1.Übung zur EIMA
Montag/Dienstag 2022-10-10/11

Anmeldung via TISS für eine Linag1-Gruppe
(Zeit und Ort wie für linag1-Übungsgruppen)

Ankreuzen und Hochladen in tuwel
bis Montag 10.10., 08:00 als „UE0“ für Lineare Algebra 1.
Die linag1-Seite wird in tuwel ab Freitag abend verfügbar sein.

---

1. Zeige, dass die folgenden Aussageformen allgemeingültig sind:
   - $A \Rightarrow A \vee B$
   - $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; (\neg B \Rightarrow \neg A)$
   - $\big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big) \;\Rightarrow\; (A \Rightarrow C)$
2. Beantworte für die folgenden Aussageformen die beiden Fragen: Ist die Aussageform allgemeingültig? Gibt es Aussagen A und B für die die Aussageform wahr ist?
   - $(\neg(A \wedge B) \wedge B) \Rightarrow A$
   - $(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg(A \wedge \neg B)$
   - $(\neg A) \wedge A$
3. Seien M, N Mengen. Zeige, dass $M \subseteq N \;\Leftrightarrow\; M \cap N = M \;\Leftrightarrow\; M \cup N = N$
4. Sei X eine Menge, und $M, N \subseteq X$.
   - Zeige, dass $(X \setminus M) \cap (M \cup N) \subseteq N$. Welche Tautologie(n) haben Sie im Beweis benützt?
   - Welche Mengenbeziehung erhält man, wenn man die Tautologie $\neg(A \wedge B) \wedge B \;\Rightarrow \neg A$ benützt?
5. Wir betrachten Aussagen A_0, B_0, A_1, B_1, $\ldots$, die alle einen Wahrheitswert haben. Weiters definieren wir

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \forall n : (A_n \Rightarrow B_n)\\
C_2 &:= (\forall n : A_n) \Rightarrow (\forall n : B_n)\\
C_3 &:= (\exists n : A_n) \Rightarrow (\exists n : B_n)\\
C_4 &:= \exists n : (A_n \Rightarrow B_n)
\end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Aussage $(C_3 \Rightarrow C_4)$ jedenfalls wahr ist, egal was die Wahrheitswerte der Aussagen A_i und B_j sind.
   (Dazu ist eine Fallunterscheidung hilfreich, z.B.: Erster Fall: Die Aussage $(\exists n : B_n)$ ist wahr. Zweiter Fall: Die Aussage $(\exists n : B_n)$ ist falsch.)

   (b) Zeigen Sie, dass die Aussage $(C_4 \Rightarrow C_3)$ im Allgemeinen nicht wahr ist, indem Sie ein konkretes Gegenbeispiel (also Wahrheitswerte für alle A_i und alle B_j) angeben.

   (c) Für Ehrgeizige: Von den 12 möglichen Paaren (i, j) mit $i \neq j$ gibt es 5 Paare, für die $C_i \Rightarrow C_j$ immer wahr ist (wie z.B. $i = 1, j = 2$) und 7 weitere, für die $C_i \Rightarrow C_j$ im Allgemeinen falsch ist. Finden Sie diese 7 Paare, und geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.

6. Betrachte die Aussage

   A: „Sei $\sim$ eine Relation auf einer nichtleeren Menge X. Ist $\sim$ symmetrisch und transitiv, so ist $\sim$ auch reflexiv.“

   (i) Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort „wahr“ lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort „falsch“, finde ein Gegenbeispiel.

   (ii) Ist der folgende Beweis der Aussage A korrekt oder enthält er (mindestens) einen Fehler?

   Wir müssen zeigen, dass stets $x \sim x$ gilt. Sei $x \sim y$, dann ist wegen der Symmetrie auch $y \sim x$, und wegen der Transitivität daher auch $x \sim x$. Also ist $\sim$ reflexiv.

   (iii) Falls Ihre Antwort in (ii) „enthält einen Fehler“ lautet, finde den Fehler im Beweis.

   (iv) Muss man den in (ii) genannten Beweis lesen, um zu entscheiden ob er korrekt ist?

7. Eine unendlich große Menge von Mathematikern[1] spielt mit einem Physiker ein Spiel. Die Spielregeln sind wie folgt: Zu Spielbeginn setzt der Physiker jedem Mathematiker einen Hut auf der rot oder grün sein kann. Jeder der Mathematiker sieht wohl die Farbe der Hüte aller anderen, nicht jedoch die Farbe seines eigenen Hutes. In geheimer Abstimmung schreibt dann jeder der Mathematiker auf einen Zettel, welche Farbe sein Hut (seiner Meinung nach) hat. Die Mathematiker gewinnen, wenn sich nur endlich viele von ihnen irren. Dabei dürfen sich die Mathematiker vor Spielbeginn auf eine Strategie einigen, während des Spiels ist jedoch jegliche[2] Kommunikation verboten.

