Total geordnete Körper

Ein total geordneter Körper ist ein Körper $(K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ mit einer totalen (=linearen) Ordnung, die mit den Operationen verträglich ist, d.h. $a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$ für alle a, b, c, und $a \leq b \rightarrow ac \leq bc$ für $c \geq 0$.
(Wenn nötig, werden wir auch einige weitere Relationen/Funktionen/Konstante in unserer Sprache aufnehmen, zB Konstantensymbole 2 oder $\frac{1}{3}$, oder auch die einstellige Relation „ist ganze Zahl".)
Man könnte auch[1] definieren:

> Ein angeordneter Körper ist ein Körper $(K, +, \cdot, 0, 1)$ mit einer ausgezeichneten Teilmenge $P \subseteq K$ (die „nichtnegativen" Elemente) mit folgenden Eigenschaften:
> (1) P ist unter Addition und Multiplikation abgeschlossen.
> (2) $0 \in P$.
> (3) $\forall x \in K: \ x \in P \vee -x \in P$.
> (4) $\forall x \in K: \ x \in P \wedge -x \in P \ \rightarrow \ x = 0$.
> Durch $a \leq b \ \leftrightarrow \ b - a \in P$ wird dann eine lineare Ordnung definiert, die mit den Operationen verträglich ist.

Weiters definieren wir den Absolutbetrag in natürlicher Weise: $|x| = x$ wenn $x \geq 0$, und $-x$ sonst.
Beispiele: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
Jeder total geordnete Körper enthält eine isomorphe Kopie der rationalen Zahlen (oft sagen wir: oBdA die rationalen Zahlen selbst).

Weiteres Beispiel: Der Körper $\mathbb{Q}(x)$ aller rationalen Funktionen, d.h. der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{Q}[x]$. Jedes Element von $\mathbb{Q}(x) \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig in der Form $r \cdot \frac{p(x)}{q(x)}$ darstellen, wobei r rationale Zahl ist, und $p(x)$ und $q(x)$ ganzzahlige irreduzible Polynome sind, deren Führungskoeffizient positiv ist, und deren „Inhalt" (ggT der Koeffizienten) 1 ist. So ein Element nennen wir positiv, wenn $r > 0$ ist.
Insbesondere ist zB $x - n = 1 \cdot \frac{x-n}{1}$ positiv, daher ist die rationale Funktion x größer als jedes konstante Polynom; die rationale Funktion $1/x$ ist positiv und infinitesimal, weil sie kleiner als jede rationale Zahl ist.

Endlich und infinitesimal

In jedem total geordneten Körper K definieren wir $K_e :=$ Menge der endlichen Elemente, also jener Elemente, deren Absolutbetrag durch eine rationale (oder natürliche) Zahl beschränkt ist, und $K_0 :=$ Menge der infinitesimalen Elemente. 0 ist immer infinitesimal; die „eigentlichen" infinitesimalem Elemente sind die infinitesimalen Elemente ungleich 0 — das sind genau jene Elemente, deren Kehrwerte unendlich sind.
Ein Körper heißt archimedisch, wenn alle Elemente endlich sind; äquivalent: wenn es außer 0 keine infinitesimalen Elemente gibt.

[1] Diese Definition ist zur vorigen äquivalent. Sie hat den Vorteil, sich nur mit einer einstelligen statt einer zweistelligen Relation zu beschäftigen. Als Nachteil könnte man ansehen, dass man den Begriff „kleiner" als der Grundbegriff empfindet, und die Begriffe „positiv" bzw „nichtnegativ" als abgeleitet.

Äquivalent dazu: zwischen je zwei Zahlen $a < b$ gibt es eine rationale Zahl. (Jede Zahl b muss nämlich in einem geeigneten Intervall $[n, n+1]$ liegen. Wenn nun $n \leq a < b \leq n+1$ ist, mit $0 < 1/k < b-a$, dann gibt es ein i, sodass $a < n + i/k < b$ ist.)
K_e ist ein Ring, und K_0 ist ein maximales Ideal in diesem Ring. K_e/K_0 ist somit ein Körper. Man kann auch zeigen, dass K_e/K_0 ein angeordneter Körper ist. Jede Nebenklasse von K_0 enthält nämlich entweder nur positive oder nur negative Elemente — ausgenommen das Ideal K_0 selbst. Die nichtnegativen Elemente von K_e/K_0 sind also genau jene Elemente von K_e/K_0, die sich in der Form $a + K_0$ mit nichtnegativem a darstellen lassen.

