

Komplexe Analysis

SS 2010

Gabriel Maresch

gabriel.maresch@tuwien.ac.at

Inhaltsverzeichnis

0	Die Komplexe Exponentialfunktion	1
1	Die Komplexen Zahlen	3
1.1	Historisches	3
1.2	Algebraische Struktur	5
1.3	Lineare Stuktur	6
1.4	Topologische Struktur	7
1.5	Geometrische Deutung	8
1.6	Möbius-Transformationen	10
2	Komplexe Differentialrechnung	14
2.1	Holomorphe Funktionen	14
2.2	Konforme Abbildungen	16
2.3	Harmonische Funktionen	18
2.4	Potenzreihen	26
3	Komplexe Integralrechnung	30
3.1	Pfadintegrale	30
3.2	Stammfunktionen	32
3.3	Cauchy'scher Integralsatz	37
3.4	Homotopie	43
3.4.1	Fundamentalgruppen	43
3.4.2	Überlagerungen	45
3.5	Homologie	50
3.5.1	Windungszahlen	50
3.5.2	Homologiegruppen	53
3.5.3	Globaler Cauchy'scher Integralsatz	59

4	Ganze und meromorphe Funktionen	63
4.1	Singularitäten und Laurent-Reihen	63
4.2	Residuenkalkül	67
4.3	Meromorphe Funktionen	68
4.4	Funktionen mit endlicher Ordnung	72
5	Riemann'scher Abbildungssatz	79
5.1	Algebren holomorpher Funktionen	79
5.2	Biholomorph äquivalente Gebiete in \mathbb{C}	82
5.3	Automorphismen	84

Literatur

- [1] C. Berenstein und R. Gay, *Complex Variables*, Graduate Texts in Mathematics 125, Springer, 1991.
- [2] J. Conway, *Functions Of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics 11, Springer, 1978.
- [3] K. Jänich, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch, Springer, 1999.
- [4] S. Krantz, *A Guide To Complex Variables*, The Dolciani Mathematical Expositions 32, MAA Guides 1, Mathematical Association of America, 2008.
- [5] S. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, AMS Chelsea Publishing, 2001.
- [6] S. Lang, *Complex Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 103, Springer, 1999.
- [7] R. Remmert und G. Schumacher, *Funktionentheorie 1*, Grundwissen Mathematik, Springer, 2001.
- [8] W. Rudin, *Reelle und Komplexe Analysis*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1999.

0 Die Komplexe Exponentialfunktion

Wir folgen der Darstellung aus [8]. Wir nehmen an dieser Stelle die Definition der komplexen Zahlen $z = a + ib$ vorweg und verweisen auf die folgenden Kapitel.

Definition 1. Die Funktion $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt Exponentialfunktion.

Die Exponentialfunktion ist für alle komplexen Zahlen wohldefiniert.

Unmittelbar aus der Reihendarstellung sieht man, $e^0 = 1$ und dass \exp mit seiner Ableitung \exp' übereinstimmt. Durch Ausmultiplizieren des Cauchyprodukts sieht man die wichtige Identität

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \quad (0.1)$$

Daher ist $e^{-z} = (e^z)^{-1}$ stets von 0 verschieden.

Die Einschränkung von \exp auf die reelle Achse bildet diese bekanntlich in bijektiver Weise auf $(0, \infty)$ ab. Die Einschränkung von \exp auf die imaginäre Achse hingegen bildet diese in den Einheitskreis ab:

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^{it} e^{-it} = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.2)$$

Wir definieren

$$\cos t := \operatorname{Re} e^{it}, \quad \sin t := \operatorname{Im} e^{it}. \quad (0.3)$$

Differentiation von (0.3) liefert wegen $(e^{it})' = ie^{it}$ sofort

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t. \quad (0.4)$$

Die Potenzreihendarstellung

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \quad (0.5)$$

folgt durch Bilden des Realteils unmittelbar aus der der Exponentialfunktion. Wir erhalten $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < -\frac{1}{3}$. Somit besitzt \cos aus Stetigkeitsgründen eine kleinste positive Nullstelle, die wir mit $\pi/2$ bezeichnen wollen. Aufgrund der zu (0.3) äquivalenten Euler'schen Gleichung

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (0.6)$$

folgt daraus $e^{i\frac{\pi}{2}} \in \{-i, i\}$, d.h. $e^{2\pi i} = (\pm i)^4 = 1$. Es ist also \exp eine $2\pi i$ -periodische Funktion, denn

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z. \quad (0.7)$$

Für den (elementaren) Beweis, dass jede andere Periode von \exp ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist, sei auf [8] verwiesen.

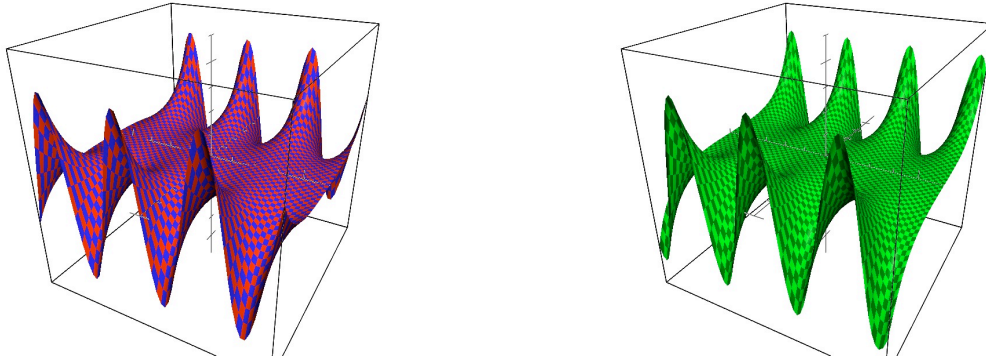


Abbildung 1: Real- und Imaginärteil von $\sin z$

Nun wollen wir noch zeigen, dass wir für jedes w mit $|w| = 1$ ein reelles t angeben können, sodass $w = e^{it}$. Für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $(\sin t)' = \cos t > 0$. Wegen $\sin(0) = 0$, ist $\sin t$ dort also positiv. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $w = a + ib$ mit $a, b \geq 0$ (die anderen Fälle verlaufen analog). Da $0 \leq a \leq 1$ gibt es genau ein $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $a = \cos t$. Dann ist aber $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - a^2 = b^2$ und es ist $b = \sin t$. Somit bildet e^{it} das Intervall $[0, 2\pi)$ stetig und bijektiv (nicht aber homöomorph!) auf den Einheitskreis ab.

Abschließend geben wir in Analogie zu (0.3) noch die Definition für die komplexe Sinus- bzw. Cosinusfunktion an.

Definition 2. Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (0.8)$$

Insbesondere sind $\sin z$ und $\cos z$ also auf der imaginären Achse unbeschränkt.

Wir werden später sehen, dass das die einzige Möglichkeit ist, die Exponential-, bzw. Sinus- und Cosinus-Funktion, von \mathbb{R} auf differenzierbare Weise nach \mathbb{C} fortzusetzen.

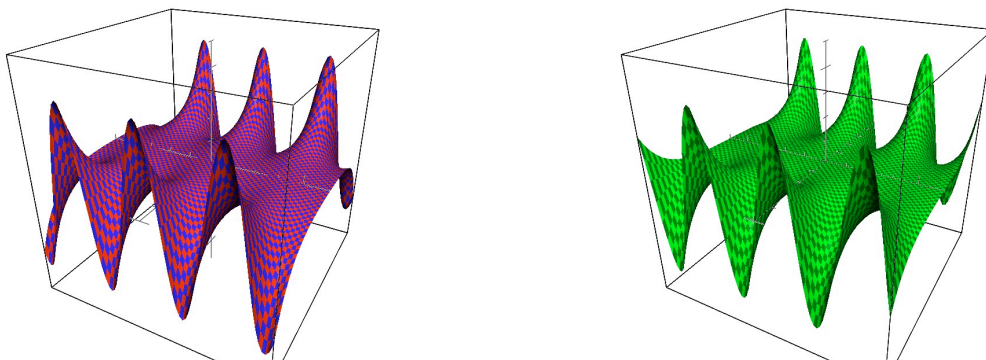


Abbildung 2: Real- und Imaginärteil von $\cos z$

1 Die Komplexen Zahlen

1.1 Historisches

Die komplexen Zahlen traten vermutlich erstmals 1545 auf, als der Mathematiker Gerolamo Cardano in seinem Buch *Ars magna* Formeln für die Lösungen kubischer Gleichungen veröffentlichte.

