NONSTANDARDBEWEIS DES DARSTELLUNGSSATZES VON STONE

Definition 1. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt konkurrent auf A, wenn es für alle endlichen Mengen $F \subseteq A$ ein $c \in A$ gibt mit $F \times \{c\} \subseteq R$, d.h., $\forall x \in F : xRc$. („c beschränkt F“.)

Sei A eine algebraische oder prädikatenlogische Struktur. Eine elementare Erweiterung $A \prec A^*$ heißt „genügend saturiert“, wenn für alle in A definierbaren konkurrenten Relationen R gilt:

$$\exists c \in A^* : A \times \{c\} \subseteq R^*, \text{ d.h., } c \text{ beschränkt ganz } A$$

(Hier ist R^* die Relation auf A^*, die der Relation R auf A entspricht. Formal wird R durch eine Formel definiert: $R = \{\vec{x} \in A^k \mid A \vDash \varphi(\vec{x})\}$. Dann ist $R^* := \{\vec{y} \in (A^*)^k \mid A^* \vDash \varphi(\vec{y})\}$.

Lemma 2. *Für jede Struktur A gibt es eine genügend saturierte elementare Erweiterung.*

Beweis. Kompaktheitssatz. □

Satz 3 (Satz von Stone)**.** *Jede Boolesche Algebra ist isomorph zu einer Mengenalgebra, d.h. zu einer Booleschen Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra $(\mathfrak{P}(X), \cup, \cap)$.*

Definition 4. Sei B eine Boolesche Algebra. Für $b \in B \setminus \{0\}$, $c \in B$ sagen wir „b entscheidet c“, wenn entweder $b \le c$ oder $b \le \neg c$ (d.h. $b \wedge c = 0$) gilt.

Lemma 5. *Die Relation „entscheidet“ ist konkurrent, genauer:*

Für alle $c_1, \dots, c_n$ gibt es ein b sodass gilt: b entscheidet $c_1, \dots, c_n$.

Dies gilt sogar unter jedem Element a:

Für jedes $a \neq 0$ gilt:
Für alle $c_1, \dots, c_n$ gibt es ein $b \le a$ sodass gilt: b entscheidet $c_1, \dots, c_n$.

Beweis. Sei $a \neq 0$ in B, und seien $c_1, \dots, c_n > 0$ in B. Zumindest eines der beiden Elemente $a \wedge c_1$ und $a \wedge (\neg c_1)$ muss > 0 sein. [Wegen des Distributivgesetzes ist nämlich ihre Vereinigung > 0.]

Sei also $\gamma_1 \in \{c_1, \neg c_1\}$ so, dass $a \wedge \gamma_1 > 0$.

Induktiv wählen wir nun $\gamma_2 \in \{c_2, \neg c_2\}, \dots, \gamma_n \in \{c_n, \neg c_n\}$, sodass jeweils $a \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_i > 0$ gilt. Schließlich sei $b := a \wedge \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n$, dann entscheidet b alle c_i und es gilt $0 < b \le a$. □

Sei nun B^* ein genügend saturiertes Nonstandardmodell. B ist Unteralgebra von B^*.

Definition 6. Wir nennen ein Element $p \in B^* \setminus \{0\}$ einen „Punkt“, wenn p alle Elemente von B entscheidet.

Lemma 7. *Für alle $a \in B \setminus \{0\}$ gibt es einen Punkt $p \le a$.*

Beweis. Da B^* saturiert ist, folgt dies aus Lemma 5. □

Definition 8. Sei $P \subseteq B^*$ die Menge aller Punkte. Für $b \in B$ sei $h(b) := \{p \in P \mid p \le b\}$.

Satz 9. *Die Abbildung h ist ein injektiver Homomorphismus von B in die Potenzmenge von P.*

Beweis. Offenbar ist $h(1) = P$, $h(0) = \emptyset$.

Für jeden Punkt p und jedes $b \in B$ gilt genau eine der Beziehungen $p \leq b$ und $b \leq \neg b$. Daher gilt:

$$p \notin h(b) \Leftrightarrow p \not\leq b \Leftrightarrow p \leq \neg b \Leftrightarrow p \in h(\neg b),$$

also $h(\neg b) = P \setminus h(b)$.

Weiters gilt $p \in h(b \wedge c) \Leftrightarrow p \in h(b)$ und $p \in h(c)$. Die Abbildung h ist also mit $\neg$ und $\wedge$, daher auch mit $\vee$ verträglich.

Daher ist h Homomorphismus.

Wir wollen nun zeigen, dass h injektiv ist; es genügt, sich zu überlegen, dass der Kern von h trivial ist, d.h.: Wenn $b > 0$, dann $h(b) \neq \emptyset$. Dies ist genau Lemma 7.

$\square$