Ordungstypen von Nichtstandardmodellen der Peano-Arithmetik

Leo Brauner

28. Oktober 2020

Diese Arbeit ist im Rahmen des Seminars aus Logik 2020W an der Technischen Universität Wien entstanden und basiert großteils auf dem sechsten Kapitel aus Richard Kayes Buch *Models of Peano Arithmetic*.

Hauptresultat dieser Arbeit ist der Satz, dass jedes abzählbare Nichtstandardmodell M der Peano-Arithmetik den Ordungstyp $\mathbb{N} + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}$ hat; salopp gesagt: die Ordnung von M besteht aus einer Kopie von $\mathbb{N}$, gefolgt von $\mathbb{Q}$ Kopien von $\mathbb{Z}$. Wir zeigen dies sogar etwas allgemeiner für abzählbare Nichtstandardmodelle der Theorie $I\Delta_0$.

Als Zwischenresultat erhalten wir, dass jedes Modell von PA^-, einer schwächeren Theorie als die Peano-Arithmetik, welche keine Induktionsaxiome enthält, den Ordnungstyp $\mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$ hat, wobei L eine lineare Ordnung ist.

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

Wir setzen bei Leserin und Leser Wissen über mathematische Grundbegriffe und Grundlagen der Logik, inklusive dem Gödelschen Vollständigkeitssatz voraus.

Die Notation in dieser Arbeit orientiert sich an [K]. Ebenso werden wir geläufige Abkürzungen (wie etwa $x \leq y$ für $x < y \vee x = y$) verwenden oder uns milden "abuse of notation" erlauben (wie z.B. $M \models \varphi(a)$ mit $a \in M$ anstatt $(M, I, b) \models \varphi(x)$ mit entsprechender Interpretation I und Variablenbelegung b). Auch zwischen einer Struktur und ihrer Trägermenge wollen wir nicht immer strikt unterscheiden.

Wir nennen $\mathscr{L}_A := \{+, 0, \cdot, 1, <\}$ die *Sprache der Arithmetik*, mit Konstantensymbolen 0,1, binären Funktionssymbolen $+,\cdot$ und einem binären Relationssymbol $<$. Wir fokussieren uns in dieser Arbeit auf Theorien und Modelle der Sprachen $\mathscr{L}_A$ und $\{<\}$.

In [K, §2.1] wird eine $\mathscr{L}_A$-Theorie PA^- durch 15 Axiome definiert, welche wir hier nicht explizit aufzählen. Im Wesentlichen beschreibt die Theorie PA^- folgendes:

- $+$ und $\cdot$ sind assoziativ, kommutativ und distributiv; 0 und 1 sind zugehörige neutrale Elemente; $\forall x(x \cdot 0 = 0)$.
- $<$ definiert eine strikte lineare Ordnung.
- $+$ und $\cdot$ sind verträglich mit der Ordnung $<$.
- $\forall x \forall y(x < y \to \exists z : x + z = y)$.
- 0 ist bzgl. $<$ minimal; $0 < 1$; $\forall x(x > 0 \to x \geq 1)$.

Offensichtlich ist $\mathbb{N}$ ein Modell für PA^-. Für eine handliche Klassifizierung aller PA^--Modelle erweist sich folgende Begriffsbildung als nützlich:

Ein *diskret geordneter Ring* ist eine Struktur $(R, +, 0, -, \cdot, 1, <)$, für die gilt:

- $(R, +, 0, -, \cdot, 1)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.
- $(R, <)$ ist eine strikte lineare Ordnung.
- $+$ und $\cdot$ sind verträglich mit der Ordnung $<$.
- $0 < 1$ und für jedes $r \in R$ gilt: $r > 0 \Rightarrow r \geq 1$.

Für einen diskret geordneten Ring R setzen wir $R^+ := \{r \in R \mid r \geq 0\}$.

Lemma 1.1. *Eine $\mathscr{L}_A$-Struktur M ist genau dann ein Modell von PA^-, wenn es einen diskret geordneten Ring R gibt, sodass $M = R^+ \restriction \mathscr{L}_A$.*

Offenbar ist $\mathbb{Z}$ ein diskret geordneter Ring und $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. Ein weiteres Beispiel für einen diskret geordneten Ring ist der Polynomring $\mathbb{Z}[X]$, wobei die Ordnung $<$ wie folgt definiert ist:

$$\text{Für } p = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X], a_n \neq 0 : \qquad p > 0 :\Longleftrightarrow a_n > 0.$$

$$\text{Für } p, q \in \mathbb{Z}[X] : \qquad p < q :\Longleftrightarrow q - p > 0.$$

Nach obigem Lemma ist dann $\mathbb{Z}[X]^+$ ein Modell von PA^-.