Im obigen Beispiel ist K_e die Menge aller Funktionen $r\frac{p(x)}{q(x)}$, wo der Grad von $p(x)$ höchstens gleich dem Grad von $q(x)$ ist. Wenn nämlich p und q den gleichen Grad haben, und Führungskoeffizienten A und B, dann ist $|r\frac{p(x)}{q(x)}| \leq |r\frac{A}{B}| + \varepsilon$ für jede rationale Zahl $\varepsilon > 0$.
Die infinitesimalen Elemente sind jene Funktionen $r\frac{p(x)}{q(x)}$, in denen der Grad von p kleiner als der von q ist. Der Faktorring K_e/K_0 ist hier einfach $\mathbb{Q}$.
In jedem Fall gilt, dass sowohl der Ring K_e als auch der Körper K_e/K_0 archimedisch sind.

Nonstandard rationale Zahlen

Wir werden zeigen: Wenn wir den Körper K als geeignete Nonstandardversion von $\mathbb{Q}$ wählen, dann erhalten wir $K_e/K_0 = \mathbb{R}$.
Ein geordneter Körper $\mathbb{Q}^*$ heißt Nonstandardversion von $\mathbb{Q}$, wenn er erstens nichtarchimedisch ist, und zweitens dieselben geschlossenen Formeln (in Prädikatenlogik erster Stufe, in der beschriebenen Sprache) erfüllt wie $\mathbb{Q}$.
(Achtung! die Eigenschaft „ist endlich“ lässt sich nicht in unserer Sprache formulieren.)

Der Körper $\mathbb{Q}(x)$ ist keine Nonstandardversion von $\mathbb{Q}$; in $\mathbb{Q}$ lassen sich nämlich Quadratwurzeln gut approximieren, in $\mathbb{Q}(x)$ nicht.
Genauer: in $\mathbb{Q}$ gilt die Formel

$$\forall u \geq 0 \, \exists v \quad v^2 \leq u \leq v^2 + 1$$

die aber in $\mathbb{Q}(x)$ nicht gilt; etwa kann man für $u = x$ kein geeignetes v finden.

Typen

Sei Σ die Theorie der rationalen Zahlen, also die Menge aller geschlossenen Formeln, die in $\mathbb{Q}$ gelten.
Sei c eine neue Konstante. Ein „c-Typ“ ist eine Menge t von geschlossenen Formeln (in der um c erweiterten Sprache), die nicht nur konsistent ist, sondern auch „mit Σ“ konsistent ist, d.h., eine Menge t sodass $t \cup \Sigma$ konsistent ist.
Statt t schreiben wir oft $t(c)$, um die Rolle der Konstanten c zu betonen.
Wir stellen uns t immer als unter Beweisbarkeit abgeschlossen vor (dies ändert nichts an der Konsistenz mit Σ). Insbesondere ist t also unter endlicher Konjunktion abgeschlossen.
Meistens betrachten wir vollständige Typen, d.h. Typen die für jede mögliche geschlossene Formel $\varphi(c)$ entweder $\varphi(c)$ oder $\neg\varphi(c)$ enthalten.

Beispiel: Sei t der deduktive Abschluss von $\Sigma \cup \{4c = 3\}$. Dann ist t ein vollständiger Typ.

Sei $t(c)$ eine Menge von Formeln, die unter Konjunktion abgeschlossen ist. Dann ist $t(c)$ genau dann ein Typ (also konsistent mit Σ), wenn für jede Formeln $\varphi(c)$ in t die Formel

$$\exists x \, \varphi(x)$$

in Σ liegt.

