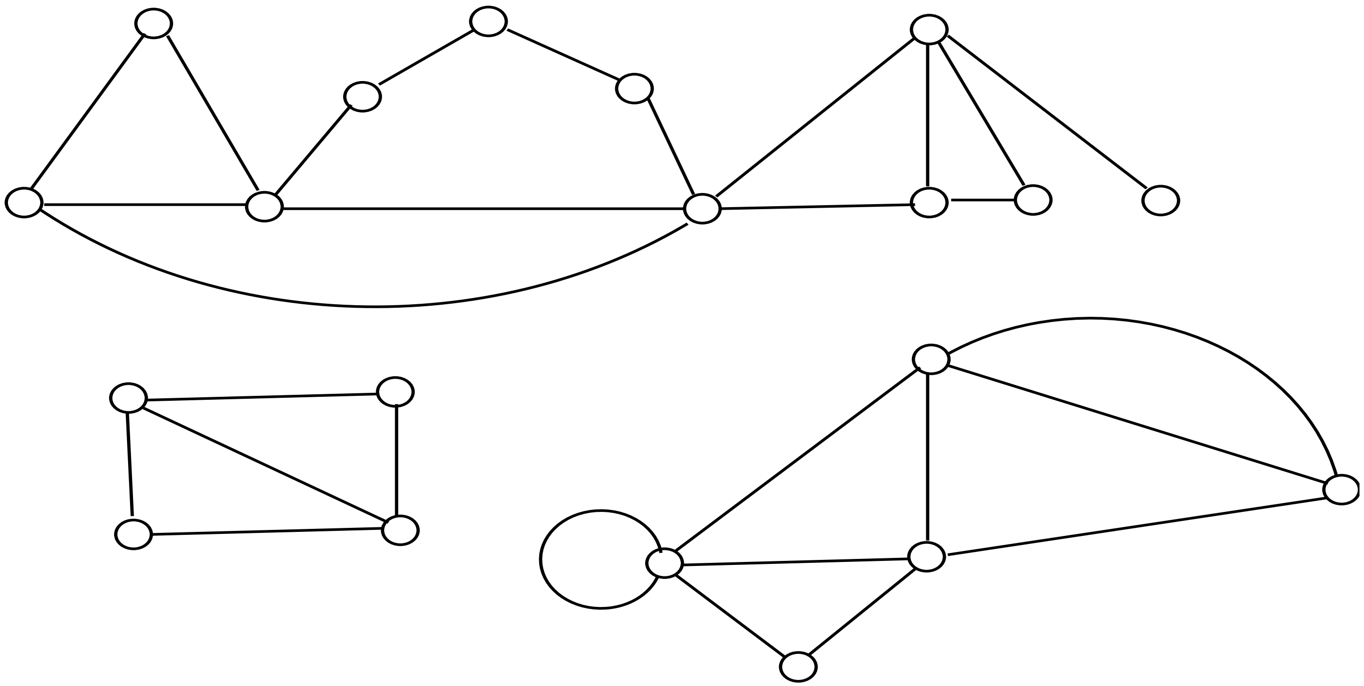
GRUNDBEGRIFFE DER GRAPHENTHEORIE

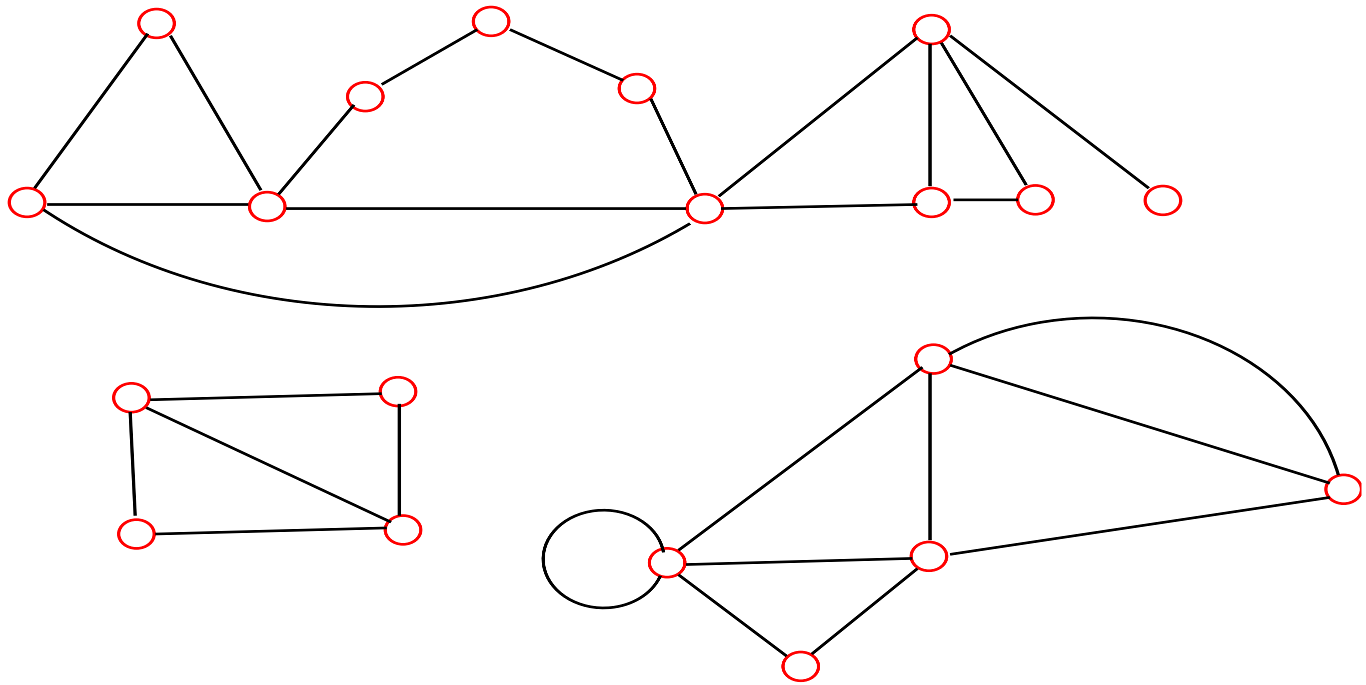
Grundbegriffe der Graphentheorie

Ungerichteter Graph



Grundbegriffe der Graphentheorie

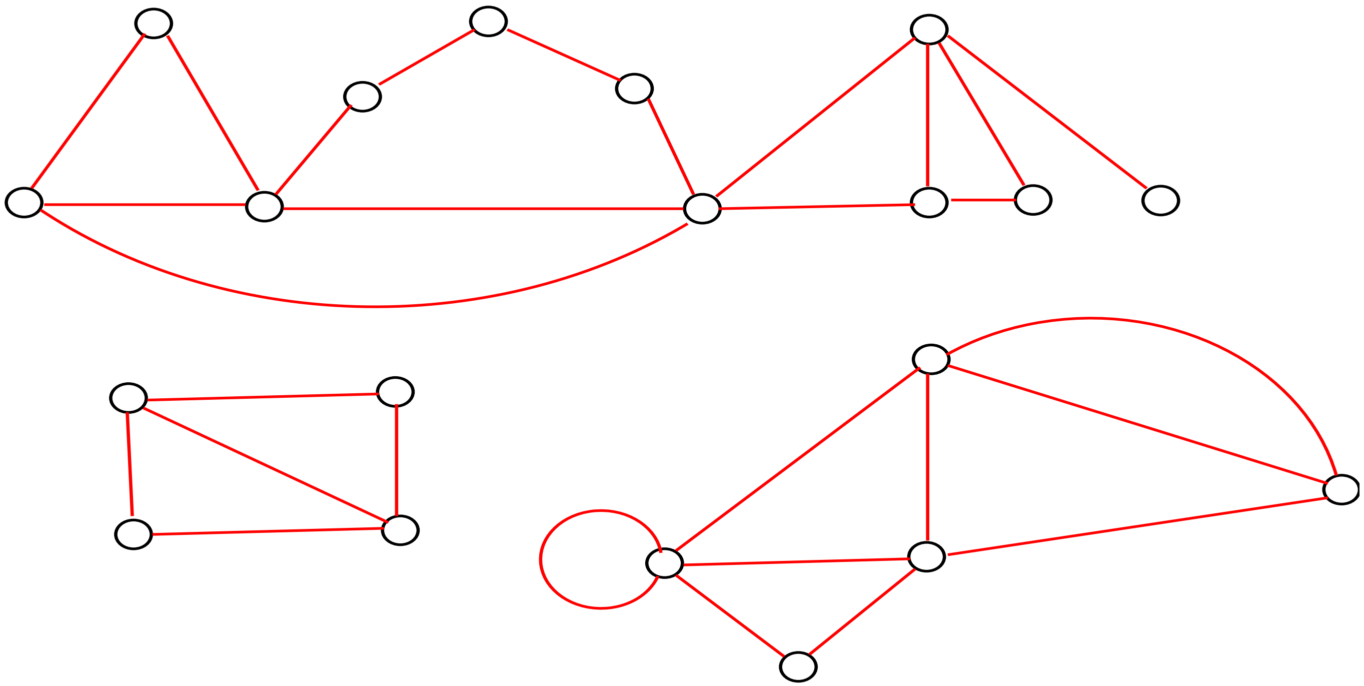
Die Knoten des Graphen



Knotenmenge V, Ordnung $\alpha_0 := |V|$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Kanten des Graphen