Für eine $\mathscr{L}_A$-Formel $\varphi(x, \bar{y})$ definieren wir das *Induktionsaxiom auf x in $\varphi(x, \bar{y})$* als den Satz $I_x\varphi$ definiert durch

$$\forall \bar{y}(\varphi(0, \bar{y}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \to \varphi(x + 1, \bar{y})) \to \forall x \varphi(x, \bar{y})).$$

Ist Γ eine Menge von $\mathscr{L}_A$-Formeln, so definieren wir

$$I\Gamma := PA^- + \{I_x\varphi \mid \varphi(x, \bar{y}) \in \Gamma\}.$$

Ist Γ die Menge aller $\mathscr{L}_A$-Formeln, so ist $PA := I\Gamma$ die *Peano-Arithmetik*. Es ist unschwer einzusehen, dass diese Definition von $I\Delta_n$, $I\Sigma_n$, $I\Pi_n$, $n \in \mathbb{N}$, äquivalent dazu ist, wie wenn man oben PA^- etwa durch Robinsons Minimalarithmetik Q ersetzt.

2 Ordnungstypen von PA^--Modellen

Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung über die Ordnung von PA^--Modellen.

Definition 2.1. Eine lineare Ordnung $(L, <)$ heißt *diskret*, falls gilt:

- Für jedes $a \in L$, das kein Maximum ist, gibt es ein kleinstes $b \in L$ mit $a < b$.
- Für jedes $a \in L$, das kein Minimum ist, gibt es ein größtes $b \in L$ mit $b < a$.

Lemma 2.2. *Für jedes PA^--Modell M ist $M \restriction <$ eine diskrete lineare Ordnung mit Minimum und ohne Maximum.*

Beweis. Sei M ein PA^--Modell. Nach Lemma 1.1 gibt es dann einen diskret geordneten Ring R mit $M = R^+ \restriction \mathscr{L}_A$. Insbesondere ist dann $(M \restriction <) = (R^+ \restriction <)$. Offenbar ist $R^+ \restriction <$ eine lineare Ordnung mit Minimum 0 und ohne Maximum (denn für jedes $a \in R^+$ ist $a + 1 \in R^+$ und $a + 1 > a$).

Um zu sehen, dass $R^+ \restriction <$ diskret ist, sei $a \in R^+$ kein Minimum von R^+, also $a > 0$. Dann ist $a \geq 1$ und somit auch $b := a - 1 \in R^+$. Zudem ist $b < a$ und für jedes $c \in R^+$ gilt:

$$c < a \quad \Longrightarrow \quad a - c > 0 \quad \Longrightarrow \quad a - c \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad c \leq a - 1 = b,$$

d.h. b ist mit der Eigenschaft $b < a$ auch maximal in R^+.

Analog zeigt man, dass es für jedes $a \in L$ ein kleinstes $b \in R^+$ mit $a < b$ gibt. ■

Motiviert durch obiges Lemma möchten wir nun alle diskreten linearen Ordnungen mit Minimum und ohne Maximum klassifizieren. Dazu benötigen wir drei weitere einfache Definitionen.

Definition 2.3. Eine Abbildung $f : L_1 \to L_2$ zwischen zwei linearen Ordnungen $(L_1, <_1)$, $(L_2, <_2)$ heißt *Ordnungsisomorphismus*, falls f bijektiv ist und für alle $a, b \in L_1$ gilt:

$$a <_1 b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) <_2 f(b).$$

Wir sagen, zwei lineare Ordnungen L_1 und L_2 sind *(ordnungs)isomorph* oder *vom selben Ordnungstyp*, wenn es einen Ordungsisomorphismus $f : L_1 \to L_2$ gibt, und schreiben dafür $L_1 \cong L_2$.