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat bekanntlich im Falle einer negativen Diskriminante keine reellen Lösungen. Bei einer nichtnegativen Diskriminante lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (1.1)$$

und es gilt der Wurzelsatz von Vieta:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \quad (1.2)$$

Die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kann durch Abspalten eines vollständigen Kubus

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{3a^2}{9}\right)x + c - \frac{a^3}{27} \\ &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

durch die Substitution $y = x + \frac{a}{3}$ in die sogenannte reduzierte Gleichung

$$y^3 + py + q = 0 \quad (1.4)$$

übergeführt werden. Der Ansatz $y = u + v$ ergibt nun

$$y^3 + py + q = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0. \quad (1.5)$$

Wählt man nun unter allen (u, v) mit $y = u + v$ jenes Paar welches zusätzlich die Nebenbedingung

$$uv = -\frac{p}{3} \text{ bzw. } u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (1.6)$$

erfüllt, so vereinfacht dadurch die reduzierte Gleichung zu

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (1.7)$$

Aus dem vietaschen Wurzelsatz folgt, dass u^3, v^3 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0 \quad (1.8)$$

sind. Diese Gleichung heißt die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung und führt zur Darstellung der Lösung der kubischen Gleichung durch die cardanosche Formel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (1.9)$$

Der Fall der einer negativen Diskriminante $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ heißt *casus irreducibilis* und erfordert die Kenntnis der dritten komplexen Einheitswurzeln. Es ist dann (1.9) die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen, somit gibt es hier genau drei verschiedene *reelle* Lösungen x_1, x_2 und x_3 .

Beispiel 1.1. Die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung $x^3 - 6x + 4 = 0$ hat die Lösungen

$$u^3, v^3 = -2 \pm \sqrt{-4}. \quad (1.10)$$

Bedient man sich der imaginären Einheit i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$, lässt sich schreiben

$$u^3, v^3 = -2 \pm 2i. \quad (1.11)$$

Wegen

$$(1 \pm i)^3 = -2 \pm 2i$$

gewinnt man somit eine (reelle) Lösung

$$x_1 = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i} = (1 + i) + (1 - i) = 2. \quad (1.12)$$

Die zur Cardanoschen Formel (1.9) führenden Gleichungen für u und v besitzen jedoch nicht nur eine, sondern drei Lösungen, nämlich

$$u_i = \varepsilon_i(1 + i), \quad v_j = \varepsilon_j(1 - i) \quad (1.13)$$

wobei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ die drei Nullstellen des Kreisteilungspolynoms $x^3 - 1$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{\varepsilon}_1 \quad (1.14)$$

bezeichnen. Hieraus ergeben sich neun Kombinationsmöglichkeiten für $x = u_i + v_j$. Aber nur drei von ihnen führen zu Lösungen der kubischen Gleichung, denn

$$uv = -\frac{p}{3} \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

verlangt, dass $\varepsilon_m \varepsilon_n = 1$ gilt. Deshalb lauten die drei Lösungen einer kubischen Gleichung

$$x_1 = \varepsilon_0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.16)$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.17)$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.18)$$

Für unsere konkrete Gleichung $x^3 - 6x + 4$ erhält man dann speziell die beiden weiteren reellen Lösungen $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ und $x_3 = -1 + \sqrt{3}$.

Bemerkung 1.2. Natürlich ist es möglich bei Kenntnis einer reellen Lösung (welche ja immer existieren muss), den Grad der Gleichung zu reduzieren und die beiden anderen Lösungen explizit anzugeben. Im *casus irreducibilis* ist es aber bereits für das Gewinnen *einer* reellen Nullstelle notwendig, die dritte Wurzeln aus einer echt komplexen Zahl zu ziehen!

1.2 Algebraische Struktur

Wir definieren die komplexen Zahlen \mathbb{C} als Paare reeller Zahlen (a, b) . Addition und Multiplikation sind gemäß

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (1.19)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \quad (1.20)$$

erklärt. Durch Nachrechnen überzeugt man sich zunächst leicht, dass dadurch ein kommutativer Ring mit Einselement $(1, 0)$ definiert wird. Im folgenden werden wir gelegentlich \mathbb{C}^\times für die Menge der komplexen Zahlen ohne das Nullelement schreiben.

Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\phi(a) = (a, 0)$ ist ein Monomorphismus, daher werden wir im Weiteren die reelle Zahl a und das Element $(a, 0)$ identifizieren. Für das Element $(0, 1)$ vereinbaren wir die Schreibweise i . Dadurch gelangt man zu der gewohnten kartesischen Darstellung der komplexen Zahlen

$$z = a + ib. \quad (1.21)$$

Als nächstes betrachten wir die Konjugationsabbildung $a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$. Sie besitzt folgende Eigenschaften

1. (Automorphismus) $\forall z, w \in \mathbb{C} : \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ bzw. $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
2. (Involution) $\forall z \in \mathbb{C} : \quad \overline{\bar{z}} = z$
3. (Definitheit) $\forall z \in \mathbb{C} : \quad z\bar{z} \geq 0$ und $z\bar{z} = 0$ genau für $z = 0$.

Insbesondere ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Ausdruck $z\bar{z}$ reell und für $z \neq 0$ sogar positiv. Daraus ergibt sich sofort die Inversionsformel

$$\forall z \in \mathbb{C}^\times : \quad z \cdot \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = 1, \quad (1.22)$$

d.h. jedes $z \neq 0$ besitzt ein multiplikativ inverses Element, welches wir in Zukunft mit z^{-1} bzw. $\frac{1}{z}$ bezeichnen werden. \mathbb{C} ist somit ein kommutativer Ring mit Eins, in dem jedes von 0 verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt, d.h. \mathbb{C} ist ein Körper.

Bemerkung 1.3.

1. Die Konjugation ist der einzige nicht-triviale Körperautomorphismus von \mathbb{C} , der \mathbb{R} punktweise fest lässt.

2. \mathbb{C} lässt sich nicht anordnen.

Definition 3. Sei $z \in \mathbb{C}$, dann heißt $|z| := (z\bar{z})^{1/2}$ der Betrag von z .

Lemma 1.4. Der Betrag auf \mathbb{C} ist eine Norm, d.h. $|\cdot|$ ist homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung.

Beweis. Es gilt sogar $|zw| = |z||w|$, daher ist $|\cdot|$ insbesondere auch homogen. Es bleibt daher zu zeigen, dass stets $|z+w| \leq |z| + |w|$. Einfaches Ausmultiplizieren liefert zunächst

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2. \quad (1.23)$$

Nun ist aber für jedes beliebige komplexe α sicherlich $\operatorname{Re} \alpha \leq |\alpha|$. Somit gilt

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|\bar{z}w| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \quad (1.24)$$

□

1.3 Lineare Struktur

\mathbb{C} ist als Körper Vektorraum über jedem seiner Unterkörper, insbesondere also über \mathbb{R} . Eine Basis von \mathbb{C} über \mathbb{R} ist gegeben durch 1 und i . Die Koordinaten bezüglich dieser Basis (d.h. die Koeffizienten der Darstellung eines Elements in dieser Basis) werden als Realteil Re bzw. Imaginärteil Im bezeichnet. $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt also stets

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z. \quad (1.25)$$

Die \mathbb{R} -lineare Abbildung $(a, b) \mapsto a + ib$ ist mithin invers zu $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ und stellt somit einen Vektorraum-Isomorphismus zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} dar.

