abzählbar. Wir können also alle $\mathcal{L}'$ Formeln aus $\phi_0, \phi_1, \dots$ auflisten.

Ziel des weiteren Beweises wird sein induktiv eine Folge an konsistenten $\mathcal{L}'$ -Theorien

$$T = T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_m \subset \dots$$

zu definieren, die endliche Erweiterungen von T sind, und für alle $m \in \mathbb{N}$ die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (i) Entweder $\phi_m \in T_{m+1}$ oder $(\neg\phi_m) \in T_{m+1}$
- (ii) Ist $\phi_m = \exists x\psi(x) \in T_{m+1}$, dann ist $\psi(c_p) \in T_{m+1}$, wobei c_p die erste Konstante in C ist, die weder in T_m noch in ϕ_m vorkommt.
- (iii) Es gibt eine Formel $\sigma(x) \in \Sigma(x)$, sodass $\neg\sigma(c_m) \in T_{m+1}$

Haben wir dies bewerkstelligt können wir $T_\omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ setzen. Diese Theorie ist nach dem Kompaktheitssatz konsistent, und nach (i) vollständig, hat also ein abzählbares Modell M mit Interpretationen der Konstanten $b_0, b_1, \dots \in M$.

Für $K := K(M, \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\})$ gilt:

- Nach Proposition 3.1 ist $K \leq M$
- Mit dem Tarski-Vaught-Test, Satz 2.1, und (ii), ist sogar $K \preceq M$
- Jedes $a \in K$ ist definiert als einziger Zeuge einer Formel der Form $\phi_m(x) = \exists x\psi(x)$. Nach (ii) ist $\psi(b_m) \in T_\omega$, und aufgrund der Eindeutigkeit des Zeugen ist $a = b_m$. Also ist $K = \{b_0, b_1, \dots\}$

Da $K \preceq M \models T_\omega$ gilt $K \models T_\omega$, also $K \models T$. Weiters stellt (iii) sicher, dass jedes $b_i \in K$ eine Formel $\sigma \in \Sigma$ verletzt, K also den Typ Σ vermeidet.

Es bleibt also die Konstruktion von $T_i, i \in \mathbb{N}$ zu tun:

Wir konstruieren T_{m+1} aus T_m wie folgt: Für $T_m = T \cup \{\theta_0, \dots, \theta_r\}, r > 0$ sei $\theta := \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_r$, und $n > m$ so groß, dass alle Konstanten aus C in θ und alle Variablen in $x_1, \dots, x_n$ enthalten sind. Dann ersetzen wir für $i < n$ jedes Vorkommen von x_i durch x_{i+n} , danach jedes Vorkommen von c_i durch x_i und setzen $\exists x_0, \dots, \exists x_{m-1}, \exists x_{m+1} \dots \exists x_n$ vor die Formel. Diese neue Formel $\theta'(x_m)$ ist konsistent mit T , also gibt es nach Voraussetzung ein $\sigma(x) \in \Sigma(x)$, sodass $\theta'(x_m) \wedge \neg\sigma(x_m)$ konsistent mit T ist. Ist $\theta_{r+1} := \neg\sigma(c_m) \in T_{m+1}$ so ist (iii) erfüllt.

Wir erfüllen (i) indem wir, falls ϕ_m mit $T_m \cup \{\neg\sigma(c_m)\}$ konsistent ist, $\phi_m \in T_{m+1}$, ansonsten $\neg\phi_m \in T_{m+1}$ sicherstellen. Sei θ_{r+2} entsprechend gleich ϕ_m oder $\neg\phi_m$. Ist weiters $\phi_m = \exists x\psi(x)$ und konsistent mit $T_m \cup \{\neg\sigma(c_m)\}$, stellen wir (ii) sicher indem wir $\psi(c_p) \in T_{m+1}$ verlangen. Es sei also $T_{m+1} := T \cup \{\theta_0, \dots, \theta_{r+2}\} \cup \{\psi(x) \mid \phi_m = \exists x\psi(x)\}$ Da c_p noch nicht verwendet wurde, bleibt T_m dadurch konsistent, und die Konstruktion erfüllt alle Voraussetzungen. $\square$

Für Theorien die PA enthalten erhalten wir mit einer ähnlichen Konstruktion auch ein Resultat, falls $\mathcal{L}$ überabzählbar ist.