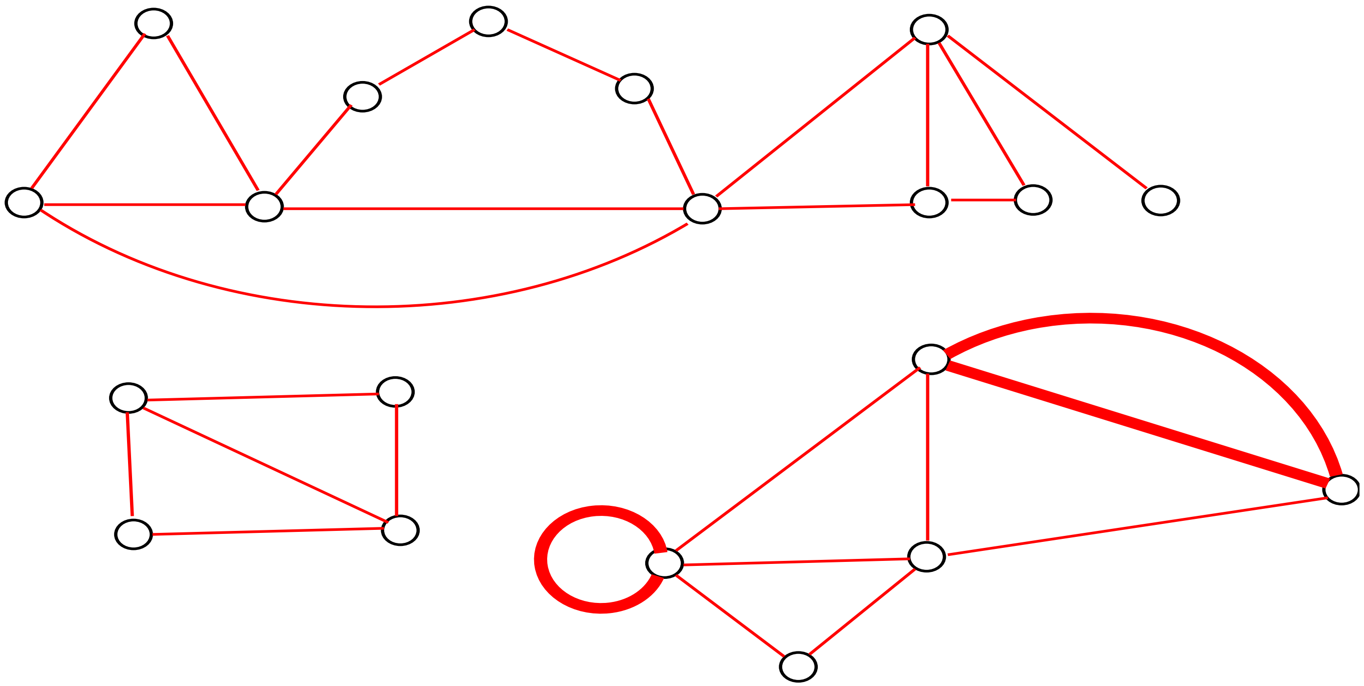


Kantenmenge (i. Allg. Multimenge) $E \subseteq V^{(2)}$, Größe $\alpha_1 := |E|$,
$\longrightarrow$ Graph $G = (V, E)$

Dichte $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$

Grundbegriffe der Graphentheorie

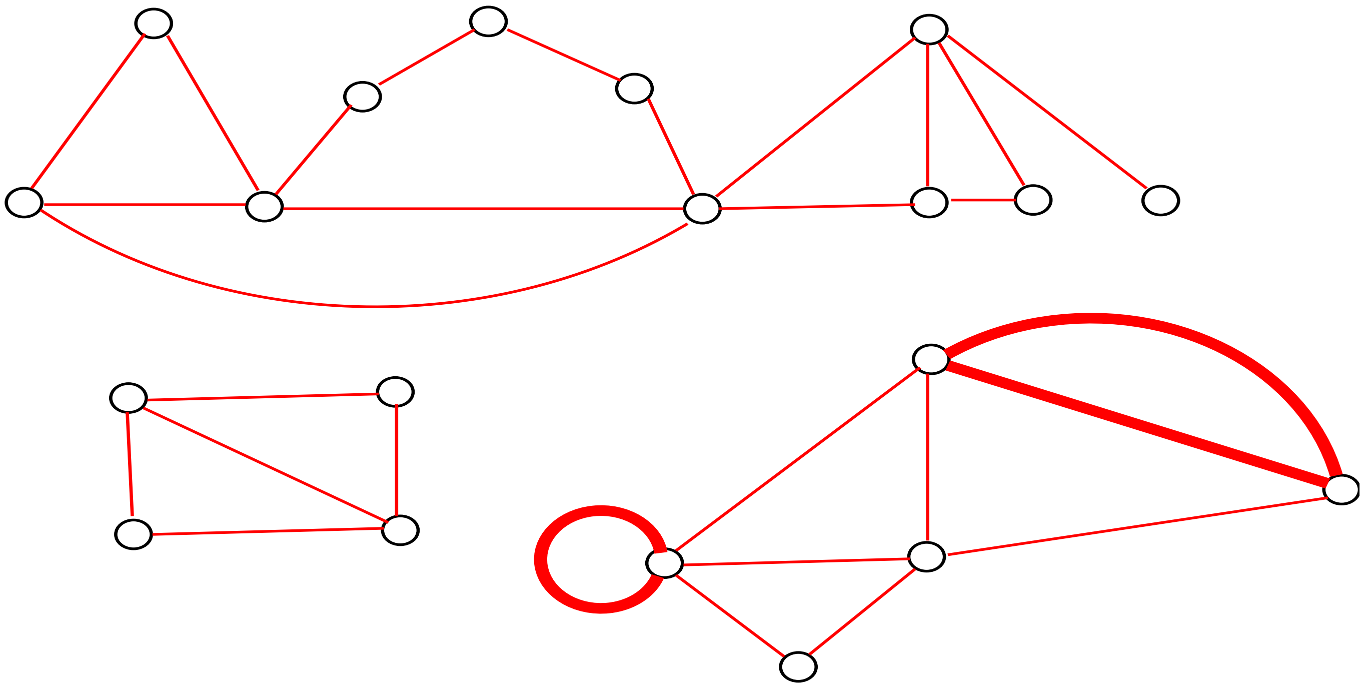
Spezielle Kanten: Schlingen und Mehrfachkanten



Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten heißen **schlichte** (einfache) Graphen

Grundbegriffe der Graphentheorie

Spezielle Kanten: Schlingen und Mehrfachkanten

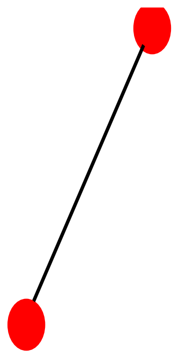


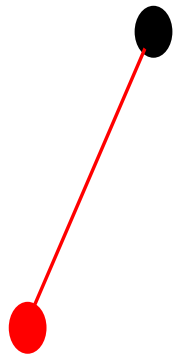
Graphen ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten heißen **schlichte** (einfache) Graphen

Gerichtete Graphen: $G = (V, E)$ mit $E \subseteq V \times V$.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Adjazenz und Inzidenz

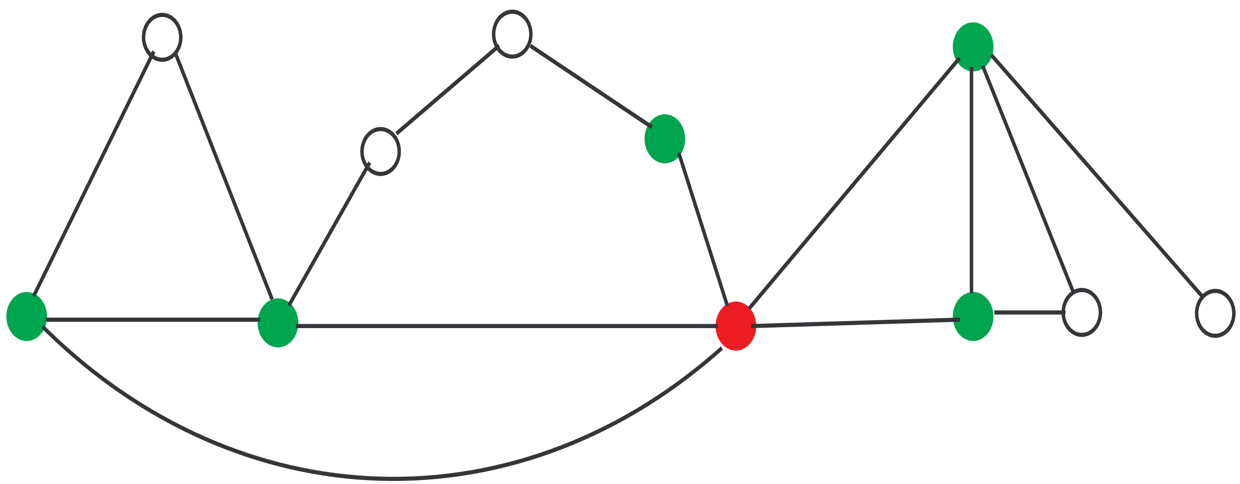




Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein Knoten v und die Menge seiner Nachbarn $\Gamma(v)$