\mathbb{R}^2 ist nicht nur ein Vektorraum, sondern bekanntlich auch ein Euklidischer Raum, d.h. mit einem Skalarprodukt ausgestattet. Mit Hilfe des oben angegebenen Isomorphismus kann man dieses Skalarprodukt auch in \mathbb{C} wiederfinden. Es gilt nämlich

$$\langle z, w \rangle := \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w = \operatorname{Re}(z\bar{w}). \quad (1.26)$$

Insbesondere ist die Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gültig.

Da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ist jede \mathbb{C} -lineare Abbildung automatisch auch \mathbb{R} -linear. Die Umkehrung gilt natürlich nicht. Die \mathbb{C} -linearen Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ haben genau die Form $z \mapsto wz$ mit $w \in \mathbb{C}$. Damit ergibt sich folgende Charakterisierung

Lemma 1.5. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear, wenn ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $\{1, i\}$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist. In diesem Fall gilt $Az = wz$ mit $w = a + ib$.

Beweis. Es genügt sich für festes $w = a + ib$ die Darstellung der Abbildung $z \mapsto wz$ in der Basis $\{1, i\}$ zu überlegen: Dann ist wegen

$$(a + ib)1 = a + ib \quad (1.27)$$

$$(a + ib)i = -b + ia \quad (1.28)$$

die Abbildungsmatrix von der angegebenen Form. □

Beispiel 1.6. Die Konjugationsabbildung ist \mathbb{R} -linear. Ihre Abbildungsmatrix bezüglich der obigen Basis ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sie ist klarerweise nicht \mathbb{C} -linear.

1.4 Topologische Struktur

Vermöge des Betrags werden die komplexen Zahlen \mathbb{C} zu einem metrischen Raum mit Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Der Vektorraum-Isomorphismus aus Abschnitt 1.3 führt den Betrag auf \mathbb{C} in die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^2 über, ist also sogar ein Homöomorphismus. Daraus folgt

Proposition 1.7. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als topologische (Vektor-)Räume. Insbesondere ist \mathbb{C} ein vollständiger, lokalkompakter metrischer Raum, in welchem die kompakten Teilmengen genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen sind (Heine-Borel).

Konvergenz von Folgen und Cauchyfolgen auf \mathbb{C} sind analog zu jedem anderen metrischen Raum erklärt. Zusammenhang, einfacher Zusammenhang und Wegzusammenhang, analog zu jedem anderen topologischen Raum (für die Definition des einfachen Zusammenhangs sei auf Kapitel 3.4 verwiesen).

Eine besondere Rolle spielt in den folgenden Kapiteln die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad (1.29)$$

sowie nichtleere offene und zusammenhängende Mengen, die man *Gebiete* nennt.

Proposition 1.8. Sei G ein Gebiet in \mathbb{C} . Dann gibt es zu je zwei Punkten in G einen verbindenden Streckenzug, i.e. G ist insbesondere wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $z_0 \in G$ beliebig, aber fest. Sei

$$W_{z_0} := \{z \in G : \exists \text{ Streckenzug in } G, \text{ der } z_0 \text{ und } z \text{ verbindet}\}. \quad (1.30)$$

Wegen $z_0 \in W_{z_0}$ ist diese Menge nicht leer. W_{z_0} ist offen: Gibt es einen Streckenzug von z_0 nach w , so gibt es auch einen Streckenzug von z_0 zu jedem Punkt in $B_\rho(w) \subset G$. Es ist aber auch $G \setminus W_{z_0}$ offen: Sei $w \notin W_{z_0}$, dann ist auch $v \notin W_{z_0}$ für jedes $v \in B_\rho(w) \subset G$, denn gäbe es einen Streckenzug von z_0 nach v , so könnten wir zuerst von z_0 nach v und dann von v nach w gehen. Da G zusammenhängend ist, muss die nicht leere offen und abgeschlossene Menge W_{z_0} mit G übereinstimmen. □

Beispiel 1.9.

1. $X := \{a + ib : b = \sin(1/a) \text{ mit } a \neq 0\} \cup \{ib : -1 \leq b \leq 1\}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. X ist aber auch kein Gebiet.
2. Der Kreisring $\{z : 1 < |z| < 2\}$ ist ein Gebiet (und damit wegzusammenhängend), nicht aber einfach zusammenhängend.
3. \mathbb{E} ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

\mathbb{C} ist zwar lokalkompakt (jede abgeschlossene Kugel ist kompakt), selbst aber nicht kompakt. Die Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wird Ein-Punkt-Kompaktifizierung genannt, wenn man eine Umgebungsbasis des Punktes ∞ durch folgendes Mengensystem erklärt

$$\mathcal{U}(\infty) := \{\{\infty\} \cup O : \mathbb{C} \setminus O \text{ kompakt}\}. \quad (1.31)$$

Der dadurch definierte topologische Raum \mathbb{C}_∞ ist dann kompakt. Versehen mit den Rechenregeln $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ wird \mathbb{C}_∞ die erweiterte gaußsche Zahlenebene genannt.

\mathbb{C}_∞ ist aber auch zur Riemann'schen Zahlenkugel isomorph, i.e. zur auf dem Nullpunkt der komplexen Ebene ruhenden Kugel mit Radius $\frac{1}{2}$. Der Südpol der Kugel besitzt die Raumkoordinaten $S = (0, 0, 0)$. Wenn die komplexe Zahl $z = x + iy = (x, y, 0)$ mit dem Nordpol $N = (0, 0, 1)$ der Kugel geradlinig verbunden wird, durchstößt die Gerade den Kugelpunkt $P = (\xi, \eta, \zeta)$. Die Zuordnung von $z = x + iy$ zu $P = (\xi, \eta, \zeta)$ heißt stereographische Projektion. Sie erfaßt umkehrbar eindeutig jeden Punkt der Kugel mit Ausnahme des Nordpols. Ihm wird der Punkt ∞ zugeschrieben. Tatsächlich ist die stereographische Projektion ein Homöomorphismus zwischen \mathbb{C}_∞ und der 2-Sphäre S^2 .

\mathbb{C}_∞ ist ein Beispiel einer *Riemann'schen* Fläche und läßt sich daher auch mit einer differenzierbaren Struktur versehen.

1.5 Geometrische Deutung

Aufgrund des Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist es möglich, komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene zu interpretieren. Man spricht dann von der Gauß'schen Zahlenebene. Der Betrag $|z|$ lässt sich als euklidische Distanz vom Koordinatenursprung deuten, die Konjugation \bar{z} , als Spiegelung an der reellen Achse, Realteil $\operatorname{Re} z$ und Imaginärteil $\operatorname{Im} z$ als orthogonale Projektion auf die reelle bzw. imaginäre Achse.

Nach unseren einleitenden Bemerkungen zur komplexen Exponentialfunktion kann man jeden Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ der Ebene eindeutig in Polarkoordinaten

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (1.32)$$

mit $r > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ schreiben. Ist $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$, so ist $r = |z|$. Den Winkel ϕ nennt man Argument von z ; in Zeichen $\arg z$.

Bemerkung 1.10. Die Abbildung $\arg : \mathbb{C}^\times \rightarrow [0, 2\pi)$ ist unstetig. Erst durch Wegnehmen der ganzen nichtnegativen reellen Achse wird \arg stetig.