Definition 4.4. Es sei T eine $\mathcal{L}$ -Theorie. Ein $\mathcal{L}$ -Typ $\Sigma = \Sigma(\bar{x})$ heißt *vollständig über T* , falls $T \cup \Sigma(\bar{x})$ eine vollständige $\mathcal{L}(\{\bar{x}\})$ -Theorie ist.

Proposition 4.2. *Ist T eine $\mathcal{L}$ -Theorie, $\Sigma(\bar{x})$ ein vollständiger, mit T konsistenter $\mathcal{L}$ -Typ, so realisiert $T \cup \Sigma(\bar{x})$ lokal in $\phi(\bar{x})$ genau dann, wenn*

- (i) $T \cup \Sigma(\bar{x}) \vdash \phi(\bar{x})$ als $\mathcal{L}(\bar{x})$ -Theorie
- (ii) Für alle $\sigma(\bar{x})$ in $\Sigma(\bar{x})$, $T \vdash (\phi(\bar{x}) \rightarrow \sigma(\bar{x}))$

Beweis. " $\Leftarrow$ ": Nach Voraussetzung ist $T \cup \Sigma(\bar{x})$ eine konsistente $\mathcal{L}(\bar{x})$ -Theorie, daher folgt aus (i), dass $T \cup \Sigma(\bar{x})$ ebenfalls eine solche ist. Mit (ii) realisiert $T \cup \Sigma(\bar{x})$ lokal in ϕ .

" $\Rightarrow$ ": Da $T \cup \Sigma(\bar{x})$ eine vollständige $\mathcal{L}(\bar{x})$ -Theorie ist, ist entweder

$$\begin{aligned} &\phi(\bar{x}) \in T \cup \Sigma(\bar{x}) \text{ oder} \\ &\neg\phi(\bar{x}) \in T \cup \Sigma(\bar{x}). \end{aligned}$$

Setzen wir nun voraus, dass $T \cup \Sigma(\bar{x})$ lokal in ϕ realisiert, so ist $\phi(\bar{x}) \cup T$ eine konsistente $\mathcal{L}$ -Theorie. Daher folgt aus dem zweiten Fall mit der Konsistenz von $T \cup \Sigma(\bar{x})$ (und insbesondere T), dass $\neg\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$, und nach Definition des lokalen Realisierens, dass

$$T \vdash \phi(\bar{x}) \rightarrow \neg\phi(\bar{x}).$$

Ein Widerspruch zur Konsistenz von T .

Es kann also nur der erste Fall gelten. Aus diesem folgt sofort (i). □

Satz 4.2 ([3] Corollary 8.5 (Omitting Types - PA -Version)). *Sei C eine (möglicherweise überabzählbare) Menge an Konstantensymbolen (disjunkt zu $\{0, 1\}$), $\mathcal{L}_C := \mathcal{L}_A(C)$, und $T \supset PA$ eine konsistente, vollständige $\mathcal{L}_C$ -Theorie. Dann gibt es ein Modell K von T , sodass für jeden vollständigen Typen $\Sigma(\bar{x})$ über T*

$$K \text{ realisiert } \Sigma(\bar{x}) \quad \text{gdw} \quad T \text{ realisiert } \Sigma(\bar{x}) \text{ lokal}$$

Beweis. Da T konsistent ist gibt es ein Modell $M \models T$. Es sei $A \subseteq M$ die Menge jener Elemente, die die Konstantensymbole C realisieren, und $K := K(M; A)$. Da nach Satz 3.1 $K \preceq M$ gilt $K \models T$.

Sei nun $\Sigma(\bar{x})$ ein vollständiger Typ über T .