$d(v) = d_G(v) = |\Gamma(v)| =$ der Grad von v

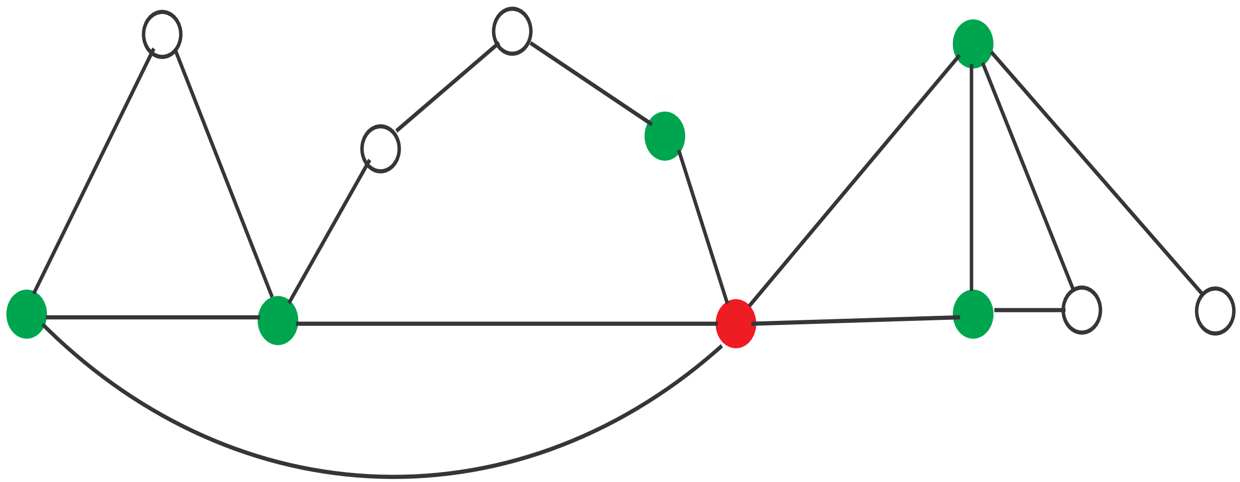


$\delta(G) = \text{min}_{v \in V}\, d(v)$, $\qquad \Delta(G) = \text{max}_{v \in V}\, d(v)$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein Knoten v und die Menge seiner Nachbarn $\Gamma(v)$

$d(v) = d_G(v) = |\Gamma(v)| =$ der Grad von v

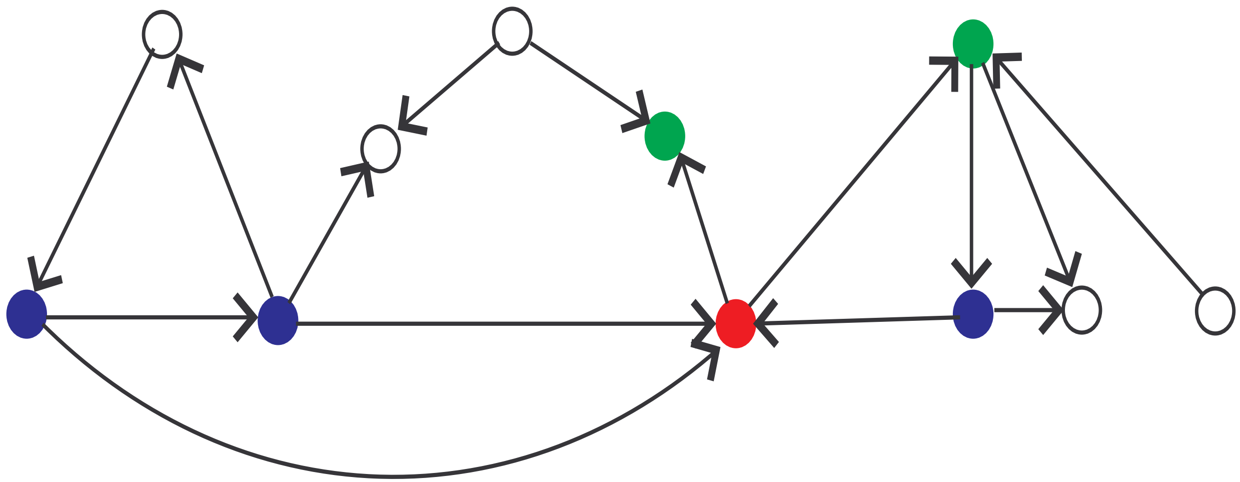


$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$, $\quad\quad \Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$

Ein Graph heißt k-regulär, wenn alle Knoten v Grad k haben.

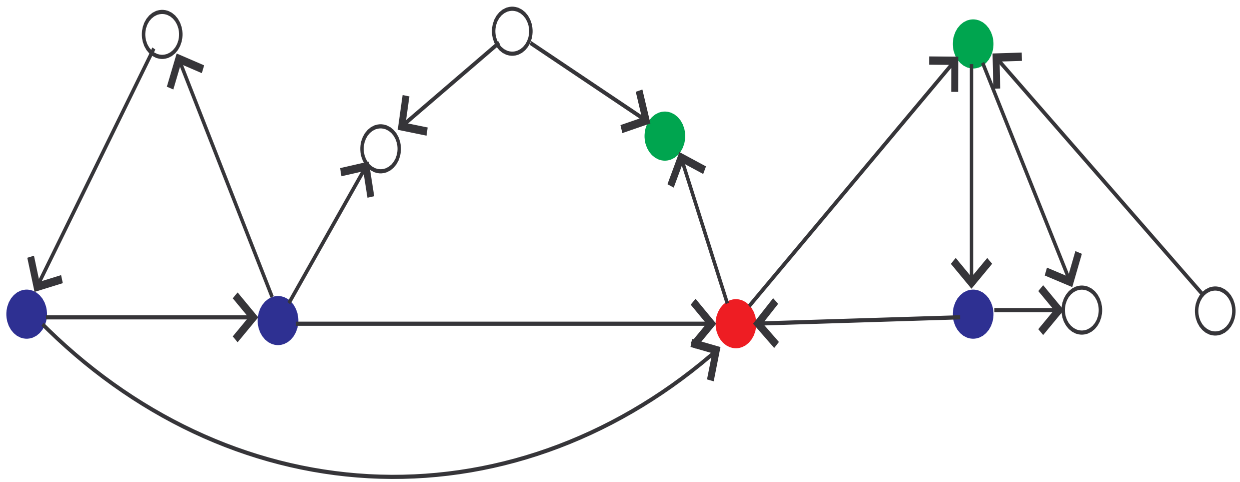
Grundbegriffe der Graphentheorie

Gerichteter Fall: Nachfolger $\Gamma^+(v)$ und Vorgänger $\Gamma^-(v)$
$d^+(v) = |\Gamma^+(v)|$ bzw. $d^-(v) = |\Gamma^-(v)|$: Weggrad bzw. Hingrad von v



Grundbegriffe der Graphentheorie

Gerichteter Fall: Nachfolger $\Gamma^{+}(v)$ und Vorgänger $\Gamma^{-}(v)$
$d^{+}(v) = |\Gamma^{+}(v)|$ bzw. $d^{-}(v) = |\Gamma^{-}(v)|$: Weggrad bzw. Hingrad von v



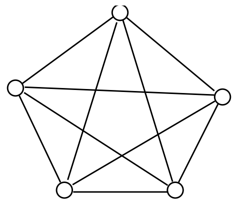
Satz

$$\sum_{x \in V(G)} d(x) = 2|E(G)| \textit{ bzw. } \sum_{x \in V(G)} d^{+}(x) = \sum_{x \in V(G)} d^{-}(x) = |E(G)|$$

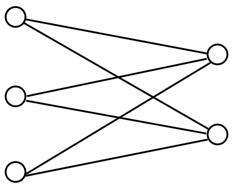
Grundbegriffe der Graphentheorie

Spezielle Graphen:

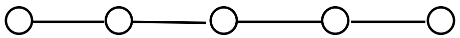
Der vollständige Graph der Ordnung n, K_n:

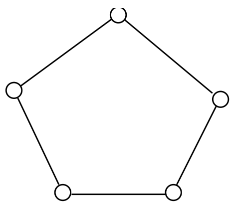


Der vollständige bipartite Graph der Ordnung (m, n), $K_{m,n}$:



Der Pfad der Länge k, P_k:





Der Kreis der Länge k, C_k:

Grundbegriffe der Graphentheorie

Isomorphie von Graphen:

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V'$ gibt, sodass $v, w \in V$ genau dann adjazent sind, wenn dies auch für $\varphi(v)$ und $\varphi(w)$ gilt.