Definition 2.4. Seien $(L_1, <_1)$, $(L_2, <_2)$ zwei lineare Ordnungen und seien zusätzlich L_1, L_2 disjunkt. Dann ist die *Summe* $(L_1, <_1) + (L_2, <_2)$ definiert als die lineare Ordnung $(L, <)$ mit $L := L_1 \cup L_2$ und

$$a < b \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (a \in L_1 \text{ und } b \in L_2) & \text{oder} \\ (a, b \in L_1 \text{ und } a <_1 b) & \text{oder} \\ (a, b \in L_2 \text{ und } a <_2 b). \end{cases}$$

Definition 2.5. Seien $(L_1, <_1)$, $(L_2, <_2)$ zwei lineare Ordnungen. Dann ist das *Produkt* $(L_1, <_1) \cdot (L_2, <_2)$ definiert als die lineare Ordnung $(L, <)$ mit $L := L_1 \times L_2$ und

$$(a_1, a_2) < (b_1, b_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 <_1 b_1 & \text{oder} \\ (a_1 = b_1 \text{ und } a_2 <_2 b_2). \end{cases}$$

Intuitiv entsteht $L_1 + L_2$ dadurch, indem man L_2 an L_1 "hinten dranhängt" und $L_1 \cdot L_2$, indem man "L_1 viele" Kopien von L_2 aneinanderhängt. Insbesondere ist zum Beispiel $L + L \cong 2 \cdot L$, wobei 2 eine zweielementige lineare Ordnung bezeichnet.

Satz 2.6. *M ist genau dann eine diskrete lineare Ordnung mit Minimum und ohne Maximum, wenn es eine lineare Ordnung L gibt, sodass $M \cong \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$.*

Für je zwei lineare Ordnungen L, L' gilt:

$$L \cong L' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z} \cong \mathbb{N} + L' \cdot \mathbb{Z}$$

Beweis. $\mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$ ist offenbar eine diskrete lineare Ordnung mit Minimum und ohne Maximum. Diese Eigenschaft bleibt unter Ordnungsisomorphismen erhalten.

Sei nun M eine diskrete lineare Ordnung mit Minimum 0^M und ohne Maximum. Dann kann man auf natürliche Weise eine Nachfolger- und Vorgängerfunktion auf M definieren:

$$S(a) := \text{das kleinste } b \in M \text{ mit } a < b, \qquad a \in M.$$
$$P(a) := \begin{cases} \text{das größte } b \in M \text{ mit } b < a, & a \in M, a \neq 0^M, \\ 0^M, & a = 0^M. \end{cases}$$

Definiere nun für $a, b \in M$:

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ sodass } b = P^n(a) \text{ oder } b = S^n(a).$$

Für $a \in M$, $k \leq n \in \mathbb{N}$ ist offenbar $P^k(S^n(a)) = S^{n-k}(a)$ und $S^k(P^n(a)) = P^{n-k}(a)$, falls $a > S^{n-k}(0^M)$. Mit diesen Identitäten lässt sich zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

Betrachten wir nun $M/\!\sim$. Offenbar ist $[0^M] = \{0^M, S(0^M), S^2(0^M), \ldots\} \cong \mathbb{N}$ (ordnungsisomorph) und $[a] = \{\ldots, P^2(a), P(a), a, S(a), S^2(a), \ldots\} \cong \mathbb{Z}$ für $a \in M, a \not\sim 0^M$. Man beachte außerdem, dass es aufgrund der Definition von S und P keine $a, b \in M$ gibt mit $S^n(a) < b < S^{n+1}(a)$ oder $P^{n+1}(a) < b < P^n(a)$. Daher folgt aus $a', a'' \in [a]$ und $a' < b < a''$ stets $b \in [a]$.

Wir zeigen nun, dass $\sim$ mit $<$ verträglich ist. Seien dazu $a, a', b, b' \in M$, $a \sim a'$, $b \sim b'$, $a \not\sim b$, $a < b$. Wir müssen nun $a' < b'$ zeigen. Angenommen, es wäre $b \leq a'$. Dann wäre $b \in (a, a'] \subseteq [a]$, im Widerspruch zu $a \not\sim b$. Daher ist $a' < b$. Wäre nun $b' \leq a'$, dann wäre $a' \in [b', b) \subseteq [b]$, im Widerspruch zu $a' \sim a \not\sim b$. Folglich ist $a' < b'$.

Daraus folgt, dass $<$ auf der Quotientenmenge $M/\!\sim$ eine lineare Ordnung $<_\sim$ erzeugt, die gegeben ist durch $[a] <_\sim [b] \Leftrightarrow (a \not\sim b \text{ und } a < b)$.

Definiere nun die lineare Ordnung $L := (M \backslash [0^M])/\!\sim$. Dann folgt aus unserer vorigen Überlegung und der Minimalität von 0^M unmittelbar, dass $M \cong \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$.