Diese Definition von ϕ erweist sich als konsistent mit der Definition über das Skalarprodukt

$$\cos \angle(z, w) = \frac{\langle z, w \rangle}{|z||w|} = \frac{\operatorname{Re}(z\bar{w})}{|z||w|}. \quad (1.33)$$

Insbesondere ist $\arg z$ der Winkel zwischen 1 und z . Die Darstellung

$$z = |z|e^{i \arg z} = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.34)$$

nennt man auch Polardarstellung von z . Diese Darstellung ist insbesondere für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen praktisch, denn

$$zw = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}. \quad (1.35)$$

Für $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ergibt sich aus (1.35)

$$z^N = r^N(\cos N\varphi + i \sin N\varphi), \quad N \in \mathbb{Z} \quad (1.36)$$

Der Spezialfall für $|z| = 1$ wird auch als Formel von de Moivre bezeichnet:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^N = \cos N\varphi + i \sin N\varphi. \quad (1.37)$$

Beispiel 1.11 (Wurzeln einer komplexen Zahl). Um die Gleichung $z^N = w$ mit $N \in \mathbb{Z}$ zu lösen, gewinnt man mit Hilfe der Polardarstellung die beiden Gleichungen

$$|z|^N = |w|, \quad N \arg z = \arg w \pmod{2\pi}. \quad (1.38)$$

Erste ist durch $|z| = \sqrt[N]{|w|}$ eindeutig lösbar, die zweite besitzt die N Lösungen

$$\arg z = \frac{\arg w}{N} + n \frac{2\pi}{N} \pmod{2\pi}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.39)$$

Darum ergeben sich die N Lösungen der Gleichung $z^N = w$ zu

$$z = \sqrt[N]{|w|} \left(\cos \frac{\arg w + 2\pi n}{N} + i \sin \frac{\arg w + 2\pi n}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.40)$$

Beispiel 1.12 (Logarithmen einer komplexen Zahl). Um die Gleichung $e^z = w$ zu lösen, verwendet man wieder die Polardarstellung von w und erhält die beiden Gleichungen

$$e^{\operatorname{Re} z} = |w|, \quad \operatorname{Im} z = \arg w \pmod{2\pi}. \quad (1.41)$$

Die erste ist durch $\operatorname{Re} z = \ln |w|$ wieder eindeutig lösbar, die zweite hingegen besitzt die abzählbar vielen Lösungen $\operatorname{Im} z = \arg w + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Insgesamt ergibt sich

$$z = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.42)$$

1.6 Möbius-Transformationen

Definition 4. Eine Abbildung M der Form $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ heißt gebrochen linear bzw. Möbius-Transformation, wenn $ad - bc \neq 0$.

Die Einschränkung $ad - bc \neq 0$ ist nötig, da M sonst entweder konstant oder nirgends definiert ist. Eine Möbius-Transformation ist offenbar eine stetige Bijektion $M : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. M lässt sich aber auch als stetige Abbildung $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ auffassen, denn

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty. \quad (1.43)$$

Proposition 1.13. Die Menge der Möbius-Transformationen bildet unter der Komposition von Abbildungen eine Gruppe; die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto M(z) := \frac{az+b}{cz+d} \quad (1.44)$$

ist ein Homomorphismus von $GL(2, \mathbb{C})$ auf die Gruppe der Möbius-Transformationen.

Beweis. Nachrechnen. □

Proposition 1.14. Jede Möbius-Transformation $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ kann als Komposition von Translationen, Dilatationen, Rotationen und Inversionen geschrieben werden.

Beweis. Sei $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Die Aussage ist trivial, wenn $c = 0$ ist. Wenn $c \neq 0$ können wir Nenner und Zähler durch c dividieren und uns daher auf den Fall $c = 1$ beschränken. Also ist

$$M(z) = \frac{az+b}{z+d} = a + \frac{b-ad}{z+d} \quad (1.45)$$

die Hintereinanderausführung der Translation um d , der Inversion, der Dilatation um $|b - ad|$, der Rotation um $\arg(b - ad)$ und der Translation um a . □

Zwei Tupel (a, b, c, d) und $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ definieren genau dann die selbe Möbius-Transformation, wenn $(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Mithilfe dieser Beobachtung lässt sich dann ein Gruppenisomorphismus zwischen der Gruppe der Möbius-Transformationen und $GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ herstellen.

Beispiel 1.15.

1. Die Menge der Möbius-Transformationen $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bilden eine Untergruppe, welche zu $GL(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ isomorph ist. Sie bilden $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf sich ab.
2. Die Menge der Möbius-Transformationen $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$ sind zu $SL(2, \mathbb{R})$ isomorph. Sie bilden die obere Halbebene in sich

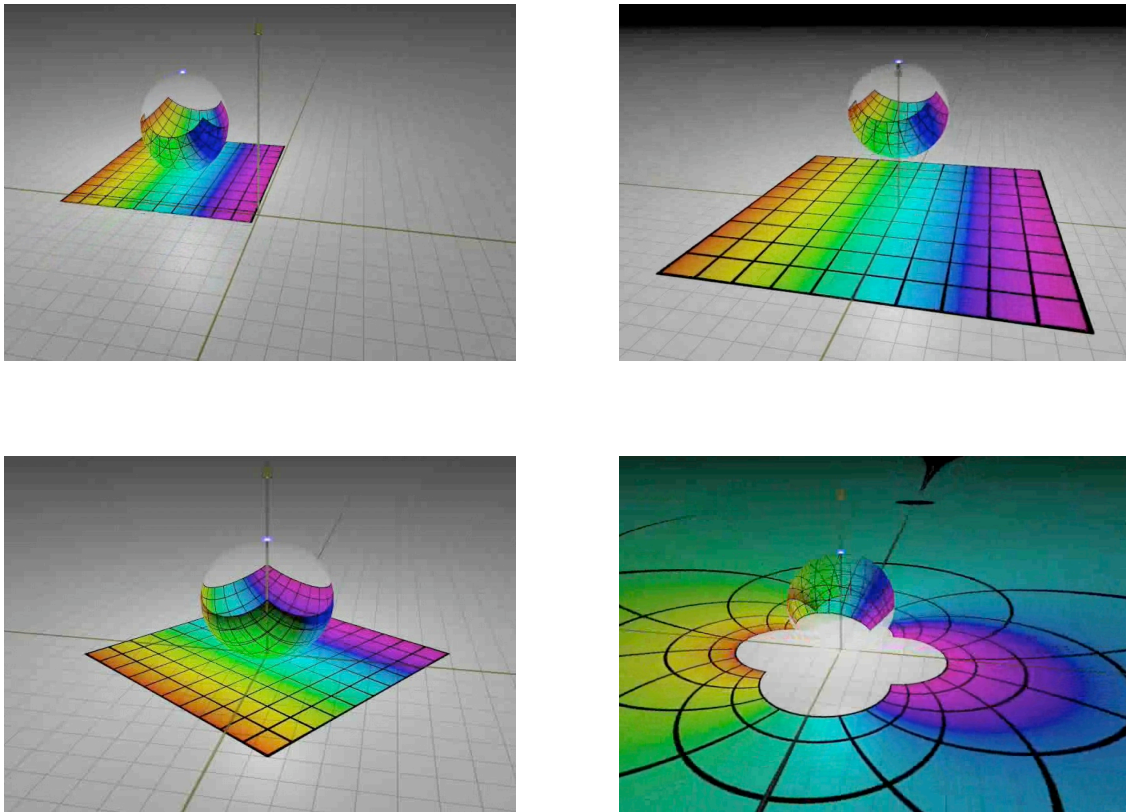


Abbildung 3: Möbius-Transformationen als Bewegungen der Riemann'schen Zahlenkugel. Graphiken entnommen von www.ima.umn.edu/~arnold/moebius/.

ab: Da M ein Homöomorphismus ist, der die reelle Achse festlässt, muss das Gebiet $\text{Im } z > 0$ auf $\text{Im } z > 0$ oder $\text{Im } z < 0$ abgebildet werden. Wegen

$$M(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{1}{c^2 + d^2} ((ac + bd) + i) \quad (1.46)$$

wird i in die obere Halbebene abgebildet, also tritt der erstere Fall ein.

Bemerkung 1.16. Man kann zeigen, dass $GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ isomorph ist zu $SO^+(\mathbb{R})(1, 3)$, der orthochronen Drehgruppe im Minkowskiraum. Vermittels der stereographischen Projektion lassen sich Möbius-Transformationen aber auch als Bewegungen der Riemann'schen Zahlenkugel im \mathbb{R}^3 deuten:

1. Translationen in \mathbb{C} sind konjugiert zu Translationen in Richtung $(x, y, 0)$.
2. Dilationen in \mathbb{C} sind konjugiert zu Translationen in Richtung $(0, 0, z)$.
3. Rotationen in \mathbb{C} sind konjugiert zu Rotationen um die Achse $(0, 0, 1)$.
4. Die Inversion ist konjugiert zur Rotation um den Winkel π in Achsenrichtung $(1, 0, 0)$.