Satz *Die Menge aller Automorphismen eines Graphen $G(V, E)$ bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die Automorphismengruppe von G, Aut(G).*

Grundbegriffe der Graphentheorie

Isomorphie von Graphen:

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V'$ gibt, sodass $v, w \in V$ genau dann adjazent sind, wenn dies auch für $\varphi(v)$ und $\varphi(w)$ gilt.

Satz *Die Menge aller Automorphismen eines Graphen $G(V, E)$ bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die Automorphismengruppe von G, Aut(G).*

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Graphen. Dann definiert man: $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Isomorphie von Graphen:

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (V', E')$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to V'$ gibt, sodass $v, w \in V$ genau dann adjazent sind, wenn dies auch für $\varphi(v)$ und $\varphi(w)$ gilt.

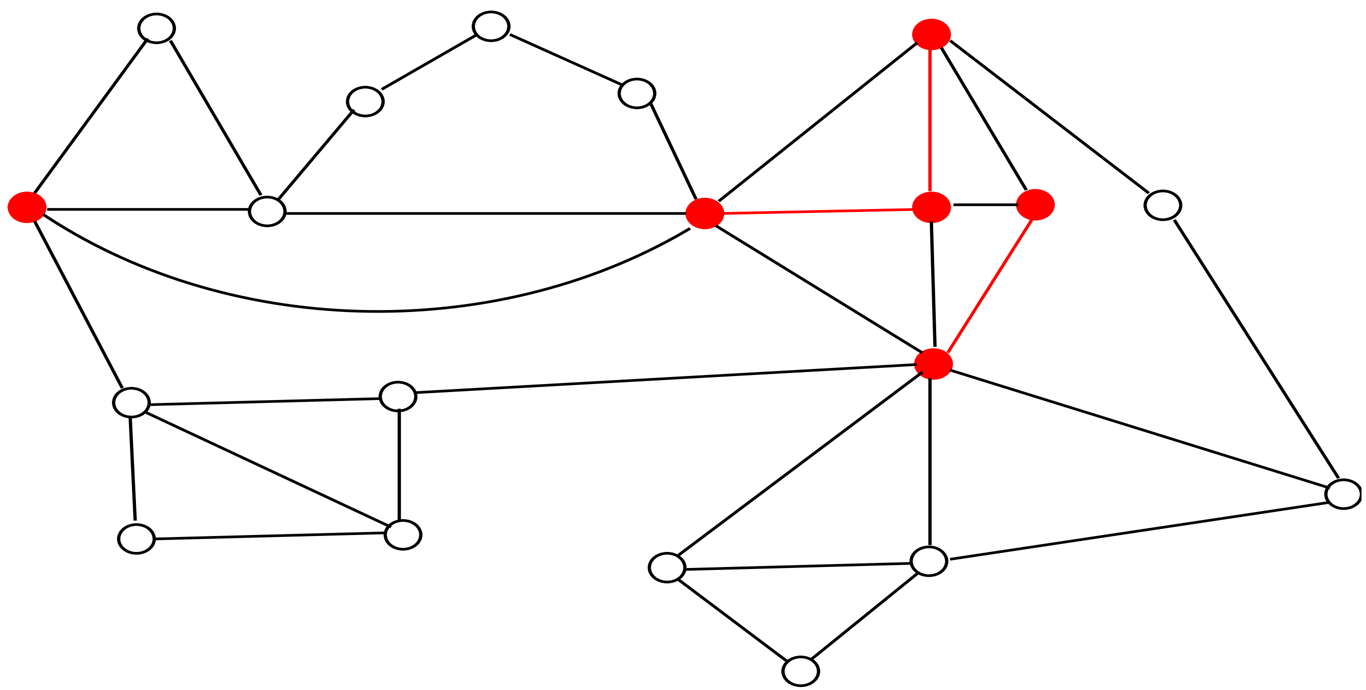
Satz *Die Menge aller Automorphismen eines Graphen $G(V, E)$ bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe, die Automorphismengruppe von G, Aut(G).*

Seien $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei Graphen. Dann definiert man: $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist der zu G komplementäre Graph definiert durch $G^\kappa := (V, \{xy \mid x, y \in V,\ x \neq y,\ xy \notin E\})$.

Grundbegriffe der Graphentheorie

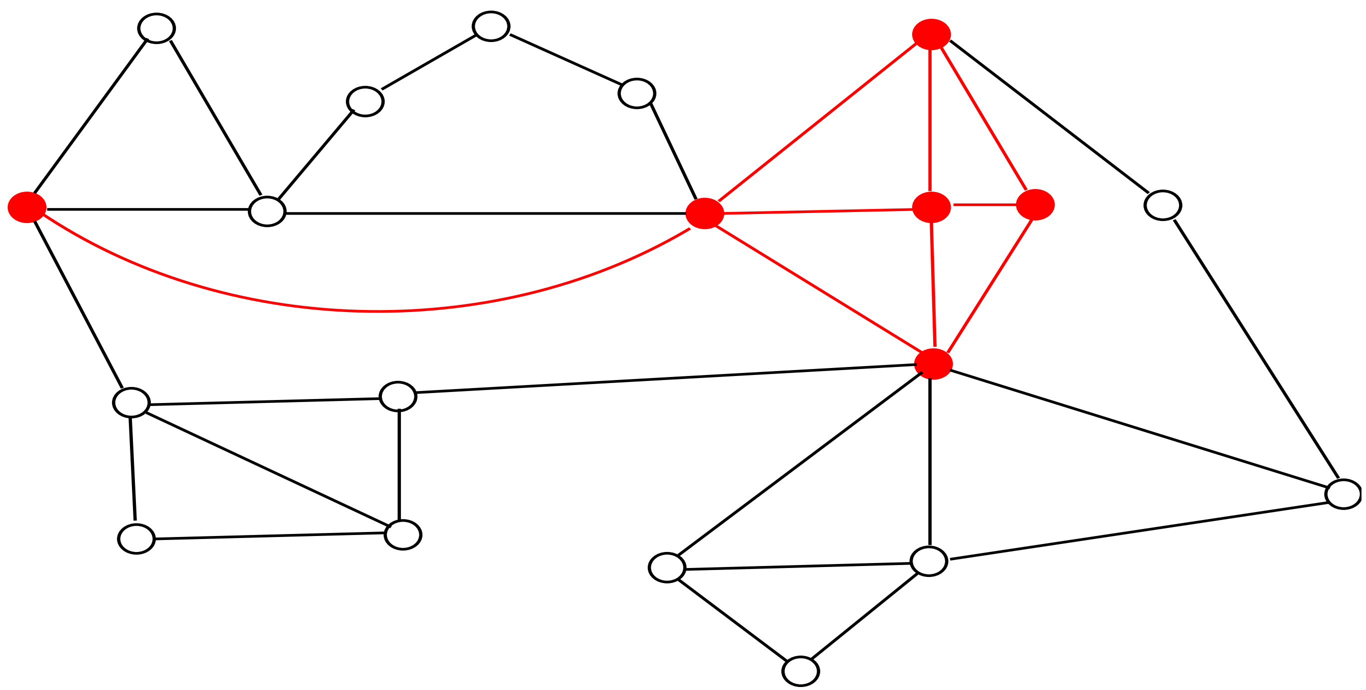
Ein Graph G und einer seiner Teilgraphen, G'



$$G' = (V', E'), \qquad V' \subseteq V, \quad E' \subseteq E$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Induzierte Teilgraphen von $G = (V, E)$: $G[V_0]$ durch ihre Knotenmenge $V_0 \subseteq V$ bestimmt



Kantenmenge maximal bzgl. der Inklusion

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Jeder Graph mit mindestens einer Kante besitzt einen Teilgraphen mit* $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Jeder Graph mit mindestens einer Kante besitzt einen Teilgraphen mit $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.*

Beweis: Sukzessive Knoten geringen Grades entfernen.

Entfernen eines Knotens v mit $d(v) \leq \varepsilon(G)$ bewirkt die Entfernung von höchstens $\varepsilon(G)$ Kanten, daher gilt für solche Knoten $\varepsilon(G \setminus \{v\}) \geq \varepsilon(G)$.