   Gibt es eine Strategie, sodass die Mathematiker sicher gewinnen? Falls ja, finde eine.

   Hinweis. Diese Aufgabe ist schwierig.

8. Seien M, N Mengen, und $f : M \to N$ eine Funktion. Wir definieren eine Relation $\ker f$ auf M als

$$\ker f := \big\{(x, y) \in M \times M : \ f(x) = f(y)\big\}.$$

   Zeige, dass $\ker f$ eine Äquivalenzrelation ist.

9. Seien M, N Mengen, $f : M \to N$ eine Funktion, und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M. Bezeichne M/R die Faktormenge, das ist die Menge aller Äquivalenzklassen

$$M/R = \big\{[x]_R : \ x \in M\big\}.$$

   Weiters bezeichne mit $\pi : M \to M/R$ die kanonische Projektion, das ist die Funktion definiert als $\pi(x) = [x]_R$. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen (A) und (B) äquivalent sind:

   (A) $R \subseteq \ker f$.

   (B) Es existiert eine Funktion $F : M/R \to N$, sodass das Diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/R \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

   kommutiert, d.h. sodass $f = F \circ \pi$ gilt.

   Zeige weiters, dass, falls (A) und (B) erfüllt sind, die Funktion F mit der genannten Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.

[1] Nur männliche? Nur weibliche? Vom Planeten Gethen? — Ist für die Aufgabe egal.

[2] *Jegliche* Kommunikation, also auch nichtverbale, wie etwa: winken wenn ich einen roten Hut sehe, oder das Spielfeld verlassen, wenn ich einen grünen Hut sehe, etc.

10. Seien M, N Mengen, und $f : M \to N$ eine Funktion. Bezeichne mit ι die mengentheoretische Inklusionsabbildung $\iota : f(M) \to N$, das ist die Funktion die definiert ist als $\iota(x) := x$ für $x \in f(M)$.

- Zeige, dass durch die folgende Vorschrift eine Abbildung $F : M/\ker f \to f(M)$ wohldefiniert ist. (Bevor Sie das zeigen, erklären Sie, was hier mit „wohldefiniert“ gemeint ist.)

  Sei $a \in M/\ker f$ gegeben. Wähle $x \in M$ mit $a = [x]_{\ker f}$, und setze $F(a) := f(x)$.

- Zeige, dass F bijektiv ist.
- Zeige, dass das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert, dass heißt: $f = \iota \circ F \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\ker f \arrow[r, "F"'] & f(M) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

2.Übung zur EIMA
Mittwoch/Donnerstag 2022-10-12/13

Anmeldung via TISS für eine Ana1-Gruppe
(Zeit und Ort wie für Ana1-Übungsgruppen)

Ankreuzen in tuwel als „UE0“ für Analysis 1.
Deadline: Donnerstag 0:00!

---

11. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Weiters seien $M, N \subseteq X$.
    - Zeige, dass $M \subseteq N \;\Rightarrow\; f(M) \subseteq f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Implikation? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
    - Zeige, dass $f(M \cup N) \subseteq f(M) \cup f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
    - Zeige, dass $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$. Gilt auch die umgekehrte Inklusion? Falls ja, finde einen Beweis, falls nein, finde ein Gegenbeispiel.
12. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei I eine nichtleere Menge, und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Teilmenge von Y. Zeige, dass $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(M_i)$ und $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i)$.
13. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Weiters sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Partition von Y. Zeige, dass $\{f^{-1}(M) : \; M \in \mathcal{Q}\} \setminus \{\emptyset\}$ eine Partition von X ist.
14. Seien X, Y Mengen, $f : X \to Y$ eine Funktion, und $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ die Urbildfunktion. Zeige
    - f ist surjektiv $\Leftrightarrow \big[\forall B \subseteq Y : f(f^{-1}(B)) = B\big] \Leftrightarrow f^{-1}$ ist injektiv
    - f ist injektiv $\Leftrightarrow \big[\forall A \subseteq X : f^{-1}(f(A)) = A\big] \Leftrightarrow f^{-1}$ ist surjektiv
15. Seien X, Y Mengen, und $f, g \subseteq X \times Y$ Funktionen von X nach Y. Zeige, dass aus $f \subseteq g$ bereits $f = g$ folgt.
16. Finde eine Menge M und zwei Funktionen $f, g : M \to M$, sodass $g \circ f = f$, wobei aber $g \neq \mathrm{id}_M$. Kann man so ein Beispiel auch dann konstruieren, wenn man zusätzlich verlangt, dass f injektiv (bzw. surjektiv, bzw. bijektiv) ist?
17. Eine Gruppe $(G, \cdot, e)$ heißt kommutativ, wenn für je zwei Elemente $x, y \in G$ gilt, dass $x \cdot y = y \cdot x$. Für welche Mengen M ist die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(M)$ kommutativ?
18. Ein Tupel $(K, +, *, 0, e)$ heißt ein Körper, wenn $(K, +, 0)$ und $(K \setminus \{0\}, *, e)$ kommutative Gruppen sind, und das Distributivgesetz $\forall x, y, z \in K : \; x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$ gilt.