Proposition 1.17. *Die Gruppe der Möbius-Transformationen agiert transitiv auf \mathbb{C}_∞ , d.h. zu je zwei Punkten $z_1, w_1 \in \mathbb{C}_\infty$ gibt es eine gebrochen lineare Transformation M mit $M(z_1) = w_1$.*

Beweis. Der Fall $z_1 = w_1 = \infty$ ist trivial. Durch eine Translation $z \mapsto z + b$ können wir je zwei beliebige Punkte $z_1, w_1 \in \mathbb{C}$ aufeinander abbilden. Ist $z_1 = \infty$ wenden wir zuerst die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ an und bilden danach 0 auf w_1 ab. Ist $w_1 = \infty$, bilden wir zuerst z_1 auf 0 ab und wenden danach die Inversion an. \square

Bemerkung 1.18. Proposition 1.17 kann wesentlich verschärft werden. So gibt es etwa zu je drei paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 genau eine Möbius-Transformation M mit $M(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$. Insbesondere ist also eine Möbius-Transformation mit drei Fixpunkten schon die Identität.

Korollar 1.19. *Sei $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation. Dann bildet M Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden ab.*

Beweis. Die Aussage ist trivial für Translationen, Dilationen und Rotationen. Die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ führt die Gleichung

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \gamma \bar{z} + \delta = 0 \quad (1.47)$$

über in

$$\delta z \bar{z} + \gamma z + \beta \bar{z} + \alpha = 0, \quad (1.48)$$

wobei nicht alle Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ verschwinden sollen. Nun ist (1.47) in der Gauß'schen Zahlenebene aber genau die Gleichung eines Kreises ($\alpha \neq 0$) oder einer Geraden ($\alpha = 0$). \square

Lemma 1.20. *Sei $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation mit $M(\infty) = \infty$. Dann ist M von der Gestalt $z \mapsto \alpha z + \beta$ mit $\alpha \neq 0$.*

Beweis. Aus $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = \infty$ folgt $c = 0$. Da M eine Möbius-Transformation ist, gilt $ad \neq 0$. Setze nun $\alpha := a/d$ bzw. $\beta := b/d$. \square

Wir werden in einem späteren Kapitel beweisen, dass die einzigen Automorphismen (i.e. bijektive differenzierbare Funktionen mit differenzierbarer Umkehrfunktion) von \mathbb{C} die Abbildungen $z \mapsto az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ sind. Diesen Satz vorweggenommen können wir zum Abschluss zeigen

Satz 1.21. *Die Möbius-Transformationen sind genau die Automorphismen von \mathbb{C}_∞ .*

Beweis. Sei $\phi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ein Automorphismus. Da die Gruppe der Möbius-Transformationen transitiv auf \mathbb{C}_∞ agiert, finden wir eine Möbius-Transformationen ψ sodass ∞ ein Fixpunkt von $\psi \circ \phi$ ist, d.h. sodass $\psi \circ \phi$ eingeschränkt auf \mathbb{C} ebenfalls ein Automorphismus ist. Es ist also $\psi \circ \phi$ affin und damit $\phi = \psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi)$ gebrochen linear. \square

Beispiel 1.22 (Cayley-Transformation). Die Abbildung $C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ist offenbar eine Möbius-Transformation. Wegen

$$\left| \frac{t-i}{t+i} \right|^2 = \frac{t^2+1}{t^2+1} = 1, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.49)$$

bildet sie die reelle Achse in den Rand $\partial\mathbb{E}$ der Einheitskreisscheibe ab, ∞ wird dabei auf 1 abgebildet. Es muss daher die Halbebene $\text{Im } z > 0$ entweder auf \mathbb{E} oder auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{E}}$ abgebildet werden. Wegen $C(i) = 0$ ist ersteres der Fall.

Die Umkehrabbildung der Cayleytransformation ist gegeben durch $C^{-1}(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.

Sei M eine Möbius-Transformation, welche die obere Halbebene in sich abbildet und C die Cayley-Transformation. Dann ist $\frac{1}{i} C \circ M \circ C^{-1}$ eine Möbius-Transformation, welche den Einheitskreis in sich abbildet. Wählt man M wie in Beispiel 1.15.2, ergibt sich

$$\frac{1}{i} C \circ M \circ C^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad (1.50)$$

wobei

$$\alpha := a + d + i(b - c) \quad \text{bzw.} \quad \beta := a - d - i(b + c). \quad (1.51)$$

Desweiteren ist nach Voraussetzung stets $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 2(ad - bc) > 0$. Kürzt man also durch α und setzt $\eta := \frac{\alpha}{\alpha}$ bzw. $\zeta := -\frac{\beta}{\alpha}$, so ergibt sich die Darstellung

$$\frac{1}{i} C \circ M \circ C^{-1}(z) = \eta \frac{z - \zeta}{\zeta z - 1}, \quad \text{mit} \quad |\eta| = 1, \zeta \in \mathbb{E}. \quad (1.52)$$

Aus den Gleichungen (1.51) erkennt man unschwer, dass die Zuordnung aus (1.52) bijektiv ist. Die Gruppe der Möbius-Transformationen der Gestalt (1.52) ist somit konjugiert zur Gruppe der Möbius-Transformationen aus Beispiel 1.15.2 und somit isomorph zu $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Setzen wir in (1.52) speziell $\zeta = 0$ erhalten wir die Rotationen $z \mapsto \eta z$; setzen wir dagegen $\eta = 1$ erhalten wir Automorphismen, welche $\zeta \mapsto 0$ und $0 \mapsto \zeta$ erfüllen. Es agiert daher $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ transitiv auf \mathbb{E} . Es agieren damit die Möbius-Transformationen aus Beispiel 1.15.2 auf der oberen Halbebene auch transitiv.

Beispiel 1.23. Gesucht ist eine Möbius-Transformation M mit $\infty \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$ und $0 \mapsto -1$. Aus diesen Forderungen erhalten wir die drei Gleichungen

$$\frac{a}{c} = 1, \quad \frac{b}{d} = -1, \quad \frac{a+b}{c+d} = 0. \quad (1.53)$$

Geben wir uns etwa $a = 1$ vor, erhalten wir $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Geometrisch entspricht M einer Drehung der Riemann'schen Zahlenkugel um den Winkel $\pi/2$ durch die zwischen den Urbildern von $\pm i$ verlaufende Achse. Der Halbkreisbogen $[\infty, 1, 0]$ wird dabei auf den Halbkreisbogen $[1, 0, -1]$ gedreht.

2 Komplexe Differentialrechnung

2.1 Holomorphe Funktionen

Definition 5. Sei D eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, wenn der Differentialquotient

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \quad (2.1)$$

existiert. Ist f überall in D komplex differenzierbar, so nennt man f holomorph.

Sind f, g in $D \subseteq \mathbb{C}$ holomorph, dann auch αf für $\alpha \in \mathbb{C}$, $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ - falls g nullstellenfrei in D ist. Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel gelten in \mathbb{C} genau so wie in \mathbb{R} und die Beweise verlaufen vollkommen analog.

Beispiel 2.1. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left((z_0 + h)^n - z_0^n \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_0^k h^{n-k} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_0^k h^{n-k-1} = n z_0^{n-1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

also ist f überall in \mathbb{C} komplex differenzierbar.

Beispiel 2.2. $f(z) = z^{-1}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z_0+h} - \frac{1}{z_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_0 - z_0 - h}{(z_0 + h)z_0h} = -z_0^{-2}, \quad (2.3)$$

also ist f überall in \mathbb{C}^\times differenzierbar.