Vorgangsweise konstruiert eine Folge

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots$$

Fortsetzen, solange G_i Knoten v_i mit $d_{G_i}(v_i) \geq \varepsilon(G_i)$ besitzt, also $G_{i+1} := G_i \setminus \{v_i\}$, andernfalls $H := G_i$.

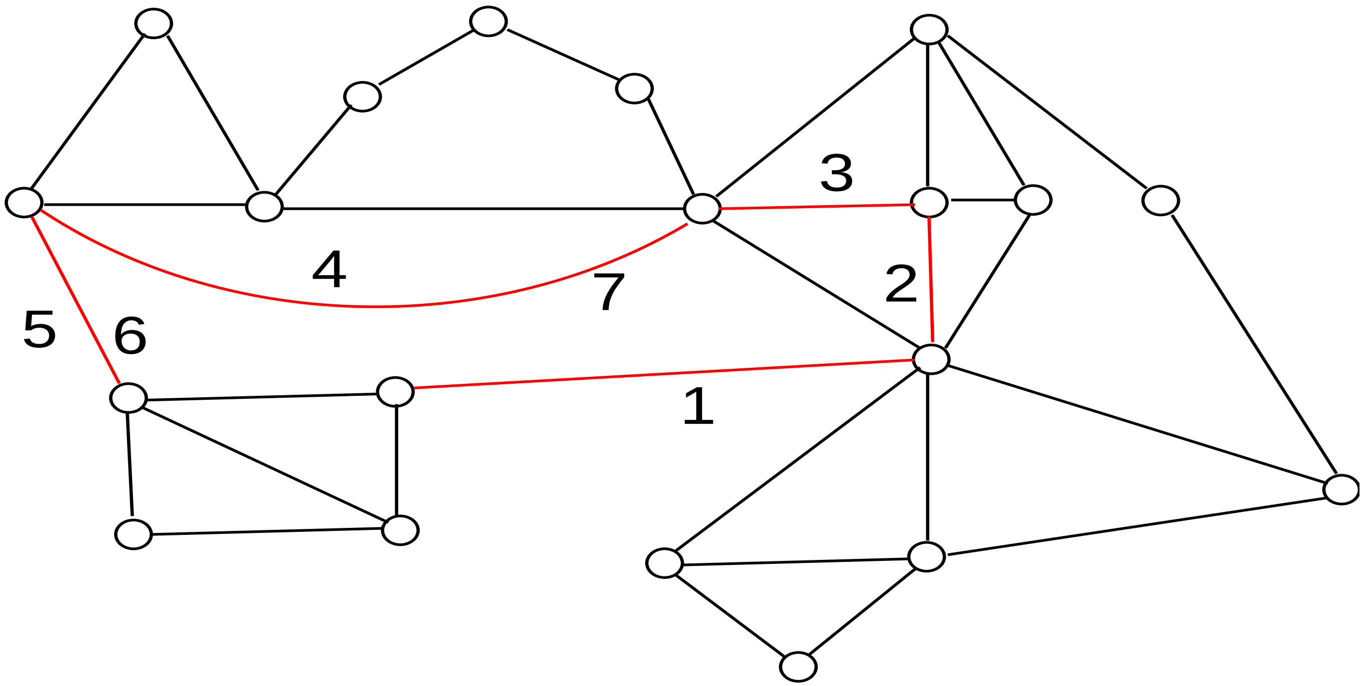
Daraus folgt $\varepsilon(G_{j+1}) \geq \varepsilon(G_j)$, insbesondere $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.

Wegen $\varepsilon(K_1) = 0 < \varepsilon(G)$ gilt $G_i \neq K_1$, daher $H \neq \emptyset$.

Da H keine Knoten v mit $d(v) \leq \varepsilon(H)$ besitzt, folgt $\delta(H) > \varepsilon(H)$.

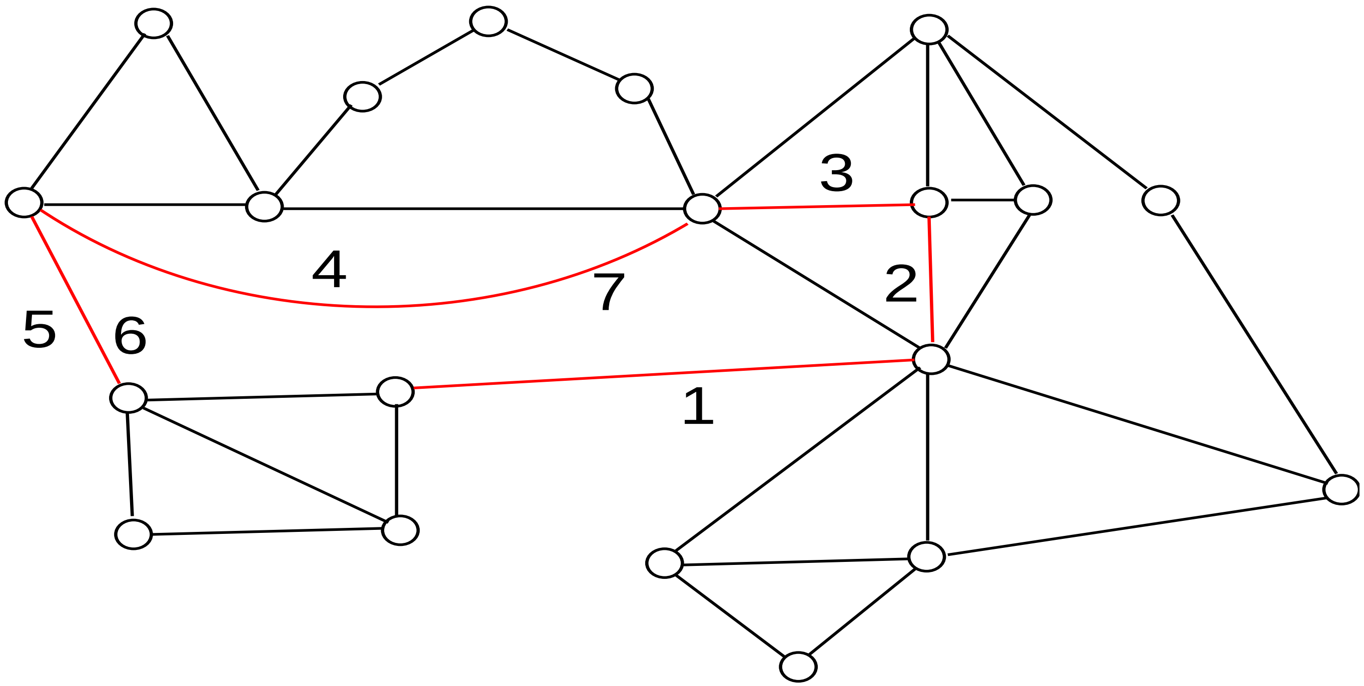
Grundbegriffe der Graphentheorie

Kantenfolgen



Grundbegriffe der Graphentheorie

Kantenfolgen



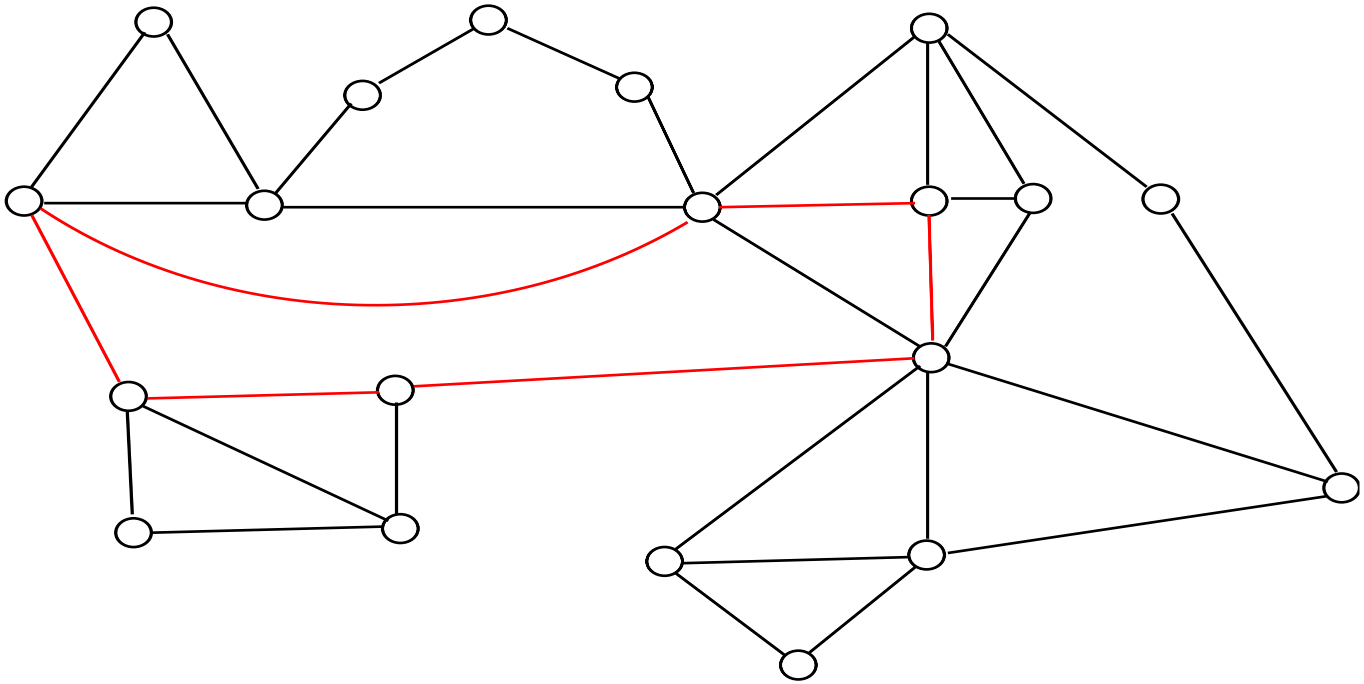
Kantenzug: Kantenfolge, in der keine Kante mehrfach auftritt