Es bleibt die Isomorphieaussage zu zeigen. Für zwei lineare Ordnungen L, L' mit $L \cong L'$ ist offenbar auch $\mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z} \cong \mathbb{N} + L' \cdot \mathbb{Z}$. Umgekehrt können wir auf zwei diskrete lineare Ordnungen M, M' mit Minimum 0^M bzw. $0^{M'}$ und ohne Maximum obige Konstruktion anwenden und erkennen so, dass $L := ((M \backslash [0^M])/\!\sim) \cong ((M' \backslash [0_{M'}])/\!\sim') =: L'$. ∎

Aus Lemma 2.2 und Satz 2.6 erhalten wir daher unmittelbar:

Korollar 2.7. *Für jedes [abzählbare] Modell M von PA^- gibt es eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte [abzählbare] lineare Ordnung L mit $(M \restriction <) \cong \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$.*

Beispiel 2.8. Das Standardmodell $\mathbb{N}$ ist ordnungsisomorph zu $\mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$ mit $L = \emptyset$.

Beispiel 2.9. Wie in Abschnitt 1 erwähnt, ist $\mathbb{Z}[X]^+$ ein Modell für PA^-. Für $n \in \mathbb{N}$, definiere $\mathbb{Z}[X]^{(n)} := \{p \in \mathbb{Z}[X]^+ \mid \deg p = n\}$. Dann ist $\mathbb{Z}[X]^+$ ordnungsisomorph zu

$$\mathbb{Z}[X]^{(0)} + \mathbb{Z}[X]^{(1)} + \mathbb{Z}[X]^{(2)} + \cdots .$$

Offenbar ist $\mathbb{Z}[X]^{(0)} \cong \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}[X]^{(n+1)} = \{X \cdot p + k \mid p \in \mathbb{Z}[X]^{(n)}, k \in \mathbb{Z}\}$. Es ist daher unschwer einzusehen, dass $\mathbb{Z}[X]^{(n+1)}$ ordnungsisomorph zu $\mathbb{Z}[X]^{(n)} \cdot \mathbb{Z}$ ist. Induktiv folgt:

$$\begin{aligned}(\mathbb{Z}[X]^+ \restriction <) &\cong \mathbb{N} + \mathbb{N} \cdot \mathbb{Z} + \mathbb{N} \cdot \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} + \mathbb{N} \cdot \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} + \cdots \\ &\cong \mathbb{N} + (\mathbb{N} + \mathbb{N} \cdot \mathbb{Z} + \mathbb{N} \cdot \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} + \cdots) \cdot \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathbb{Z}[X]^+$ ordnungsisomorph zu $\mathbb{N} + \mathbb{Z}[X]^+ \cdot \mathbb{Z}$.

3 Das Overspill-Lemma

Um aus unserer ordungstheoretischen Aussage über PA^--Modelle eine stärkere Aussage über $I\Delta_0$-Modelle zu gewinnen, müssen wir die in einem $I\Delta_0$-Modell erfüllten Induktionsaxiome geschickt ausnutzen. Die dafür notwendige Technik tritt in Form des Overspill-Lemmas in Erscheinung, welches wir in diesem Abschnitt formulieren. Dazu brauchen wir folgende wichtige Definition:

Definition 3.1. Ein *Schnitt* ist eine nichtleere Teilmenge I eines PA^--Modells M, die nach unten abgeschlossen ist (d.h. $a < b \in I \Rightarrow a \in I$) und unter der Nachfolgerfunktion abgeschlossen ist.

Ist M ein PA^--Modell, so ist offenbar $\mathbb{N}$ (die Menge der Standardzahlen von M) ein Schnitt von M und jeder Schnitt von M enthält $\mathbb{N}$.

Beispiel 3.2 (Fortsetzung von Beispiel 2.9)**.** Für $p := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]^+$, $n > 0$, und $0 < k \leq n$, definiere

$$I_{p,k} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} b_i X^i \in \mathbb{Z}[X]^+ \;\middle|\; \sum_{i=k}^{n} b_i X^i < \sum_{i=k}^{n} a_i X^i \right\}.$$

Dann ist $I_{p,k}$ offenbar ein Schnitt von $\mathbb{Z}[X]^+$. Es ist umgekehrt nicht schwer zu zeigen, dass alle Schnitte von $\mathbb{Z}[X]^+$ diese Form haben.

Bemerkung 3.3. Mit Hilfe von Korollar 2.7 können wir leicht eine bessere Vorstellung von Schnitten erlangen. Seien M ein PA^--Modell und L jene lineare Ordnung, sodass $(M \restriction <) \cong \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$. Für $a \in M$ schreiben wir $[a]$ für die im Beweis von Satz 2.6 definierte Äquivalenzklasse von a.