Ganz allgemein sind Polynome $p(z)$ überall und rationale Funktionen $r(z)$ außerhalb der Nullstellen des Nenners komplex differenzierbar. Insbesondere sind Möbius-Transformationen außerhalb der Nennernullstelle komplex differenzierbar.

Beispiel 2.3. $f(z) = |z|$ ist nirgends in \mathbb{C} komplex differenzierbar, denn Annäherung an $z_0 = x_0 + iy_0$ einmal entlang der reellen und einmal entlang der imaginären Achse liefert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|z_0 + h| - |z_0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x_0 + h)^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{h} \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$\lim_{ih \rightarrow 0} \frac{|z_0 + ih| - |z_0|}{ih} = \lim_{ih \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0^2 + (y_0 + h)^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{ih} \in i\mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Nur eine Umformulierung der Definition der Differenzierbarkeit ist

Proposition 2.4. Sei D eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, dann ist f genau dann komplex differenzierbar in $z_0 \in D$, wenn es ein $w \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - wh}{h} = 0. \quad (2.6)$$

In diesem Fall ist $w = f'(z_0)$.

Wir erinnern in diesem Zusammenhang an den Begriff des Fréchet-Differentials, der im \mathbb{R}^n mit dem gewöhnlichen (totalen) Differential zusammenfällt.

Definition 6. Seien V, W zwei endlichdimensionale normierte Vektorräume und $D \subseteq V$ eine offene Teilmenge, dann heißt $u : D \rightarrow W$ im Punkt $c \in D$ (reell) Fréchet-differenzierbar, wenn es eine (\mathbb{R} -lineare) Abbildung $T_{u(c)} : V \rightarrow W$ gibt, so dass gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|u(c+h) - u(c) - T_{u(c)}(h)\|_W}{\|h\|_V} = 0.$$

Eine reelle Funktion $u : V \rightarrow W$ ist jedenfalls dann Fréchet-differenzierbar, wenn sie stetige partielle Ableitungen besitzt. Wir nennen daher eine komplexe Funktion $f = u + iv$ reell stetig differenzierbar, wenn $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetige partielle Ableitungen besitzt.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{T^{\mathbb{C}}} & \mathbb{C} \\ (\text{Re } z, \text{Im } z) \downarrow & & \uparrow a+ib \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{T^{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Wenn nun eine an z_0 differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vorgelegt ist, existiert einerseits das komplexe Differential $T_{f(z_0)}^{\mathbb{C}} : z \mapsto zf'(z_0)$ und andererseits das reelle Differential $T_{f(z_0)}^{\mathbb{R}}$, das von der Identifizierung $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ herrührt.

Satz 2.5. Sei D eine offene Teilmenge von \mathbb{C} und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$. Dann ist f genau dann holomorph in D , wenn $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ reell Fréchet-differenzierbar ist und Real- und Imaginärteil die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

erfüllen. Es gilt dann $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

Beweis. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist nach obiger Bemerkung genau dann holomorph, wenn sie reell Fréchet-differenzierbar ist und ein \mathbb{C} -lineares Differential $T_{f(z_0)}^{\mathbb{C}}$ an $z_0 = x_0 + iy_0$ besitzt. Das Differential $T_{f(z_0)}^{\mathbb{R}}$ ist für $f = u + iv$ durch die 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

gegeben. Nach Lemma 1.5 ist die zugehörige \mathbb{R} -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann \mathbb{C} -linear, wenn $u_x = v_y$ und $v_x = -u_y$. Das Differential ist in diesem Fall gegeben durch

$$T_{f(z_0)}^{\mathbb{C}}(z) = \left(u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \right) z. \quad (2.8)$$

□

Bemerkung 2.6.

1. Sei f holomorph auf D und $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $f(D) \subseteq i\mathbb{R}$. Dann ist f lokal konstant: Es ist $f(z) = u + iv \in \mathbb{R}$ mit $v \equiv 0$. Daher ist $v_x = v_y = 0 = u_x = u_y$ und u ist lokal konstant. Der Fall $u \equiv 0$ verläuft analog.
2. Ist der Realteil einer auf D holomorphen Funktion gegeben, so ist der Imaginärteil von f aufgrund von

$$f' = u_x - iu_y = v_y + iv_x \quad (2.9)$$

bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und vice versa.

3. Ist $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so ist u genau dann der Realteil einer holomorphen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, wenn $u_x - iu_y$ eine Stammfunktion auf D besitzt. Wir werden sehen, dass dies für einfach zusammenhängende Gebiete stets der Fall ist.

Beispiel 2.7. Es sei ein holomorphes f mit $\operatorname{Re} f = e^x \cos y$ gegeben. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen lauten hier

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x. \quad (2.10)$$

Es gilt daher

$$v_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int v_y dy \right) = \frac{\partial}{\partial x} (e^x \sin y + c(x)) = e^x \sin y + c'(x) = -u_y, \quad (2.11)$$

woraus $c'(x) = 0$ und schlußendlich $f(z) = e^z + c$ folgt.

Definition 7. Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion nennt man ganze Funktion.

Definition 8. Ist D eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt f biholomorph, wenn $D' := f(D)$ offen ist und $f : D \rightarrow D'$ eine holomorphe Umkehrabbildung $f^{-1} : D' \rightarrow D$ hat.

Beispiel 2.8.

1. $f(z) = e^z$ ist ganz, aber nicht biholomorph auf \mathbb{C} .
2. $f(z) = z^{-1}$ ist nicht ganz, aber biholomorph auf \mathbb{C}^\times .
3. $f(z) = az + b$ ist ganz und biholomorph auf \mathbb{C} .

2.2 Konforme Abbildungen

Definition 9. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (komplexwertiger) Weg.

Wir werden in diesem Abschnitt nur differenzierbare Wege mit nicht verschwindender Ableitung betrachten, welche wir im Folgenden *Kurven* nennen wollen. In diesem Fall ist nämlich nach der Identifikation $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ der Tangentialvektor an $\gamma(t)$ gerade durch $\gamma'(t)$ gegeben.

Definition 10. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt konform wenn f winkeltreu ist, d.h. wenn für je zwei Kurven γ_1, γ_2 die sich im Punkt $z = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ schneiden, die Winkel $\angle(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$ und $\angle((f \circ \gamma_1)'(t_0), (f \circ \gamma_2)'(t_0))$ übereinstimmen.

Gemäß (1.33) berechnen sich Winkel über die Formel.

$$\cos(\angle(z, w)) = \frac{\operatorname{Re}(z\bar{w})}{|z||w|}. \quad (2.12)$$

Proposition 2.9. Eine holomorphe Funktion $f : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist an allen Stellen mit $f'(z) \neq 0$ konform. Die lokale Flächenverzerrung beträgt $|f'(z)|^2$.

Beweis. Sei $c := f'(z) \neq 0$ und γ_1, γ_2 zwei Kurven mit $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z$. Sei $a := \gamma_1'(t_0)$ und $b := \gamma_2'(t_0)$. Die Tangentialvektoren berechnen sich dann als

$$\alpha := (f \circ \gamma_1)'(t_0) = f'(\gamma_1(t_0)) \gamma_1'(t_0) = ca, \quad (2.13)$$

$$\beta := (f \circ \gamma_2)'(t_0) = f'(\gamma_2(t_0)) \gamma_2'(t_0) = cb. \quad (2.14)$$

Damit gilt aber Gleichheit für die Winkel:

$$\cos(f(\angle(a, b))) = \frac{\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta})}{|\alpha||\beta|} = \frac{\operatorname{Re}(ca\bar{c}b)}{|c|^2|a||b|} = \frac{\operatorname{Re}(b\bar{a})}{|a||b|} = \cos(\angle(a, b)). \quad (2.15)$$

Sei $z = x + iy$ und $f(z) = u + iv$, dann entspricht die lokale Flächenverzerrung der Jacobi-Determinante der Funktion $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Unter Berücksichtigung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung errechnet man sie als

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |u_x + iv_x|^2 = |f'(z)|^2. \quad \square$$

Beispiel 2.10.