Weg: Kantenfolge, in der kein Knoten mehrfach auftritt

Grundbegriffe der Graphentheorie

Spezielle Kantenfolgen: Kreis (in gerichteten Graphen: Zyklus)

. . . ist ein Kantenzug, in dem alle Knoten mit Ausnahme von Anfangs- und Endknoten verschieden sind.



Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Falls eine Kantenfolge von* v *nach* w *existiert, so gibt es auch einen Weg von* v *nach* w*.*

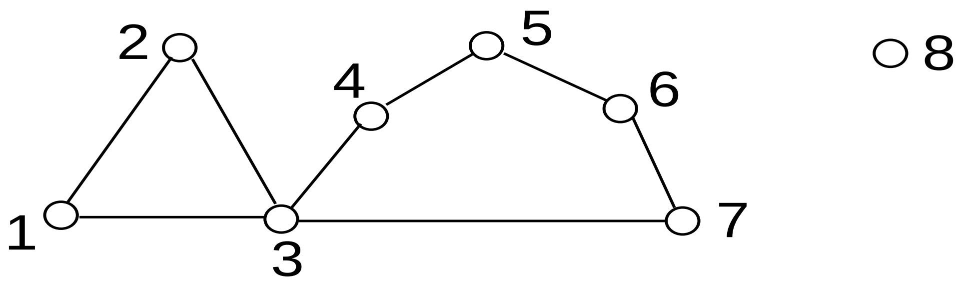
Satz *Falls in einem ungerichteten Graphen 2 verschiedene Wege von* v *nach* w *existieren, dann gibt es einen Kreis (positiver Länge).*

Falls in einem gerichteten Graphen eine geschlossene Kantenfolge positiver Länge existiert, dann gibt es einen Zyklus (positiver Länge).

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$:

$V = \{v_1 \ldots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

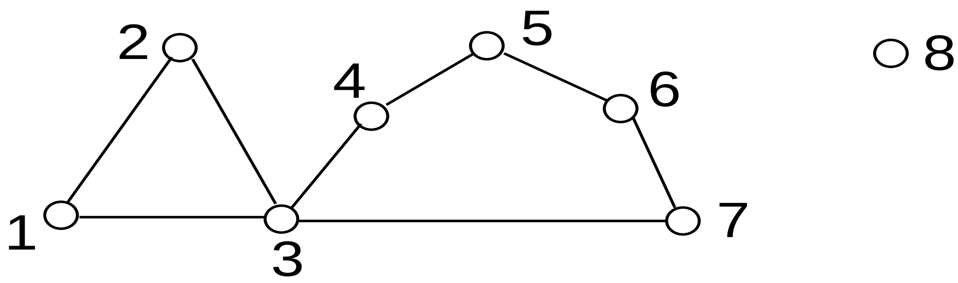


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$:

$V = \{v_1 \dots, v_n\}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Inzidenzmatrix von $G = (V, E)$:

$V = \{v_1 \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

$$B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert.} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Inzidenzmatrix von $G = (V, E)$:

$V = \{v_1 \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

$$B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gradmatrix ist von $G = (V, E)$:

$$D = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \text{ mit } d_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Inzidenzmatrix von $G = (V, E)$:

$V = \{v_1 \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

$$B = (b_{ij})_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } v_i \text{ mit } e_j \text{ inzidiert,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gradmatrix ist von $G = (V, E)$:

$$D = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \text{ mit } d_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt: $B \cdot B^T = A + D$.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Sei A Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$ und $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$. Dann ist $a_{i,j}^{(k)}$ gleich der Anzahl aller Kantenfolgen der Länge k von v_i nach v_j.*

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Sei A Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$ und $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$. Dann ist $a_{i,j}^{(k)}$ gleich der Anzahl aller Kantenfolgen der Länge k von v_i nach v_j.*

Beweis: Induktion nach k.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Sei* A *Adjazenzmatrix von* $G = (V, E)$ *und* $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$*. Dann ist* $a_{i,j}^{(k)}$ *gleich der Anzahl aller Kantenfolgen der Länge* k *von* v_i *nach* v_j*.*

Beweis: Induktion nach k.

Anfang ($k = 1$): $A^1 = A$ ✓

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Sei A Adjazenzmatrix von $G = (V, E)$ und $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$. Dann ist $a_{i,j}^{(k)}$ gleich der Anzahl aller Kantenfolgen der Länge k von v_i nach v_j.*

Beweis: Induktion nach k.

Anfang ($k = 1$): $A^1 = A$ ✓

Betrachten Sie nun eine Kantenfolge, die von v_i in einem Schritt nach v_ℓ geht und dann in k Schritten nach v_j. Die Anzahl solcher Folgen ist nach Induktionsvoraussetzung

$$a_{i,\ell} a_{\ell,j}^{(k)}.$$

Daraus folgt, dass die Anzahl der Folgen der Länge $k + 1$ von v_i nach v_j gegeben ist durch

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} a_{\ell,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k+1)}.$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Erreichbarkeitsrelation (ungerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w existiert.

Erreichbarkeitsrelation (gerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn sowohl eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w als auch eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von w nach v existiert.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Erreichbarkeitsrelation (ungerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w existiert.

Erreichbarkeitsrelation (gerichteter Fall): $v \sim w$ genau dann, wenn sowohl eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von v nach w als auch eine (möglicherweise leere) Kantenfolge von w nach v existiert.

Matrix der Erreichbarkeitsrelation (ungerichteter Fall): Sei $|V| = n$ und $|E| = m$.

$$M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, \text{ wobei } m_{i,j} = \mathrm{sgn}(c_{i,j})$$

und

$$C = \sum_{k=0}^{\min(m,n-1)} A^k.$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Jeder Graph* $G = (V, E)$ *enthält einen Weg der Länge* $\delta(G)$*. Falls* $\delta(G) \geq 2$*, dann gibt es einen Kreis, dessen Länge mindestens* $\delta(G) + 1$ *beträgt.*

Beweis: Sie $x_0, x_1, \ldots, x_k$ ein längster Weg. Dann sind alle $v \in \Gamma(x_k)$ auf diesem Weg. Daher gilt $k \geq d(x_k) \geq \delta(G)$.

Falls $\delta(G) \geq 2$, dann gibt es ein $i < k-1$ so, dass $x_i x_k \in E$. Sei i minimal mit dieser Eigenschaft. Daraus folgt, dass $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k, x_i$ ein Kreis der Länge mindestens $\delta(G) + 1$ ist.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Unter der Taillenweite $g(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ versteht man die Länge eines seiner kürzesten Kreise. Für kreisfreie Graphen setzt man $g(G) = \infty$.

Der Abstand $d_G(x, y)$ zwischen zwei Knoten x und y ist die Länge eines kürzesten Weges, der x und y verbindet.

Der Durchmesser von G ist definiert durch $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in V} d_G(x, y)$.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Unter der Taillenweite $g(G)$ eines Graphen $G = (V, E)$ versteht man die Länge eines seiner kürzesten Kreise. Für kreisfreie Graphen setzt man $g(G) = \infty$.

Der Abstand $d_G(x, y)$ zwischen zwei Knoten x und y ist die Länge eines kürzesten Weges, der x und y verbindet.

Der Durchmesser von G ist definiert durch $\text{diam}(G) = \max_{x,y \in V} d_G(x, y)$.

Satz *Der Graph $G = (V, E)$ enthalte einen Kreis. Dann gilt: $g(G) \leq 2\text{diam}(G) + 1$.*

Beweis: Sei C ein kürzester Kreis und $g(G) > 2\text{diam}(G) + 1$. Dann gibt es $x, y \in C$ mit $d_C(x, y) \geq \text{diam}(G) + 1$. Andererseits gilt dann $d_G(x, y) \leq \text{diam}(G) < d_C(x, y)$ (*).