Sei $\Sigma(\bar{x})$ von $\bar{a} = a_1 \dots a_n \in K$ realisiert. Dann ist jedes a_i über eine Formel $\eta_i(x, \bar{y})$ und $\bar{b} \in A$ definiert, wobei $\bar{b}$ Konstantensymbole $\bar{c}$ realisieren, also

$$K \models \exists \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^n \eta_i(x_i, \bar{c}) \right),$$

und für alle $\phi(\bar{x}) \in \Sigma(\bar{x})$

$$K \models \forall \bar{x} \left(\bigwedge_{i=1}^n \eta_i(x_i, \bar{c}) \rightarrow \phi(\bar{x}) \right)$$

Aus der ersten Formel folgt mit der Vollständigkeit von $\Sigma(\bar{x})$, dass $T \cup \Sigma(\bar{x}) \vdash \bigwedge_{i=1}^n \eta_i(x_i, c)$. Daraus folgt mit aus der zweiten Formel und Proposition 4.2, dass $T \cup \Sigma(\bar{x})$ lokal realisiert. Realisiert T umgekehrt $\Sigma(\bar{x})$ lokal in $\theta(\bar{x})$, so gilt

$$T \vdash \exists \bar{x} \theta(\bar{x}),$$

da T vollständig und $T \cup \theta(\bar{x})$ eine konsistente $\mathcal{L}(\bar{x})$ Theorie ist. Also gilt $K \models \exists \bar{x} \theta(\bar{x})$, und K realisiert $\Sigma(\bar{x})$, da für alle $\sigma \in \Sigma$, $T \vdash \phi \rightarrow \sigma$. $\square$

5 Enderweiterungen

Als Anwendung der schönen Eigenschaften der definierbaren Elemente eines PA Modells zeigen wir, dass jedes PA -Modell eine echte elementare Enderweiterung hat.

Definition 5.1. Sei T eine $\mathcal{L}_A$ -Theorie, $T \supseteq PA$, $M \models T$, $N \models T$. N ist eine *Enderweiterung* von M , falls für alle $b \in M$, $a \in N$

$$N \models a < b \Rightarrow a \in M$$

Definition 5.2. Es seien T , M , N wie oben. Eine Enderweiterung N von M heißt *konservative Erweiterung*, falls es für jedes $\bar{b} \in N$, und jede $\mathcal{L}_A$ -Formel $\theta(u, \bar{v})$ ein $\bar{a} \in M$ und eine Formel $\psi(u, \bar{w})$ gibt, sodass

$$\{u \in N \mid N \models \theta(u, \bar{b})\} \cap M = \{u \in M \mid M \models \psi(u, \bar{a})\},$$

, also wenn alle in N definierbaren Teilmengen eingeschränkt auf M bereits in M definierbar sind.

Proposition 5.1. *Jede konservative Erweiterung ist eine Enderweiterung.*

Beweis. Sei N eine konservative Erweiterung von M . Ist $a \in M$, $b \in N$ mit $b < a$, so ist $S := \{u \in N \mid N \models u \leq b\} \cap M$ definierbar in M , $S = \{u \in M \mid M \models \psi(u, \bar{a})\}$ mit $\psi \in \mathcal{L}_A$, und $\bar{a} \in M$. Das Prinzip der kleinsten Zahl gibt uns nach Anwendung auf $\neg\psi$ das Maximum e von S . Wäre $e < b$, so wäre $e \in M$, also auch in S . Daher ist $e = b \in S \subseteq M$. $\square$

Satz 5.1. ([3, Theorem 8.8] - Gaifman 1976) *Jedes Modell M von PA hat eine echte konservative Erweiterung K mit $M \preceq K$.*

Daraus folgt Unmittelbar

Korollar 5.1. ([3, Theorem 8.6] - MacDowell, Specker 1961) *Jedes Modell von PA hat eine echte elementare Enderweiterung.* $\square$

Eine derartige Enderweiterung hätte (da $M \preceq K$) die Eigenschaft, dass für $c \in K \setminus M$, jede Formel $\phi(x, \bar{y})$, und jedes $\bar{b} \in M$

$$K \models \phi(c, \bar{b}) \quad \Rightarrow \quad M \models \forall z \exists x (x > z \wedge \phi(x, \bar{b}))$$

also, dass $\phi(x, \bar{b})$ für beliebig große x in M gilt. Dies wollen wir notationell abkürzen:

Definition 5.3. Für eine Formel $\phi(x, \bar{b})$ schreiben wir $Qx\phi(x, \bar{b})$ für $\forall z \exists x (x > z \wedge \phi(x, \bar{b}))$.