Saturierte Modelle

Wenn t oder $t(c)$ ein c-Typ ist, und d eine neue Konstante, dann sei $t(c/d)$ oder einfach $t(d)$ jener Typ, der aus t entsteht, wenn man c überall durch d ersetzt.
Seien $t_1(c)$ und $t_2(c)$ Typen. Im Allgemeinen ist $t_1(c) \cup t_2(c)$ kein Typ (z.B. könnte $t_1(c)$ die Formel $c > 1$ enthalten, und $t_2(c)$ die Formel $c < 1$). Allerdings gilt, dass jedenfalls $t_1(c) \cup t_2(d)$ konsistent mit Σ ist, wenn d eine neue Konstante ist.
Analoges gilt auch für beliebig viele Typen.
Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von neuen Konstantensymbolen, c ein fixes Konstantensymbol. Wir nennen eine Theorie $\Gamma \supseteq \Sigma$ „saturiert“[2], wenn es für jeden (vollständigen) c-Typ $t(c)$ eine Konstante $d \in \mathcal{C}$ gibt, sodass $t(d) \subseteq \Gamma$.
Γ sagt also aus: Alle Objekte, die in einem Erweiterungskörper konsistent existieren, existieren in jedem meiner Modelle.
Man überlegt leicht den folgenden Satz:
SATZ. Es gibt eine konsistente saturierte Theorie Γ.
BEWEIS. In der Sprache der Körper mit einer Konstanten c gibt es nur abzählbar viele (geschlossene) Formeln, daher höchstens $2^{\aleph_0}$ viele Typen, nennen wir sie $(t_i : i \in I)$ für eine geeignete Indexmenge I. Für jeden Typ $t_i(c)$ wählen wir eine neue Konstante c_i. Nun ist die Menge $\bigcup_{i\in I} t_i(c_i)$ konsistent (dafür können wir den Kompaktheitssatz verwenden) und saturiert (nach Konstruktion).
SATZ. Sei Γ saturiert, und sei K ein Modell von Γ.
Dann ist K_e/K_0 isomorph zu den reellen Zahlen.
BEWEIS. Wir müssen zeigen, dass jede beschränkte Teilmenge von K_e/K_0 eine kleinste obere Schranke hat. Sei also $A \subseteq K_e/K_0$ beschränkt. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass $0 \in A$ gilt. (Wenn dies nicht von vornherein gilt, können wir das durch Translation erreichen.)
Sei R die Menge aller rationalen Zahlen, die durch ein Element von A beschränkt sind, und S deren Komplement:

$$R := \{q \in \mathbb{Q} : \exists a \in A\, q \leq a\} \qquad S := \mathbb{Q} \setminus R$$

Jede obere Schranke von A in K_e/K_0 ist durch eine rationale Zahl beschränkt, also ist R in $\mathbb{Q}$ beschränkt, und S ist nicht leer.
Betrachten wir nun den Typ[3]

$$t_A(c) := \{c \geq q \mid q \in R\} \cup \{c < q \mid q \in S\} = \{c \geq q \mid \exists a \in A\, q \leq a\} \cup \{c < q \mid \forall a \in A\, a < q\}.$$

$t_A(c)$ ist konsistent, da jedes Element von R kleiner als jedes Element von S ist.
Also gibt es eine Konstante c_A, sodass $t_A(c_A) \subseteq \Gamma$ ist. Sei b die Interpretation von c_A in K. Wegen $0 \in A$ gilt $b \geq 0$.
Da b durch jedes Element von S beschränkt ist, ist $b \in K_e$.
Wir behaupten, dass $b + K_0$ die kleinste obere Schranke von A ist.
Sei $a \in A$; wir wollen zeigen, dass $a + K_0 \leq b + K_0$, also nehmen wir indirekt an, dass $b + K_0 < a + K_0$ ist. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $b + K_0 < q + K_0 < a + K_0$, daher auch $b < q < a$ in K, in Widerspruch zur Forderung $q \leq b$, die sich aus $(q \leq c) \in \Gamma$ ergibt.

---

[2] Dies ist eine Variante des in der Modelltheorie üblichen Begriffs der Saturiertheit.

[3] Beachten Sie, dass die Ausdrücke $c \geq q$ bzw $c < q$ Formeln in unserer Sprache sind, während die Zeichen $\geq$ und $<$ in den Ausdrücken $q \leq a$ bzw $a < q$ die Interpretation der Symbole $<$ bzw $\leq$ in der Struktur K_e/K_0 ist.