1. Wegen $\operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Re}\bar{\zeta}$ erhält die Konjugation Winkel, ist aber natürlich nicht holomorph. Es läßt sich zeigen, dass eine reell stetig differenzierbare Funktion f genau dann winkeltreu ist, wenn ihre Ableitung nicht verschwindet und entweder f oder \bar{f} holomorph ist.
2. $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist für $z \neq 0$ winkeltreu. Der Winkel zwischen zwei Kurven (z.B. Geraden) durch den Ursprung hingegen wird ver- n -facht.
3. Möbius-Transformationen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich konform, denn

$$\left(\frac{az + b}{cz + d} \right)' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0. \quad (2.16)$$

2.3 Harmonische Funktionen

Nicht alle reell differenzierbaren Funktionen $u(x, y)$ kommen als Realteil komplex differenzierbarer Funktionen in Frage. Die Cauchy-Riemannschen Gleichungen führen zu einer sehr einschränkenden notwendigen Bedingung:

Satz 2.11. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ überall in D holomorph. Sind u und v zweimal reell stetig differenzierbar in D , so gilt*

$$\Delta u = 0 \text{ und } \Delta v = 0. \quad (2.17)$$

Hier bezeichnet $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ den Laplace-Operator im \mathbb{R}^2 .

Beweis. Da f auf D holomorph ist, gelten in D die Cauchy-Riemannschen Gleichungen $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Erneute Differentiation liefert

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}, \quad u_{yx} = -v_{xx}. \quad (2.18)$$

Da alle zweiten Ableitungen von u und v in G stetig sind, dürfen wir ihre Reihenfolge vertauschen und erhalten dann

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0. \quad \square$$

Bemerkung 2.12.

1. Die zusätzliche Annahme der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von u und v kann weggelassen werden, da wir später sehen werden, dass holomorphe Funktionen stets beliebig oft komplex differenzierbar sind.
2. Ist $u : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch und $f : D' \subseteq \mathbb{C} \rightarrow D$ holomorph, so ist auch $u \circ f : D' \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

Mit etwas Rechenaufwand lässt sich der Laplace Operator in Polarkoordinaten umschreiben. Man erhält zunächst

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 = x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 = y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.20)$$

woraus sich nun die Darstellung für Δ ergibt:

$$\Delta u(r, \phi) = \frac{1}{r^2} \left(\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 u(r, \phi) + \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)^2 u(r, \phi) \right). \quad (2.21)$$

Definition 11. *Man nennt eine zweimal reell stetig differenzierbare Funktion $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllt, eine harmonische Funktion. Erfüllen zwei zweimal reell stetig differenzierbare Funktionen u und v die Cauchy-Riemannschen Gleichungen, so nennt man u und v konjugiert harmonisch.*

Eine zweimal reell stetig differenzierbare Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ ist also genau dann holomorph in G , wenn u und v konjugiert harmonische Funktionen sind.

Proposition 2.13. *Eine Funktion $u : D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn $f' := u_x - iu_y$ auf D holomorph ist.*

Beweis. Wenn $u = u(x, y)$ bei $z = x + iy$ harmonisch ist, dann gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für f' :

$$(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y \quad \text{und} \quad (u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)_x. \quad (2.22)$$

Wenn f' holomorph ist, gilt insbesondere die erste Gleichung in (2.22), also ist u harmonisch. \square

Beispiel 2.14.

1. **Radiale harmonische Funktionen.** Sei $u = u(r)$ eine harmonische Funktion. Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten für u lautet dann

$$\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 u(r) = 0. \quad (2.23)$$

D.h. $r \frac{\partial u}{\partial r}$ ist konstant, also etwa $r \frac{\partial u}{\partial r} = a$ und

$$u(r) = a \ln r + b. \quad (2.24)$$

2. Sei $n \geq 1$ und $f(z) = z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Wir haben schon gesehen, dass f holomorph ist, somit sind

$$u(r, \phi) = r^n \cos(n\phi) \quad (2.25)$$

$$v(r, \phi) = r^n \sin(n\phi) \quad (2.26)$$

konjugierte harmonische Funktionen.

3. $f(z) = |z|$ ist nirgends holomorph. $v = \operatorname{Im} f = 0$ ist zwar harmonisch, aber $u(r, \phi) = \operatorname{Re} f = r$ ist nicht harmonisch, denn $\Delta u = \frac{1}{r} > 0$. Die konjugiert harmonische Funktion zu $v = 0$ ist die konstante Nullfunktion.

Satz 2.15 (Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen). *Für alle in $B_1(0)$ harmonischen und auf $\overline{B_1(0)}$ stetigen Abbildungen $u : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt für alle $\rho \in [0, 1)$*

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt. \quad (2.27)$$

Beweis. Für $\rho > 0$ gilt aufgrund der Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten (2.21)

$$\begin{aligned} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)^2 u(\rho e^{it}) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\rho e^{it}) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} u(\rho e^{it}) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Also ist $\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt$ als Funktion von ρ konstant. (Die Vertauschung von Differentiation und Integration ist erlaubt, weil u mitsamt seinen partiellen Ableitungen auf der kompakten Menge $\overline{B}_\rho(0)$ stetig ist.) Da dies für alle $\rho > 0$ gilt, folgt durch Bildung des Grenzüberganges $\rho \rightarrow 0$, dass diese Konstante 0 sein muss. Deshalb erweist sich

$$h_0(\rho) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{it}) dt \quad (2.29)$$

als eine von ρ unabhängige Größe, die sich beim Grenzübergang $\rho \rightarrow 0$ wegen der Stetigkeit von u als $u(0)$ zu erkennen gibt. \square

Bemerkung 2.16. Anwenden des Laplace-Operators (2.21) auf eine am Abschluß stetige Funktion und im Inneren zweimal differenzierbare Funktion u , die die Mittelwerteigenschaft (2.30) besitzt, zeigt unmittelbar dass u harmonisch ist.

Die Mittelwerteigenschaft einer in $B_1(0)$ harmonischen und auf $\overline{B}_1(0)$ stetigen Funktion u besagt, dass der Funktionswert im Kreismittelpunkt durch die Funktionswerte am Kreisrand eindeutig bestimmt ist.

Korollar 2.17. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Für alle in D harmonischen und auf \overline{D} stetigen Abbildungen $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt für jedes $z \in D$ und $\rho > 0$ mit $\overline{B}_\rho(z) \subseteq D$:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{it}) dt. \quad (2.30)$$

Beweis. Die Abbildung $f(\zeta) := z + \rho\zeta$ bildet $B_1(0)$ holomorph auf $B_\rho(z)$ ab. Gleichung (2.30) ist nun genau die Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktion $u \circ f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$. \square

Korollar 2.18 (Maximumprinzip).

1. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf G die Mittelwerteigenschaft besitzt. Nimmt u in G ein Maximum an, dann ist u konstant.

2. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche auf G die Mittelwerteigenschaft besitzt. Dann gilt für alle $z_0 \in G$

$$\inf_{z \in \partial G} u(z) \leq u(z_0) \leq \sup_{z \in \partial G} u(z). \quad (2.31)$$

Beweis. Aussage 1 wird als Übungsaufgabe gestellt. Wir zeigen wie daraus Aussage 2 folgt. Da G beschränkt ist, ist \overline{G} kompakt, u nimmt daher ein Maximum auf \overline{G} an. Ist dieses Maximum auch ein Maximum in G , so ist u konstant; andernfalls wird das Maximum am Rand ∂G angenommen. In jedem Fall gilt somit die rechte Ungleichung in (2.31). Die linke Ungleichung folgt, wenn man u durch $-u$ ersetzt. \square

Um einen Punkt, der nicht notwendigerweise der Mittelpunkt ist, als Integral über den Kreisrand darzustellen, bedient man sich des Automorphismus $w : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ der Einheitskreisscheibe

$$w(z) = \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z}, \quad |\zeta| < 1, \quad (2.32)$$

weil auf ihn $w(\zeta) = 0$ zutrifft.