Um Satz 5.1 zu beweisen benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 5.1. Sei $\phi(x)$ eine $\mathcal{L}_A(M)$ -Formel, sodass $M \models LA \cup \{Qx\phi(x)\}$, und sei $\theta(x, \bar{y})$ eine beliebige $\mathcal{L}_A(M)$ -Formel. Dann existiert eine dritte $\mathcal{L}_A(M)$ -Formel $\psi(x)$, sodass

- (i) $M \models Qx\psi(x)$
- (ii) $M \models \forall x(\psi(x) \rightarrow \phi(x))$
- (iii) für alle $\bar{a} \in M$,

$$\begin{array}{ll} \text{entweder:} & M \models \exists y \forall x (x > y \wedge \psi(x) \rightarrow \theta(x, \bar{a})) \\ \text{oder:} & M \models \exists y \forall x (x > y \wedge \psi(x) \rightarrow \neg\theta(x, \bar{a})) \end{array}$$

Beweis. Wir nehmen wieder an, dass das Tupel $\bar{y}$ nur aus einer Variable besteht, indem wir gegebenenfalls das Tupel codieren. Dann verwenden wir das Tupling von Gödels Lemma, Lemma 2.2, und definieren die $\mathcal{L}_A(M)$ -Formel $\chi(x, y, s)$ als

$$\begin{aligned} \phi(x) \wedge \forall u < y \Big(((s)_u = 0 \rightarrow \theta(x, u)) \wedge \\ ((s)_u \neq 0 \rightarrow \neg\theta(x, u)) \Big) \end{aligned}$$

und $\delta(x, y)$ als

$$\exists s \Big(\forall u < y (Qz(\chi(z, u, s) \wedge \theta(z, u)) \leftrightarrow (s)_u = 0) \wedge \chi(x, y, s) \Big)$$

Wir stellen ein paar Eigenschaften fest:

- Für feste z, u hängt $\chi(z, u, s)$ nur von $(s)_0 \dots (s)_u$ ab, daher
- können wir für $x, y \in M$ $s \in M$ induktiv so wählen, dass

$$M \models \forall u < y (Qz(\chi(z, u, s) \wedge (\theta(z, u))) \leftrightarrow (s)_u = 0)$$

- Diese Wahl von s ist auf den ersten y Stellen eindeutig, also gilt, falls s und s' die obige Formel erfüllen

$$M \models \forall u < y ((s)_u = 0 \leftrightarrow (s')_u = 0)$$

- Daher gilt mit diesen s, s'

$$M \models \forall u < y (\chi(x, u, s) \leftrightarrow \chi(x, u, s'))$$

Nun zeigen wir mit Induktion, dass für alle $y \in M$, $M \models Qx\delta(x, y)$:

Da $\delta(x, 0) \equiv \exists s \chi(x, 0, s) \equiv \phi(x)$, gilt nach Voraussetzung $M \models Qx\delta(x, 0)$.

Nehmen wir nun an, dass $M \models Qx\delta(x, y)$. Würde weder $M \models Qx(\delta(x, y) \wedge \theta(x, y))$ noch $M \models Qx(\delta(x, y) \wedge \neg\theta(x, y))$ gelten, so würde M beide Formeln

$$\begin{aligned} \exists w \forall x (\delta(x, y) \wedge \theta(x, y) \rightarrow x < w) \\ \exists w' \forall x (\delta(x, y) \wedge \neg\theta(x, y) \rightarrow x < w'), \end{aligned}$$

also auch $\neg Qx\delta(x, y)$ erfüllen, ein Widerspruch zur Induktionshypothese.