Ist I ein Schnitt von M, dann ist die Menge $J(I) := \{[a] \mid a \in I\}\backslash\{[0]\} \subseteq L$ wohldefiniert und nach unten abgeschlossen. Ist J eine (möglicherweise leere) nach unten abgeschlossene Teilmenge von L, dann ist $I(J) := [0] \uplus \{a \in M \mid [a] \in J\}$ ein Schnitt von M. Wegen $I(J(I)) = I$ und $J(I(J)) = J$ ist dadurch eine natürliche Bijektion zwischen den Schnitten von M und nach unten abgeschlossenen Teilmengen von L gegeben.

Sei im Folgenden Γ eine Menge von $\mathscr{L}_A$-Formeln, welche in $I\Gamma$ unter beschränkten Quantoren abgeschlossen ist. Beispiele für solche Mengen Γ sind etwa Σ_n, $n \in \mathbb{N}$, oder die Menge aller $\mathscr{L}_A$-Formeln (vgl. [K, §7.1]).

Lemma 3.4. *Sei M ein $I\Gamma$-Modell, $\varphi(x, \bar{y}) \in \Gamma$, $\bar{b} \in M$ und I ein Schnitt von M mit*

$$I = \{a \in M \mid M \models \varphi(a, \bar{b})\}.$$

Dann ist $I = M$.

Beweis. Da I ein Schnitt von M ist, gilt:

$$M \models \varphi(0, \bar{b}) \quad \text{und} \quad M \models \forall x(\varphi(x, \bar{b}) \to \varphi(x+1, \bar{b})).$$

Da M ein $I\Gamma$-Modell ist, gilt auch

$$M \models \varphi(0, \bar{b}) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{b}) \to \varphi(x+1, \bar{b})) \to \forall x \varphi(x, \bar{b}).$$

Daher ist $M \models \varphi(a, \bar{b})$ für alle $a \in M$, d.h. $I = M$. ■

Dieses Lemma kann als eine Art "modelltheoretisches Induktionsprinzip" betrachtet werden, oder alternativ als die Aussage, dass echte Schnitte von $I\Gamma$-Modellen nicht Γ-definierbar sind. Als Konsequenz erhalten wir nun das angekündigte Overspill-Lemma.

Dieses besagt, dass in einem $I\Gamma$-Modell eine auf einem echten Schnitt erfüllte Γ-Formel auch auf einem echt größeren Anfangssegment erfüllt ist. Es gilt sozusagen, dass der Bereich, auf dem die Γ-Formel erfüllt ist, aus jedem echten Schnitt "überläuft". Insbesondere ist etwa in einem $I\Delta_0$-Modell jede Δ_0-definierbare Eigenschaft, die auf allen Standardzahlen erfüllt ist, auch auf einer Nichtstandardzahl erfüllt.

Lemma 3.5 (Overspill)**.** *Sei M ein $I\Gamma$-Modell, $\varphi(x, \bar{y}) \in \Gamma$, $\bar{b} \in M$ und I ein echter Schnitt von M, sodass*

$$M \models \varphi(a, \bar{b}) \quad \textit{für alle } a \in I.$$

Dann gibt es ein $c > I$, sodass

$$M \models \varphi(a, \bar{b}) \quad \textit{für alle } a \leq c.$$

Beweis. Wegen unserer Voraussetzung an Γ gibt es eine Formel $\psi(z, \bar{y}) \in \Gamma$ mit $M \models \forall \bar{y}(\forall x \leq z \varphi(x, \bar{y}) \leftrightarrow \psi(z, \bar{y}))$. Da I nach unten abgeschlossen ist, gilt:

$$M \models \psi(a, \bar{b}) \quad \text{für alle } a \in I.$$

Wegen $I \neq M$ gibt es nach dem vorigen Lemma dann ein $c > I$ mit $M \models \psi(c, \bar{b})$, womit $M \models \forall x \leq c \varphi(x, \bar{b})$. Daraus folgt die Behauptung. ■

4 Ordnungstypen von $I\Delta_0$-Modellen

Wir sind nun in der Lage, eine stärkere Version von Korollar 2.7 für $I\Delta_0$-Modelle zu beweisen.

Definition 4.1. Eine lineare Ordnung $(L, <)$ heißt *dicht*, wenn es für alle $a, c \in L$, $a < c$, ein $b \in L$ mit $a < b < c$ gibt.