Dass $b + K_0$ nicht nur obere Schranke, sondern sogar kleinste obere Schranke ist, zeigt man analog.

Nonstandard reelle Zahlen; Stetigkeit

Wir betrachten den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammen mit ein paar Funktionen f, g, ... auf $\mathbb{R}$. Bei Bedarf nehmen wir auch an, dass wir alle benötigten Funktionen und Relationen in unserer Sprache haben, insbesondere die einstellige Betragsfunktion, die zweistellige Relation $\leq$, und die einstellige Relation „ist natürliche Zahl", die wir *Nat* nennen.
Sei c eine neue Konstante. Sei Σ die Theorie der Struktur $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq, f, g, \ldots)$, zusammen mit der Menge $\{0 < c, 1 < c, 1 + 1 < c, \ldots\}$.
Sei nun $\mathbb{R}^*$ ein Nonstandardmodell, d.h. ein Modell von Σ. $\mathbb{R}^*$ enthält eine isomorphe Kopie von $\mathbb{R}$ (die wir mit $\mathbb{R}$ identifizieren).
Die Interpretation von *Nat* in $\mathbb{R}^*$ ist eine Menge Nat^*, die neben den üblichen natürlichen Zahlen auch „unendlich große" Zahlen enthält.
Die Menge der unendlich großen Zahlen hat kein kleinstes Element. Es gilt aber: jede in $\mathbb{R}^*$ definierbare nichtleere Teilmenge von Nat^* hat ein kleinstes Element. Sei nämlich $\varphi(x)$ eine Formel. Mit der Abkürzung $\varphi'(x) := \varphi(x) \wedge Nat(x)$ gilt in $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \models \exists x\, \varphi'(x) \to \exists x\, \varphi'(x) \wedge \forall y\, (\varphi'(y) \to x \leq y)$$

Es ist üblich, notationell nicht zwischen den Rechenoperationen $+$, $\cdot$ auf $\mathbb{R}^*$ und denen auf $\mathbb{R}$ zu unterscheiden. Die Interpretationen der Funktionssymbole f, g etc auf $\mathbb{R}^*$ bezeichnet man jedoch oft mit f^*, g^* etc, um sie von den ursprünglichen Funktionen f, g zu unterscheiden. f ist natürlich die Einschränkung von f^* auf $\mathbb{R}$.
Wir schreiben $x \approx y$, wenn $x - y$ infinitesimal ist.
Jedem endlichen Element $x \in \mathbb{R}^*_e$ ordnen wir seinen „Standardwert"

$$x^\circ := \sup\{q \in \mathbb{Q} : q \leq x\} \in \mathbb{R}$$

zu. Man sieht leicht, dass $x^\circ \approx x$ gilt. x^o ist der kanonische Repräsentant der Äquivalenzklasse von x modulo $\approx$.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Wir definieren: f^* heißt S-stetig an der Stelle x_0, wenn für alle $x \approx x_0$ die Beziehung $f^*(x) \approx f^*(x_0)$ folgt.
Man kann zeigen, dass die folgenden Äquivalenzen gelten: Weiters gilt:

(1) f ist stetig an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ (im üblichen Sinn), wenn f^* an der Stelle x_0 S-stetig ist.
(2) Daher: f ist stetig genau dann, wenn f^* an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ S-stetig ist.
(3) f ist (auf $\mathbb{R}$) gleichmäßig stetig genau dann, wenn f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^*$ S-stetig ist.

BEISPIEL. Sei $f(x) = 3x$. Dann ist f^* an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}^*$ S-stetig, weil $f^*(x) - f^*(y) = 3(x - y)$ ist; mit $x - y$ ist auch $3(x - y)$ infinitesimal.
Sei $g(x) = x^2$. Dann ist $g^*(x + \varepsilon) - g^*(x) = 2\varepsilon x + \varepsilon^2$. Wenn ε infinitesimal ist, aber $x = 1/\varepsilon$, dann ist $g^*(x + \varepsilon) - g^*(x) \approx 2$, also nicht infinitesimal. Daher ist g nicht gleichmäßig stetig.
BEWEIS (1, Teil 1). Sei f stetig bei x_0 im üblichen Sinn, und sei $x_0 \in \mathbb{R}$, ε infinitesimal. Sei r eine beliebige positive rationale (oder reelle) Zahl.
Wegen der Stetigkeit von f können wir eine rationale (oder reelle) Zahl $s > 0$ finden, sodass

$$\mathbb{R} \models \forall x\, |x - x_0| < s \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < r$$

gilt. Daher gilt auch

$$\mathbb{R}^* \models \forall x\, |x - x_0| < s \Rightarrow |f^*(x) - f^*(x_0)| < r$$