Sei nun P ein kürzester Weg, der x mit y verbindet, und P' ein kürzester Weg in C, der x mit y verbindet. Wegen (*) ist dann $P \cup P'$ ein kürzerer Kreis als C (Widerspruch!).

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Falls der Graph $G = (V, E)$ azyklisch ist, so besitzt er einen Knoten v mit $d^+(v) = 0$*

Beweis: Der letzte Knoten eines längsten gerichteten Weges kann keine Nachfolger besitzen.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Satz *Falls der Graph* $G = (V, E)$ *azyklisch ist, so besitzt er einen Knoten* v *mit* $d^+(v) = 0$

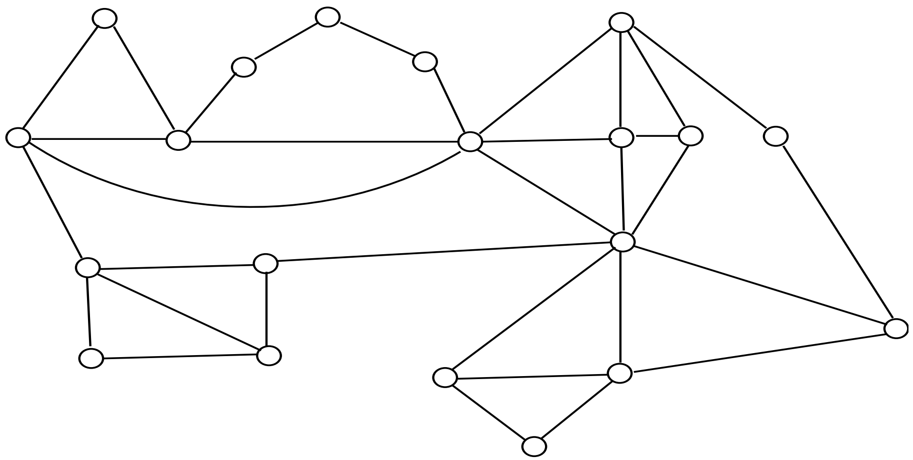
Beweis: Der letzte Knoten eines längsten gerichteten Weges kann keine Nachfolger besitzen.

Algorithmus zum Feststellen von Azyklizität:

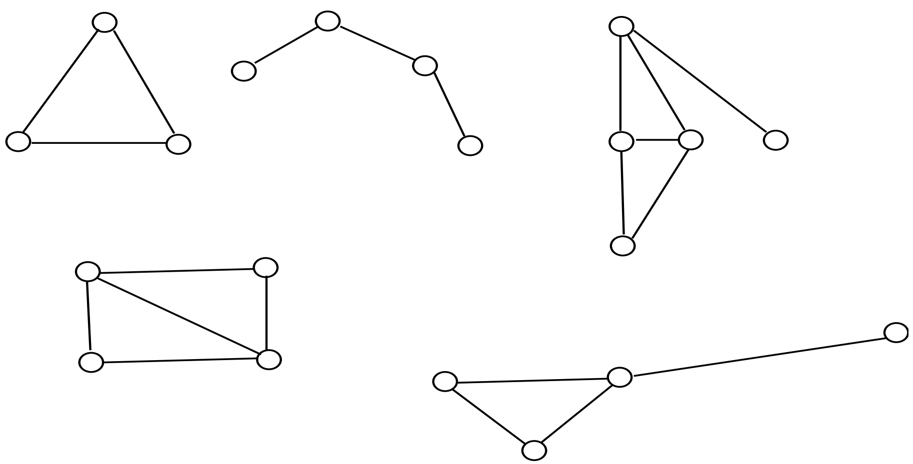
1. Markiere alle Knoten v mit $d^+(v) = 0$.
2. Falls keine Knoten markiet wurden, ist G nicht azyklisch.
3. Falls alle Knoten markiert wurden, so ist G azyklisch.
4. Entferne die markierten Knoten ($\rightsquigarrow G'$) und wende 1. auf G' an.