Beispiele für dichte lineare Ordnungen sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Satz 4.2. *Für jedes [abzählbare] Nichtstandardmodell M von $I\Delta_0$ gibt es eine [abzählbare] dichte lineare Ordnung L ohne Endpunkte mit $(M \restriction <) \cong \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$.*

Beweis. Ist M ein Nichtstandardmodell von $I\Delta_0$, dann gibt es nach Korollar 2.7 eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte lineare Ordnung L mit $(M \restriction <) \cong \mathbb{N} + L \cdot \mathbb{Z}$. Es bleibt also zu zeigen, dass die lineare Ordnung L dicht ist und keine Endpunkte besitzt.

Wir verwenden dazu wieder die Konstruktion von L aus dem Beweis von Satz 2.6, d.h. für $a, b \in M$ definieren wir

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ sodass } M \models b = a + n \vee a = b + n$$

Wir haben gezeigt, dass $\sim$ mit $<$ verträglich ist und daher auf $L := (M \backslash [0])/\sim$ eine lineare Ordnung induziert, welche gegeben ist durch $[a] < [b] \Leftrightarrow (a \not\sim b$ und $M \models a < b)$.

Als erstes zeigen wir, dass L keine Endpunkte besitzt. Sei dazu $[a] \in L$. Dann ist $a \in M$ eine Nichtstandardzahl, d.h. $M \models n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich gilt auch $M \models a + n < a + a = 2 \cdot a$ und damit $[a] <_\sim [2 \cdot a]$. Dies zeigt, dass L kein Maximum besitzt.

Um einzusehen, dass L auch kein Minimum besitzt, definiere $\varphi(x)$ als die Δ_0-Formel

$$\exists y \leq x(2 \cdot y = x \vee 2 \cdot y + 1 = x).$$

Man sieht schnell ein, dass PA^- die Formeln $\varphi(0)$ und $\forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1))$ beweist. Weil $I\Delta_0$ auch $I_x\varphi$ beweist, folgt $I\Delta_0 \vdash \forall x\varphi(x)$. Für die Nichtstandardzahl $a \in M$ gibt es daher ein $b \in M$ mit

$$M \models b \leq a \wedge (2 \cdot b = a \vee 2 \cdot b + 1 = a).$$

Offenbar ist auch b eine Nichtstandardzahl und es folgt analog wie oben $[b] <_\sim [a]$.

Es bleibt zu zeigen, dass die lineare Ordnung L dicht ist. Seien dazu $[a], [c] \in L$ mit $[a] <_\sim [c]$. Dann gilt:

$$M \models \exists y \leq c(a + n < y \leq y + n < c) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Um dies einzusehen, wähle man etwa $y = a + n + 1$. Definiere $\varphi(x, u, v)$ als die Δ_0-Formel

$$\exists y \leq v(u + x < y \leq y + x < v).$$

Dann gilt also $M \models \varphi(n, a, c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Overspill Lemma gibt es daher ein $d > \mathbb{N}$, sodass $M \models \varphi(d, a, c)$. Folglich gibt es also ein $b \in M$, sodass $M \models b \leq c$ und $M \models a + d < b \leq b + d < c$. Wegen $d > \mathbb{N}$ erhalten wir schließlich:

$$M \models a + n < b \leq b + n < c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Daher ist $[a] <_\sim [b] <_\sim [c]$ und wir sind fertig. ■

Es stellt sich nun die Frage, ob wir dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte auf einfache Weise klassifizieren können. Im überabzählbaren Fall ist dies nichttrivial. So gibt es etwa $2^{\aleph_0}$ viele nichtisomorphe dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte der Kardinalität $2^{\aleph_0}$ (vgl. [R, §9.2]).

Im abzählbaren Fall hingegegen gibt es bis auf Isomorphie nur eine einzige dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte. Dieses Resultat mag zwar vielleicht intuitiv sein, ist aber nichttrivial, da es etwa die Existenz eines Ordnungsisomorphismus zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$ impliziert. Der Beweis beruht auf der induktiven Konstruktion eines Ordnungsisomorphismus nach einem sogenannten "Back-and-forth"-Argument.

Satz 4.3 ([R, Theorem 2.8])**.** *Jede abzählbare dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist isomorph zu* $\mathbb{Q}$*.*

Beweis. Sei L eine abzählbare dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte. Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Abzählung von L und $q_1, q_2, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Wir behaupten nun, dass es aufsteigende Mengenfolgen $(A_n)_n$ in L und $(B_n)_n$ in $\mathbb{Q}$ sowie eine Folge von einander fortsetzenden Abbildungen $(f_n : A_n \to B_n)_n$ gibt, sodass:

- A_n ist endlich und $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A_n$.

- B_n ist endlich und $\{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq B_n$.
- $f_n : A_n \to B_n$ ist ein Ordnungsisomorphismus.