1. Fall Falls $M \models Qx(\delta(x, y) \wedge \theta(x, y))$, dann wähle $s' \in M$ mit

$$M \models \forall u < y ((s)_u = (s')_u) \wedge (s')_y = 0$$

2. Fall Falls $M \models Qx(\delta(x, y) \wedge \neg\theta(x, y))$, wähle s' mit

$$M \models \forall u < y ((s)_u = (s')_u) \wedge (s')_y = 1$$

Da für alle $u < y$ $(s)_u = (s')_u$, gilt $M \models \forall x(\chi(x, y, s) \leftrightarrow \chi(x, y, s'))$, und daher je nach Fall

$$M \models \forall x(\delta(x, y+1) \leftrightarrow \chi(x, y, s) \wedge \theta(x, y)) \text{ bzw.}$$

$$M \models \forall x(\delta(x, y+1) \leftrightarrow \chi(x, y, s) \wedge \neg\theta(x, y))$$

und daher, wie gewollt $M \models Qx\delta(x, y+1)$, denn mit unserer Wahl von s ist $M \models \forall x(\chi(x, y, s) \leftrightarrow \phi(x))$, und nach Voraussetzung gilt $M \models Qx\phi(x)$.

Nun definieren wir $\gamma(x, y)$ als "x ist das $(y+1)$ ste Element mit $\delta(x, y)$ ":

$$\begin{aligned} \exists w \Big(& \delta((w)_0, y) \wedge \forall v < (w)_0 \neg\delta(v, y) \wedge \\ & \forall u < y(\delta((w)_{u+1}, y) \wedge \forall v < (w)_{u+1}(\delta(v, y) \rightarrow v \leq (w)_u)) \wedge x = (w)_y \Big) \end{aligned}$$

. Da für alle y $M \models Qx\delta(x, y)$,

$$M \models \forall y \exists! x \gamma(x, y)$$

Sei nun $\psi(x)$ die Formel $\exists y \gamma(x, y)$.

Nun gilt es die geforderten Eigenschaften nachzuprüfen:

- (i) Da $M \models \forall x, y(\delta(x, y+1) \rightarrow \delta(x, y))$ folgt aus $M \models \gamma(x, y)$, dass es höchstens $y+1$ Elemente $w \leq x$ gibt mit $M \models \delta(w, y+1)$. Daher

$$M \models \forall x, y, z(\gamma(x, y) \wedge \gamma(z, y+1) \rightarrow z > x) \quad (3)$$

und insbesondere folgt $M \models Qx \exists y \gamma(x, y)$.

- (ii) Folgt direkt aus $M \models \forall x(\delta(x, 0) \leftrightarrow \phi(0))$ und $M \models \forall x, y(\delta(x, y+1) \rightarrow \delta(x, y))$
- (iii) Sei $a \in M$ beliebig, und $y \in M$ mit $M \models \gamma(y, a)$. Wir müssen nun zeigen, dass der Wahrheitswert von

$$x > y \wedge \psi(x) \rightarrow \theta(x, a)$$

konstant bleibt.

Ist $M \models x > y$ und $M \models \psi(x)$, dann gibt es nach 3 ein $w > a$ mit $M \models \gamma(x, w)$, daher $M \models \delta(x, y)$. Nach Definition von δ gilt dann $M \models \theta(x, a)$ genau dann, wenn $(s)_a = 0$ für den Zeugen s des Existenzquantors von δ . Dieser Wert ändert sich, wie wir oben festgestellt haben, nicht bei größer werdendem w , und der Wahrheitswert ist konstant in x .

□

Wir können nun den Satz beweisen

Beweis (Satz 5.1). Sei c ein neues Konstantensymbol. Wir zählen alle Formeln der Sprache $\mathcal{L}_c := \mathcal{L}_A(\{c\})$ auf als $\theta_0(c, \bar{y}_1), \theta_1(c, \bar{y}_2), \dots$. Weiters konstruieren wir induktiv $\mathcal{L}_A$ -Formeln $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots$, sodass für alle $i \in \mathbb{N}$: $M \models Qx\phi_i(x)$.