    Betrachte die Menge $K = \{0, 1\}$, und definiere $+, * : K \times K \to K$ als

    $$x + y := \begin{cases} 0\,, & x = y \\ 1\,, & x \neq y \end{cases} \qquad x * y := \begin{cases} 0\,, & x = 0 \vee y = 0 \\ 1\,, & x = y = 1 \end{cases}$$

    Zeige, dass $(K, +, *, 0, 1)$ ein Körper ist.

19. Sei M eine nichtleere Menge. Für $A \subseteq M$ bezeichne mit $\mathbf{1}_A$ die charakteristische Funktion der Menge A, das ist die Funktion $\mathbf{1}_A : M \to \{0,1\}$, die definiert ist als

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in A \\ 0\,, & x \notin A \end{cases}$$

Weiters bezeichne mit $\{0,1\}^M$ die Menge aller Funktionen von M nach $\{0,1\}$. Auf $\{0,1\}^M$ definieren wir eine Addition und Multiplikation punktweise, sprich, durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ sowie $(f \cdot g)(x) := f(x) * g(x)$ für $x \in M$. Betrachte nun die Funktion

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{P}(M) & \to & \{0,1\}^M \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{cases}$$

- Zeige, dass
$$\Phi(A \triangle B) = \Phi(A) + \Phi(B), \quad \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cdot \Phi(B),$$
wobei $\triangle$ die symmetrische Differenz bezeichnet. Zeige weiters, dass Φ injektiv ist. Ist Φ surjektiv?
- Zeige, dass $(\mathcal{P}(M), \triangle)$ eine kommutative Gruppe ist.
- Zeige, dass $\cap$ distributiv über $\triangle$ ist $(\forall x, y, z \in \mathcal{P}(M) : x \cap (y \triangle z) = (x \cap y) \triangle (x \cap z))$, und es ein neutrales Element bzgl. $\cap$ gibt $(\exists\, e \in \mathcal{P}(M)\, \forall x \in \mathcal{P}(M) :\ e \cap x = x \cap e = x)$. Welche Elemente von $\mathcal{P}(M)$ haben ein Inverses bezüglich $\cap$?

Hinweis. Hier kann man sich viel Arbeit ersparen, wenn man die vorherige Aufgabe verwendet.

20. Wir haben gesehen, dass die folgende Schlussweise korrekt ist: Ist eine Implikation $P \Rightarrow Q$ wahr, und ist ihre Prämisse P wahr, so folgt, dass ihre Konklusion Q wahr ist.

Man stelle sich nun vor, man weiß, dass eine Implikation $P \Rightarrow Q$ wahr ist und dass ihre Konklusion Q wahr ist. Kann man daraus etwas für die Aussage P schließen?

Im Folgenden nehmen wir wieder einmal eine Anleihe aus den aus der Anschauung bekannten Rechenoperationen und Rechenregeln für Zahlen.

- Sei A die Aussage (die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)
$$A: \qquad \forall x, y > 0 : \ \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$
Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort „wahr“ lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort „falsch“, finde ein Gegenbeispiel.

  Ist der folgende Beweis der Aussage A korrekt oder enthält er einen Fehler?

  Wir multiplizieren die Ungleichung $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ mit 2, also folgt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Jetzt bringen wir $\sqrt{xy}$ auf die linke Seite, also folgt $x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$. Nun formen wir die linke Seite um und erhalten $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schließen dass die Aussage A wahr ist.

  Sollte Ihre Antwort „nicht korrekt“ sein, was ist der Fehler? Kann man den Beweis so modifizieren, dass ein richtiger Beweis entsteht?
- Sei B die Aussage
$$B: \qquad \forall x > 0 : \ x + 1 \leq 2x$$
Ist diese Aussage wahr oder falsch? Falls Ihre Antwort „wahr“ lautet, geben Sie einen Beweis. Lautet die Antwort „falsch“, finde ein Gegenbeispiel.

  Ist der folgende Beweis der Aussage B korrekt, oder enthält er einen Fehler?

  Wir multiplizieren die Ungleichung $x + 1 \leq 2x$ mit $x - 1$, also folgt $x^2 - 1 \leq 2x^2 - 2x$. Jetzt bringen wir alle Terme auf die rechte Seite, damit erhalten wir $0 \leq x^2 - 2x + 1$. Nun formen wir die rechte Seite um, und erhalten $0 \leq (x-1)^2$. Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nichtnegativ ist, ist diese Ungleichung wahr, und wir schließen dass die Aussage B wahr ist.

  Sollte Ihre Antwort „falsch“ sein, was ist der Fehler? Kann man den Beweis so modifizieren, dass ein richtiger Beweis entsteht?