Wir zeigen die Behauptung mittels induktiver Konstruktion der A_n, B_n und f_n.

Für den Induktionsanfang, sei $A_0 := B_0 := \emptyset$ und $f_0 : A_0 \to B_0$ die leere Funktion.

Für den Induktionsschritt nehmen wir die Existenz von A_n, B_n, f_n mit den gewünschten Eigenschaften an. Sei nun $a = a_k \in L \backslash A_n$ mit Index $k > n$ minimal. Dann gibt es drei Fälle:

(1) $a < A_n$

(2) $A_n < a$

(3) Es gibt ein größtes $a_i \in A_n$ und kleinstes $a_j \in A_n$ mit $a_i < a < a_j$.

Je nach eingetretenem Fall können wir nun ein $q \in \mathbb{Q} \backslash B_n$ wählen, sodass

$$(1)\ q < B_n, \qquad (2)\ B_n < q, \quad \text{oder} \quad (3)\ f_n(a_i) < q < f_n(a_j).$$

Definiere nun

$$A_{n+\frac{1}{2}} := A_n \cup \{a\}, B_{n+\frac{1}{2}} := B_n \cup \{q\} \quad \text{und} \quad f_{n+\frac{1}{2}} := f_n \cup \{(a, q)\}.$$

Dann ist $f_{n+\frac{1}{2}} : A_{n+\frac{1}{2}} \to B_{n+\frac{1}{2}}$ bijektiv. Sei nun $q' = q_\ell \in \mathbb{Q} \backslash B_{n+\frac{1}{2}}$ mit Index $\ell > n$ minimal. Dann gibt es wieder drei Fälle:

(1′) $q' < B_{n+\frac{1}{2}}$

(2′) $B_{n+\frac{1}{2}} < q'$

(3′) Es gibt ein größtes $q_i \in B_{n+\frac{1}{2}}$ und kleinstes $q_j \in B_{n+\frac{1}{2}}$ mit $q_i < q' < q_j$.

Da L eine dichte lineare Ordnung ohne Minimum und Maximum ist, können wir je nach Fall ein $a' \in L \backslash A_{n+\frac{1}{2}}$ wählen, sodass

$$(1')\ a' < A_{n+\frac{1}{2}}, \quad (2')\ A_{n+\frac{1}{2}} < a', \quad \text{oder} \quad (3')\ f^{-1}_{n+\frac{1}{2}}(q_i) < a' < f^{-1}_{n+\frac{1}{2}}(q_j)$$

Definiere nun

$$A_{n+1} := A_n \cup \{a, a'\}, \quad B_{n+1} := B_n \cup \{q, q'\} \quad \text{und} \quad f_{n+1} := f_n \cup \{(a, q), (a', q')\}.$$

Dann ist offenbar $A_n \subseteq A_{n+1}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$, $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ mit $f_{n+1} \supseteq f_n$, und A_{n+1}, B_{n+1} sind wieder endlich. Wegen unserer speziellen Wahl von a und q'

ist $a_{n+1} \in A_{n+1}$ und $q_{n+1} \in B_{n+1}$ und wegen unserer speziellen Wahl von q und a' ist $f_{n+1} : A_{n+1} \to B_{n+1}$ ein Ordnungsisomorphismus.

Dies beweist unsere Induktionsbehauptung. Definiere nun die Abbildung $f := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ als die minimale gemeinsame Fortsetzung der f_n. Dann ist $\operatorname{dom} f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = L$ und $\operatorname{rng} f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \mathbb{Q}$, d.h. f bildet L auf $\mathbb{Q}$ ab. Um einzusehen, dass $f : L \to \mathbb{Q}$ ein Ordnungsisomorphismus ist, seien $a, a' \in L$ und $n \in \mathbb{N}$ sodass $a, a' \in A_n$. Dann gilt:

$$a < a' \quad \iff \quad f_n(a) < f_n(a') \quad \iff \quad f(a) < f(a').$$

Dies zeigt insbesondere die Injektivität von f und wir sind fertig. ■

Bemerkung 4.4. Dieser Satz zeigt insbesondere, dass die Theorie T_{DLO} der diskreten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (in der Sprache $\{<\}$) vollständig ist. Um dies zu zeigen, sei σ ein Satz in der Sprache $\{<\}$, sodass $T_{\mathrm{DLO}} \nvdash \sigma$. Dann ist $T_{\mathrm{DLO}} + \{\neg\sigma\}$ konsistent und hat daher ein abzählbares Modell. Dieses ist nach Satz 4.3 aber isomorph und zu $\mathbb{Q}$, womit $\mathbb{Q} \models \neg\sigma$. Dieses Argument zeigt $\mathbb{Q} \models \sigma \Rightarrow T \vdash \sigma$. Da für jeden $\{<\}$-Satz σ entweder $\mathbb{Q} \models \sigma$ oder $\mathbb{Q} \models \neg\sigma$ gilt, sind wir fertig.