$\phi_0(x)$ sei $x = x$. Gegeben $\phi_i(x)$ mit $M \models Qx\phi_i(x)$ wenden wir Lemma 5.1 auf ϕ_i und θ_i an und erhalten ϕ_{i+1} mit

- $M \models Qx\phi_{i+1}(x)$

- $M \models \forall x(\phi_{i+1} \rightarrow \phi_i(x))$
- für alle $a \in M$ gilt entweder

$$M \models \exists y \forall x(x > y \wedge \phi_{i+1}(x) \rightarrow \theta_i(x, \bar{a}))$$

$$M \models \exists y \forall x(x > y \wedge \phi_{i+1}(x) \rightarrow \neg \theta_i(x, \bar{a}))$$

Wir erhalten nun ein Modell N mit $c \in N$, welches alle $\phi_i(x)$ erfüllt, indem wir die Theorie

$$T = \{\theta(\bar{a}) \mid M \models \theta(\bar{a}) \text{ und } \theta(\bar{a}) \text{ ist ein } \mathcal{L}_A(M)\text{-Satz}\} \cup \{c > a \mid a \in M\} \cup \{\phi_i(c) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

betrachten. T ist nach dem Kompaktheitssatz konsistent, hat daher ein Modell N . Da alle Elemente von M durch Konstantensymbole repräsentiert wurden, und die Theorie von M eine Teilmenge von T ist, können wir M kanonisch in N einbetten. Sei nun $c \in N$ die Interpretation des Konstantensymbols c .

Wir definieren $K := K(N; M \cup \{c\}) \preceq N$ (nach Satz 3.1). Es ist $M \cup \{c\} \subseteq K$ und, da für alle $\mathcal{L}_A$ -Formeln $\theta(\bar{x})$ und alle $\bar{a} \in M$:

$$N \models \theta(\bar{a}) \quad \text{gdw} \quad K \models \theta(\bar{a})$$

ist $M \prec K$.

Um zu sehen, dass K eine konservative Erweiterung von M ist betrachten wir $\bar{b} = b_1 \dots b_n \in K$, wobei für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, b_j definiert ist vermöge der Formel $\eta_j(v, \bar{a}, c)$ mit $\bar{a} = a_1 \dots a_k \in M$, und eine beliebige $\mathcal{L}_A$ -Formel $\theta(x, v_1, \dots, v_n)$. Wir behaupten, dass $K \models \theta(d, \bar{b})$ gdw

$$M \models \exists w \forall x \left(x > w \wedge \phi_{i+1}(x) \rightarrow \exists \bar{v} \left(\bigwedge_{j=1}^n \eta_j(v_j, \bar{a}, x) \wedge \theta(d, \bar{v}) \right) \right) \text{ für } d \in M$$

Ist die Formel in M wahr, so gibt es ein w in M , sodass, da K eine elementare Erweiterung ist,

$$K \models \forall x \left(x > w \wedge \phi_{i+1}(x) \rightarrow \exists \bar{v} \left(\bigwedge_{j=1}^n \eta_j(v_j, \bar{a}, x) \wedge \theta(d, \bar{v}) \right) \right)$$

Setzen wir $x = c$, so reduziert sich die Aussage auf $K \models \theta(d, \bar{b})$.

Es gelte umgekehrt $K \models \theta(d, \bar{b})$. Es gibt ein i , sodass die Formel

$$\exists \bar{v} \left(\bigwedge_{j=1}^n \eta_j(v_j, \bar{y}, x) \wedge \theta(y_0, \bar{v}) \right)$$

gleich $\theta_i(x, y_0, \bar{y})$ ist. Gilt $\theta(d, \bar{b})$, so gilt $K \models \theta_i(c, d, \bar{a})$. Nach Konstruktion von ϕ_{i+1} ist entweder

$$M \models \exists w \forall x(x > w \wedge \phi_{i+1}(x) \rightarrow \theta_i(x, d, \bar{a})), \text{ oder}$$

$$M \models \exists w \forall x(x > w \wedge \phi_{i+1}(x) \rightarrow \neg \theta_i(x, d, \bar{a}))$$

aber der zweite Fall kann nicht eintreten, da für alle $w \in M$, $M \prec K \models c > w \wedge \phi_{i+1}(c) \wedge \theta_i(c, d, \bar{a})$. $\square$

Literatur

- [1] H. Jerome Keisler C. C. Chang. *Model Theory*. Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, The Netherlands, third edition, 1990.
- [2] Stefan Hetzl. Gödel's incompleteness theorems, 2020.
- [3] Richard Kaye. *Models of Peano Arithmetic*. Clarendon Press, Oxford, 1991.