Grundbegriffe der Graphentheorie

zusammenhängender Graph

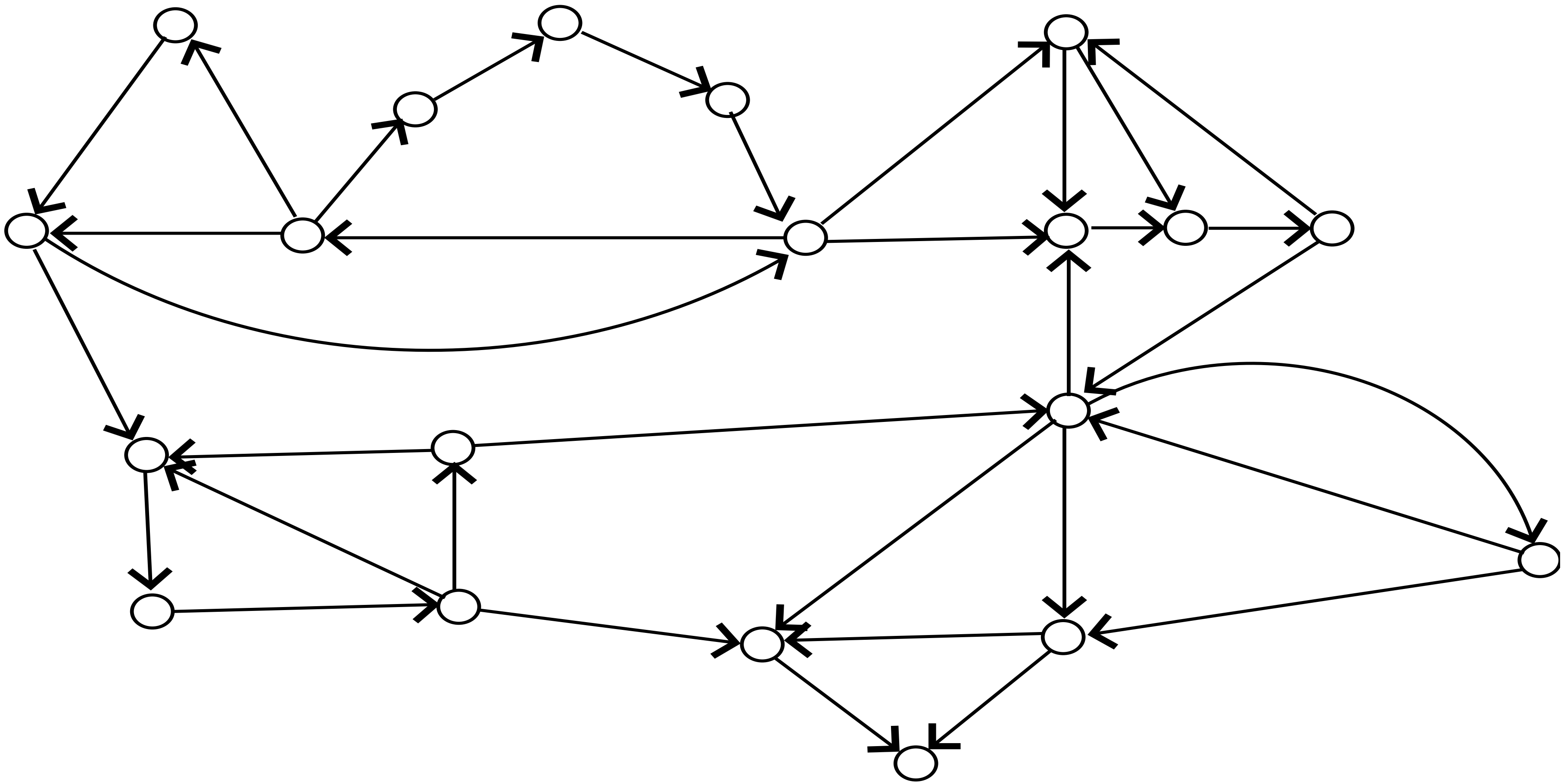


nicht zusammenhängender Graph



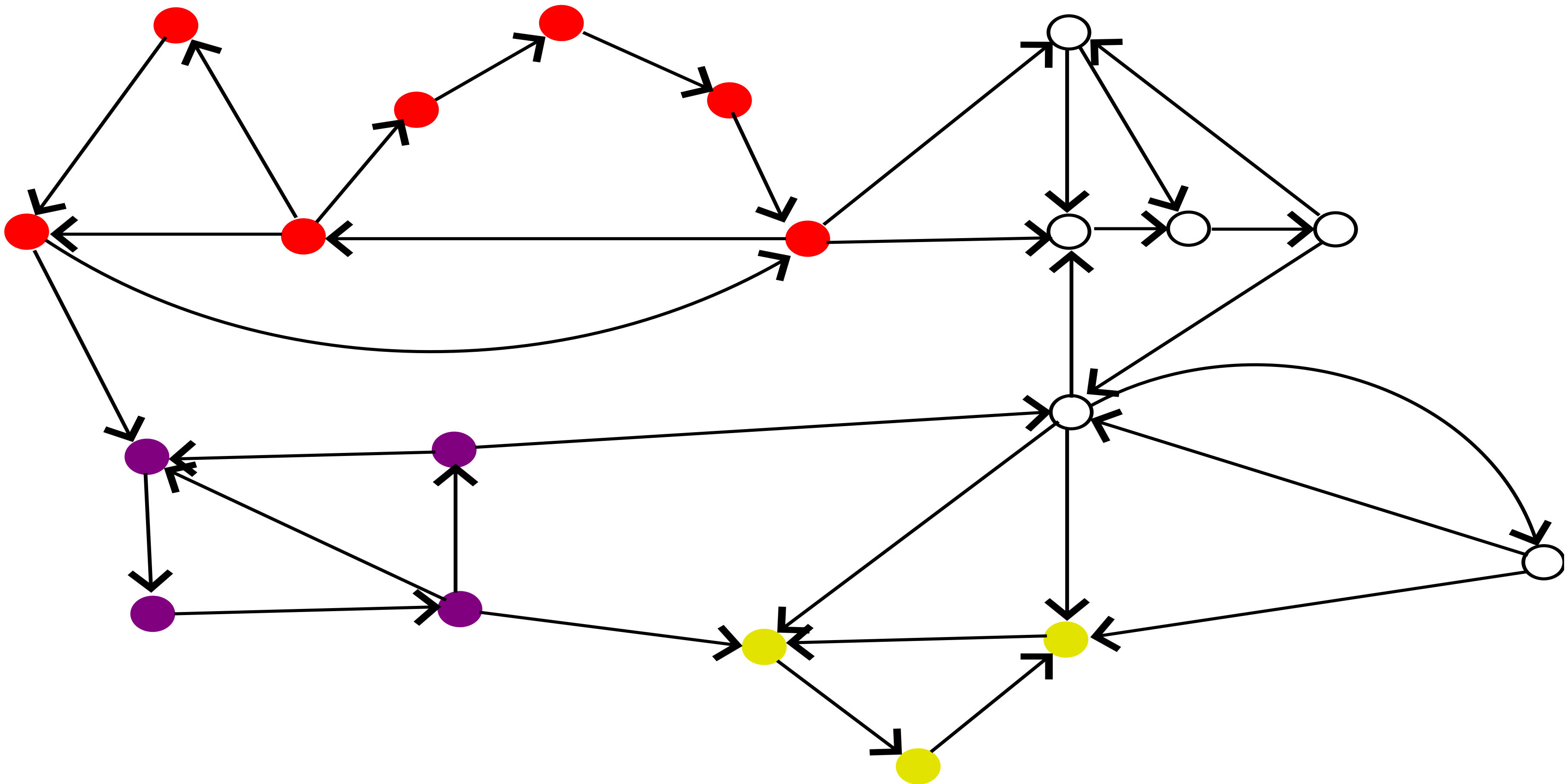
Grundbegriffe der Graphentheorie

Ein schwach, aber nicht stark zusammenhängender Graph



Grundbegriffe der Graphentheorie

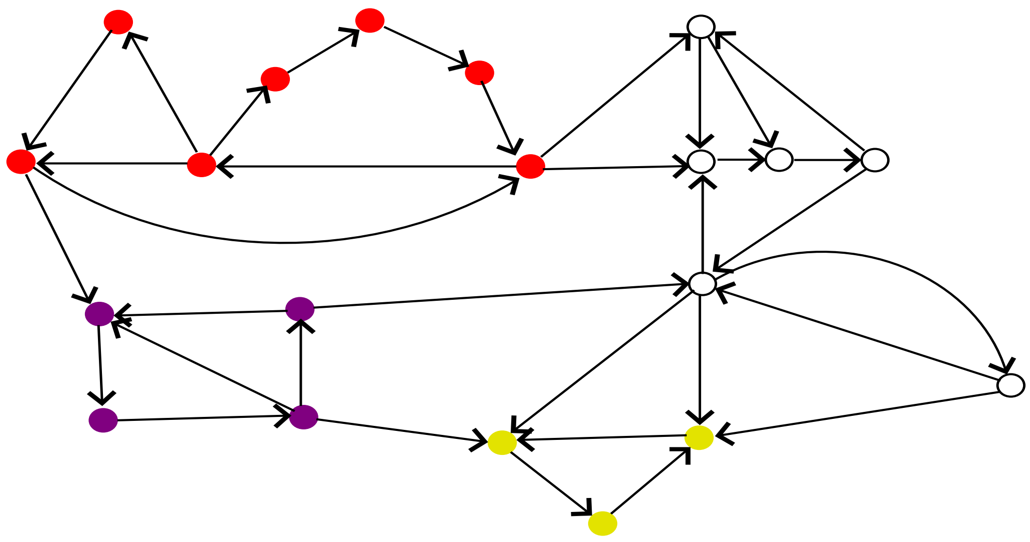
Die starken Zusammenhangskomponenten

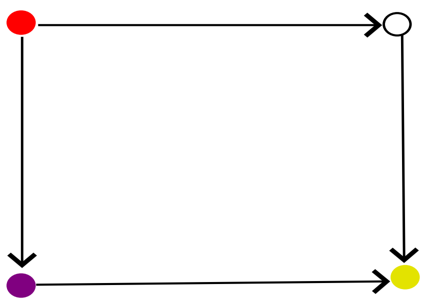


Grundbegriffe der Graphentheorie

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit den starken Zusammenhangskomponenten $K_1, \ldots, K_\ell \subseteq V$. Unter der Reduktion von G versteht man den Graphen $G_R = (V_R, E_R)$ mit $V_R = \{K_1, \ldots, K_\ell\}$ und

$$E_R = \{(K_i, K_j) \mid i \neq j \text{ und } \exists x \in K_i \, \exists y \in K_j : \ (x, y) \in E\}.$$





Satz *Die Reduktion eines gerichteten Graphen ist azyklisch.*

Grundbegriffe der Graphentheorie

Unter einer Knotenbasis von G versteht man eine Menge $B \subseteq V$ mit

1. Für alle $v \in V$ gibt es ein $b \in B$ so, dass ein Weg von b nach v exisitiert.

2. B ist minimal bzgl der Inklusion.

Satz *Ist $G = (V, E)$ azyklisch, so ist $B = \{v \in V \mid d^-(v) = 0\}$ die einzige Knotenbasis.*

Satz *Sei $G = (V, E)$ gerichtet und seien $K_1, \ldots, K_\ell$ jene starken Zusammenhangskomponenten, welche $d^-_{G_R}(K_i) = 0$ erfüllen. Dann sind die Knotenbasen von G genau die Mengen der Form $B = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ mit $v_i \in K_i$ für $i = 1, \ldots, \ell$.*

Grundbegriffe der Graphentheorie

Weitere Zusammenhangsbegriffe

Def. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $A, B \subseteq V$. Eine Menge $X \subseteq V \cup E$ trennt A und B, wenn jeder Weg $x, v_1, \ldots, v_k, y$ mit $x \in A$, $y \in B$ und $v_i \notin A \cup B$ für $i = 1, \ldots, k$ einen Knoten oder eine Kante aus X enthält.*

X trennt G, wenn es $v, w \in V \setminus X$ so gibt, dass X $\{v\}$ und $\{w\}$ trennt.

$v \in V$ heißt Artikulation, wenn $\{v\}$ G trennt.
$e \in E$ heißt Brücke, wenn $\{e\}$ G trennt.

Grundbegriffe der Graphentheorie

Def. $G = (V, E)$ *heißt* k*-zusammenhängend, wenn* $|V| > k$ *und* $G \setminus X$ *für alle* $X \subseteq V$ *mit* $|X| < k$ *zusammenhängend ist.*

Der Zusammenhang von G *ist definiert als*

$$\kappa(G) = \max\{k \mid G \text{ ist } k\text{-zusammenhängend}\}.$$

Falls $|V| \geq 2$*, dann heißt* G ℓ*-kantenzusammenhängend, wenn* $G \setminus F$ *für alle* $F \subseteq E$ *mit* $|F| < \ell$ *zusammenhängend ist.*

Der Kantenzusammenhang von G *ist definiert als*

$$\lambda(G) = \max\{\ell \mid G \text{ ist } \ell\text{-kantenzusammenhängend}\}.$$

Grundbegriffe der Graphentheorie

- Jeder Graph mit mindestens einem Knoten ist 0-zusammenhängend.

- Ein Graph ist genau dann 1-zusammenhängend, wenn er mindestens zwei Knoten besitzt und zusammenhängend ist.

- $\kappa(G) = 0$ genau dann, wenn $G = K_1$ oder G nicht zusammenhängend.

- $\kappa(K_n) = n - 1$

- $\lambda(G) = 0$ genau dann, wenn G nicht zusammenhängend.