Für $x \approx x_0$ ist $x - x_0$ infinitesimal, also gilt sicher $|x - x_0| < s$. Daher auch $|f^*(x) - f^*(x_0)| < r$. Da dies für alle positiven $r \in \mathbb{R}$ gilt, ist $f^*(x) - f^*(x_0)$ infinitesimal. f^* ist also S-stetig an der Stelle x_0.

BEWEIS (1, Teil 2). Sei nun $f^*(x) - f^*(x_0)$ infinitesimal für alle $x \approx x_0 \in \mathbb{R}$, und sei $r > 0$ eine reelle Zahl. Sei

$$E := \{n \in \mathbb{R}^* : Nat(n) \land \forall x \left(|x - x_0| < \frac{1}{n} \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < r \right)\}$$

Nach Voraussetzung enthält E alle unendlich großen natürlichen Zahlen. Als definierbare Menge von natürlichen Zahlen muss E ein kleinstes Element n^* haben; dieses n^* kann nicht unendlich groß sein, sonst wäre $n^* - 1$ ja auch unendlich groß, und würde somit auch in E liegen.
Daher ist n^* endlich, und für $s := 1/n^*$ gilt $\mathbb{R}^* \models \forall x\, |x - x_0| < s \rightarrow |f^*(x) - f^*(x_0)| < r$, daher gilt die analoge Formel in $\mathbb{R}$.

Nonstandard reelle Zahlen; Differenzierbarkeit

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren: f heißt differenzierbar an der Stelle x_0, wenn es eine reelle Zahl a gibt, sodass für alle infinitesimalen Werte $\varepsilon \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{f^*(x_0 + \varepsilon) - f^*(x_0)}{\varepsilon} \approx a$$

In diesem Fall schreiben wir auch $f'(x_0) = a$.
Diese Definition ist äquivalent zur üblichen.

Als Anwendungsbeispiel beweisen wir die
KETTENREGEL: Sei ϵ infinitesimal. Wir wollen

$$\frac{f(g(x + \varepsilon) - f(g(x))}{\varepsilon} \approx f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

beweisen, unter der Annahme, dass g und f an den Stellen x bzw $g(x)$ differenzierbar sind. Sei $\delta := g(x + \varepsilon) - g(x)$. Wir nehmen an, dass g stetig ist, daher ist δ infinitesimal.

1.Fall $\delta = 0$. Dann ist $g'(x) \approx \frac{g(x+\varepsilon)-g(x)}{\varepsilon} = 0$, und die behauptete Gleichheit gilt.
2.Fall $\delta \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{f(g(x + \varepsilon) - f(g(x))}{\varepsilon} = \frac{f(g(x + \varepsilon) - f(g(x))}{g(x + \varepsilon) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{f(g(x) + \delta) - f(g(x))}{\delta} \cdot \frac{g(x + \varepsilon) - g(x)}{\varepsilon} = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Statt der üblichen Rechenregeln für Grenzwerte haben wir hier die folgenden Rechenregel für $\approx$ verwendet: Wenn $a \approx a'$ und $b \approx b'$, dann ist $ab \approx a'b'$, d.h. dass $\approx$ auf $\mathbb{R}^*_e$ eine Kongruenzrelation ist[4]

[4] Die Relation $\approx$ ist übrigens auf ganz $\mathbb{R}^*$ keine Kongruenzrelation; sei $\varepsilon > 0$ infinitesimal, $\omega := 1/\varepsilon$, dann ist zwar $1 + \varepsilon \approx 1$ aber $\omega \cdot (1 + \varepsilon) = \omega + 1 \not\approx \omega = \omega \cdot 1$.