Aus Satz 4.2 und Satz 4.3 erhalten wir nun unmittelbar:

Korollar 4.5. *Jedes abzählbare Nichtstandardmodell von $I\Delta_0$ ist vom Ordnungstyp $\mathbb{N} + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}$.*

Insbesondere ist auch jedes abzählbare Nichtstandardmodell der Peano-Arithmetik vom Ordnungstyp $\mathbb{N} + \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}$.

Korollar 4.6. *Ein abzählbares Nichtstandardmodell von $I\Delta_0$ hat $2^{\aleph_0}$ viele verschiedene Schnitte.*

Beweis. Nach obigem Korollar ist ein solches Modell M ordnungsisomorph zu $\mathbb{N}+\mathbb{Q}\cdot\mathbb{Z}$. Wie wir in Bemerkung 3.3 festgestellt haben, gibt es dann eine natürliche Bijektion zwischen den Schnitten von M und den nach unten abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{Q}$. Die Abbildung

$$r \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$$

ist eine natürliche Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und den nichttrivialen nach unten abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ (sogenannte *Dedekind-Schnitte*). Das Modell M hat daher $|\mathbb{R}|$ viele verschiedene Schnitte. ■

Vergleiche dies etwa mit dem PA^--Modell $\mathbb{Z}[X]^+$, welches nur abzählbar viele Schnitte hat, wie wir in Beispiel 3.2 gesehen haben.

Indem man die Argumentation etwas modifiziert, erhält man:

Satz 4.7. *Ein abzählbares Nichtstandardmodell von $I\Sigma_1$ hat $2^{\aleph_0}$ viele Schnitte, welche unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen sind.*

Beweisskizze. Wir stützen uns darauf, dass die Exponentialfunktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} : f(x,y) := x^y$ beweisbar rekursiv in $I\Sigma_1$ und auch die bekannten Potenzrechenregeln und Monotonieeigenschaften der Exponentialfunktion in $I\Sigma_1$ beweisbar sind (vgl. [H, §3.7]; [K, §5.3])

Definiere dann für $a, b \in M$:

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N}, \text{ sodass } M \models a < (b+2)^n \wedge b < (a+2)^n.$$

Man kann nun analog wie im Beweis von Satz 2.6 zeigen, dass dies eine mit $<$ verträgliche Äquivalenzrelation definiert. Diese induziert auf $L := (M \backslash [0])/\sim$ eine lineare Ordnung $<_\sim$, die gegeben ist durch $[a] <_\sim [b] \Leftrightarrow a \not\sim b$ und $M \models a < b$.

Man kann nun zeigen, dass $(L, <_\sim)$ eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist. Um die Dichtheit zu zeigen, seien $[a], [c] \in L$, $[a] <_\sim [c]$. Dann gilt:

$$M \models \exists y((a+2)^n < y < (y+2)^n < c) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Das Overspill-Lemma (angewandt auf $\Gamma = \Sigma_1$) zeigt dann die Existenz von $b, d > \mathbb{N}$, sodass

$$M \models (a+2)^d < b < (b+2)^d < c.$$

Daraus folgt $[a] <_\sim [b] <_\sim [c]$. Ähnlich zeigt man, dass $(L, <_\sim)$ keine Endpunkte hat. Aus Satz 4.3 folgt dann, dass es einen Ordnungsisomorphismus $f : L \to \mathbb{Q}$ gibt. Definiere für $r \in \mathbb{R}$ die Menge

$$I_r := [0] \cup \{a \in M \backslash [0] \mid f([a]) < r\}.$$

Es ist dann nicht schwer zu zeigen, dass die Mengen I_r, $r \in \mathbb{R}$, paarweise verschiedene Schnitte von M sind, welche abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$ sind. ■

Literatur

[K] Richard Kaye, *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press, 1991

[R] Joseph G. Rosenstein, *Linear Orderings*, Academic Press, 1982

[H] Stefan Hetzl, *Gödel's Incompleteness Theorems*, Skriptum, TU Wien, 2020, `https://dmg.tuwien.ac.at/hetzl/teaching/git_2020.pdf`