Martin Goldstern, 2009-11-21

Robinson Cr.

Mit $cl_{\mathscr{L}}(T)$ bezeichnen wir die Menge aller geschlossenen Formeln $\varphi \in \mathscr{L}$, die $T \vDash \varphi$ erfüllen.

Lemma 1. *Seien $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}_1$ prädikatenlogische Sprachen. Sei T_1 eine Theorie*[1] *in der Sprache $\mathscr{L}_1$, die unter Folgerungen abgeschlossen ist.*[2] *Dann gilt: jede konsistente Erweiterung von $T_1 \cap \mathscr{L}_0$ in der Sprache $\mathscr{L}_0$ ist mit T_1 konsistent, d.h.:*

> *Für jede erfüllbare (=konsistente) Theorie T_0 mit $T_1 \cap \mathscr{L}_0 \subseteq T_0 \subseteq \mathscr{L}_0$ ist $T_1 \cup T_0$ erfüllbar.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist T_0 unter Konjunktionen abgeschlossen. Wenn $T_0 \cup T_1$ unerfüllbar ist, dann gibt es eine Formel $\varphi_0 \in T_0$ und $\varphi_1 \in T_1$ sodass $\{\varphi_1, \varphi_0\}$ inkonsistent ist. Aber dann gilt $\varphi_1 \vDash \neg\varphi_0$, daher $\neg\varphi_0 \in T_1 \cap \mathscr{L}_0$, also $\neg\varphi \in T_0$, daher ist T_0 bereits widersprüchlich. $\square$

Satz 2 (Satz von Robinson über gemeinsame Konsistenz)**.** *Sei T_1 eine Theorie in der Sprache $\mathscr{L}_1$ und T_2 eine Theorie in der Sprache $\mathscr{L}_2$. Wir nehmen an, dass T_1 (in $\mathscr{L}_1$) unter Folgerungen abgeschlossen ist ebenso T_2 (in der Sprache $\mathscr{L}_2$).*

Dann ist $T_1 \cup T_2$ genau dann erfüllbar, wenn $(T_1 \cup T_2) \cap \mathscr{L}_0$ erfüllbar ist.

Beweis. Für den Beweis der nichttrivialen Richtung nehmen wir an, dass $(T_1 \cup T_2) \cap \mathscr{L}_0$ erfüllbar ist. Sei $T_0 \supseteq (T_1 \cup T_2) \cap \mathscr{L}_0$ eine vollständige konsistente Theorie in der Sprache $\mathscr{L}_0$. Wegen des vorigen Lemmas sind die beiden Theorien $T_1^+ := T_1 \cup T_0$ und $T_2^+ := T_2 \cup T_0$ konsistent.

(Man beachte, dass die Menge $cl_{\mathscr{L}_0}(T_1^+) \cap \mathscr{L}_0$ genau die Menge T_0 ist; die Menge $cl_{\mathscr{L}_0}(T_1^+) \cap \mathscr{L}_0$ ist nämlich eine konsistente Theorie in der Sprache $\mathscr{L}_0$, die die vollständige Theorie T_0 enthält; vollständige Theorien verlieren aber bei jeder echten Erweiterung in derselben Sprache ihre Konsistenz.)

Seien nun $\mathscr{M}_1 \vDash T_1^+$ und $\mathscr{M}_2 \vDash T_2^+$ Modelle für die Sprachen $\mathscr{L}_1$ bzw $\mathscr{L}_2$. Da die Modelle $\mathscr{M}_1 \restriction \mathscr{L}_0$ und $\mathscr{M}_2 \restriction \mathscr{L}_0$ beide die Theorie T_0 erfüllen, sind sie elementar äquivalent; daher gibt es iterierte Ultrapotenzen $\mathscr{M}_1^{\vec{I}}/\vec{U}$ und $\mathscr{M}_2^{\vec{J}}/\vec{V}$, deren $\mathscr{L}_0$-Redukte isomorph sind, sagen wir durch einen Isomorphismus f. Sei $\mathscr{M}$ eine Expansion von $\mathscr{M}_1^{\vec{I}}/\vec{U}$ zu einer Struktur der Sprache $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$, sodass f ein Isomorphismus in Bezug auf alle Symbole von $\mathscr{L}_2 \setminus \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \setminus \mathscr{L}_0$ ist; da f ohnehin bereits ein Isomorphismus in Bezug auf alle Symbole in $\mathscr{L}_0$ ist, ist f ein Isomorphismus zwischen den Strukturen $\mathscr{M} \restriction \mathscr{L}_2$ und $\mathscr{M}_2^{\vec{J}}/\vec{V}$.

Da $\mathscr{M}_2^{\vec{J}}/\vec{V}$ zu $\mathscr{M}_2$ elementar äquivalent ist, gelten in in diesem Modell alle Formeln aus T_2; ebenso gelten alle diese Formeln in $\mathscr{M} \restriction \mathscr{L}_2$, somit auch in $\mathscr{M}$. Weiters erfüllt $\mathscr{M} \restriction \mathscr{L}_1$ ebenso wie $\mathscr{M}$ selbst alle Formeln in T_1. Also ist $T_1 \cup T_2$ erfüllbar (nämlich durch $\mathscr{M}$). $\square$

Satz 3 (Interpolationssatz von Craig)**.** *Seien $\mathscr{L}_1$ und $\mathscr{L}_2$ Sprachen mit Durchschnitt $\mathscr{L}_0$; sei $\mathscr{L}$ eine Sprache, die $\mathscr{L}_1$ und $\mathscr{L}_2$ enthält.*

Wenn $\varphi_1 \in \mathscr{L}_1$, $\varphi_2 \in \mathscr{L}_2$, und in $\mathscr{L}$ die Folgerung $\varphi_1 \vDash_{\mathscr{L}} \varphi_2$ gilt, dann gibt es eine Formel $\theta \in \mathscr{L}_0$ mit $\varphi_1 \vDash_{\mathscr{L}_1} \theta$ und mit $\theta \vDash_{\mathscr{L}_2} \varphi_2$.

Beweis. Sei

$$T_1 := \{\psi \in \mathscr{L}_1 \mid \varphi_1 \vDash \psi\}, \qquad T_2 := \{\psi \in \mathscr{L}_2 \mid \neg\varphi_2 \vDash \psi\}.$$

Dann ist $T_1 \cup T_2$ inkonsistent (weil diese Theorie φ_1 und daher auch φ_2 enthält, aber auch $\neg\varphi_2$), daher gibt nach dem Satz von Robinson Formeln $\theta, \theta' \in \mathscr{L}_0$ mit $\psi \vDash_{\mathscr{L}_1} \theta$ und $\neg\varphi_2 \vDash_{\mathscr{L}_1} \neg\theta'$, und $\{\theta, \neg\theta'\}$ inkonsistent. Daher gilt $\varphi_1 \vDash_{\mathscr{L}_1} \theta \vDash_{\mathscr{L}_0} \theta' \vDash_{\mathscr{L}_2} \varphi_2$. $\square$

[1] Menge von geschlossenen Formeln (Sätzen)

[2] D.h.: Wenn $T_1 \vDash \psi$, $\psi \in \mathscr{L}_1$ geschlossene Formel, dann auch $\psi \in T_1$.