Satz 2.19 (Poisson'sche Integralformel). Für alle in $B_1(0)$ harmonischen und auf $\overline{B_1(0)}$ stetigen Abbildungen $u : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta}e^{it}|^2} dt, \quad \zeta \in B_1(0). \quad (2.33)$$

Beweis. Die Umkehrabbildung des Automorphismus aus (2.32) berechnet sich zu

$$z(w) = \frac{w + \zeta}{1 + \bar{\zeta}w}. \quad (2.34)$$

Die Funktion $u \circ z : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ ist harmonisch nach Bemerkung 2.12.2. Sie hat zusätzlich die Eigenschaft $u \circ z(0) = u(\zeta)$, also

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ z(e^{is}) ds. \quad (2.35)$$

Wir betrachten nun den Kreisrand unter dem Automorphismus w (es gilt ja speziell $w : \partial B_1(0) \rightarrow \partial B_1(0)$):

$$w(e^{it}) = \frac{e^{it} - \zeta}{1 - \bar{\zeta}e^{it}} = \frac{1 - \zeta e^{-it}}{1 - \bar{\zeta}e^{it}} e^{it} = e^{is}, \quad \text{bzw. } e^{it} = z(e^{is}). \quad (2.36)$$

Es wird dadurch also eine Transformation $s : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ definiert, deren Differential wir nun berechnen wollen.

$$ie^{is} ds = \frac{(1 - \bar{\zeta}e^{it}) - (e^{it} - \zeta)(-\bar{\zeta})}{(1 - \bar{\zeta}e^{it})^2} ie^{it} dt \quad (2.37)$$

$$= \frac{1 - |\bar{\zeta}|^2}{(1 - \bar{\zeta}e^{it})^2} ie^{it} dt \quad (2.38)$$

$$= \frac{1 - |\bar{\zeta}|^2}{|1 - \bar{\zeta}e^{it}|^2} ie^{is} dt \quad (2.39)$$

Somit erhalten wir

$$ds = \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta}e^{it}|^2} dt \quad (2.40)$$

und können im Integral (2.35) die Substitution $t \leftrightarrow s$ durchführen:

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ z(e^{is}) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |\zeta|^2}{|1 - \bar{\zeta}e^{it}|^2} dt. \quad (2.41)$$

□

Mittels der Poisson'schen Integralformel werden wir im Folgenden zeigen, dass jede harmonische Funktion unendlich oft differenzierbar ist.

Schreibt man den Term $\frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}e^{it}|^2}$ in Polarkoordinaten $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ um, erhält man

$$P(\rho, \vartheta - t) = \frac{1 - \rho^2}{1 - \rho e^{-i\vartheta} e^{it} - \rho e^{i\vartheta} e^{-it} + \rho^2} = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2}. \quad (2.42)$$

Dieser Ausdruck ist der *Poisson'sche Kern*. Er besitzt einige bemerkenswerte Eigenschaften.

Satz 2.20. *Sei $P(\rho, \vartheta - t)$ der Poisson'sche Kern. Dann gilt*

1. *P besitzt stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung und ist harmonisch auf $B_1(0)$.*
2. *P ist positiv auf $B_1(0)$ und es gilt $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) dt = 1$, d.h. für jedes $\rho > 0$ ist $\mu[P] := P(\rho, \vartheta - t) dt$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.*
3. *Sei δ_ϑ das Dirac-Maß, welches an ϑ konzentriert ist. Dann gilt für $\rho \rightarrow 1$*

$$P(\rho, \vartheta - t) dt \rightarrow 2\pi \delta_\vartheta \quad (2.43)$$

bezüglich der schwachen Konvergenz von Maßen, d.h. für jede stetige 2π -periodische Funktion φ ist

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) \varphi(t) dt = \varphi(\vartheta). \quad (2.44)$$

Beweis.

1. Partialbruchzerlegung von $P(\rho, \vartheta - t)$ nach ρ sowie Entwickeln in die geometrische Reihe liefert

$$P(\rho, \vartheta - t) = \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho e^{i(\vartheta-t)})(1 - \rho e^{-i(\vartheta-t)})} \quad (2.45)$$

$$= 1 + \frac{\rho e^{i(\vartheta-t)}}{1 - \rho e^{i(\vartheta-t)}} + \frac{\rho e^{-i(\vartheta-t)}}{1 - \rho e^{-i(\vartheta-t)}} \quad (2.46)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho^n e^{in(\vartheta-t)} + \rho^n e^{-in(\vartheta-t)}) \quad (2.47)$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\vartheta - t). \quad (2.48)$$

Sei $u_n(\rho, \vartheta - t) := \rho^n \cos n(\vartheta - t)$. Die Reihe der u_n konvergiert für $\rho < 1$ absolut und gleichmäßig, ebenso die Reihe der partiellen Ableitungen nach ρ und ϑ beliebiger Ordnung. Wir dürfen daher Differentiation und Summation vertauschen und erhalten, dass sich insbesondere die Gültigkeit der Laplace-Gleichung von den u_n auf u überträgt, d.h. $P(\rho, \vartheta - t)$ ist harmonisch auf $B_1(0)$.

2. Nach Definition ist $P(\zeta) = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta}e^{it}|^2} > 0$, wobei $\zeta = \rho e^{i(\vartheta-t)}$. Die Poisson'schen Integralformel angewandt auf $u \equiv 1$ liefert

$$1 = u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) dt. \quad (2.49)$$

3. Nach dem gerade Gezeigten gilt für beliebiges aber festes $\vartheta \in [0, 2\pi]$:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) \varphi(t) dt. \quad (2.50)$$

Damit können wir schreiben

$$\begin{aligned} \left| \varphi(\vartheta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) \varphi(t) dt \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) (\varphi(t) - \varphi(\vartheta)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta-\delta}^{\vartheta+\delta} P(\rho, \vartheta - t) |\varphi(t) - \varphi(\vartheta)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta+\delta}^{2\pi-(\vartheta-\delta)} P(\rho, \vartheta - t) |\varphi(t) - \varphi(\vartheta)| dt. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Wir wählen nun im ersten Summanden $\delta > 0$ so, dass $|\varphi(t) - \varphi(\vartheta)| < \varepsilon$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Somit kann der erste Summand in (2.51) nach oben durch $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ abgeschätzt werden.

Für $t \neq \vartheta$ gilt $\lim_{\rho \rightarrow 1} P(\rho, \vartheta - t) = 0$ punktweise. Diese Konvergenz ist sogar gleichmäßig auf $t \in [0, 2\pi] \setminus (\vartheta - \delta, \vartheta + \delta)$. Für ein genügend nahe bei 1 liegendes ρ kann der zweite Summand daher durch $2\varepsilon \sup\{|\varphi(t)| : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ abgeschätzt werden. Insgesamt kann also der ganze Ausdruck (2.51) beliebig klein gemacht werden, d.h. die behauptete Identität gilt. □

Korollar 2.21 (Dirichlet'sches Problem für die Einheitskreisscheibe). *Ist eine beliebige stetige 2π -periodische Funktion $\varphi(\vartheta)$ gegeben, so gibt es genau eine innerhalb der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ harmonische und auf $\overline{B_1(0)}$ stetige Abbildung $u : \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $u(e^{i\vartheta}) = \varphi(\vartheta)$ für alle $\vartheta \in [0, 2\pi)$.*

Beweis. Existenz: Es sei für $\rho < 1$

$$u(\rho e^{i\vartheta}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\rho, \vartheta - t) \varphi(t) dt. \quad (2.52)$$

Da $P(\rho, \vartheta - t)$ für $\rho < 1$ stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, dürfen wir Integration und partielle Differentiation in (2.52) vertauschen. Anwenden des Laplace-Operators zeigt, dass u harmonisch ist. Aufgrund der Eigenschaft (3) des Poisson Kerns aus Satz 2.20 erfüllt u die Randbedingung $\lim_{\rho \rightarrow 1} u(\rho e^{i\vartheta}) = \varphi(\vartheta)$, d.h. u ist eine harmonische Fortsetzung von φ in das Innere der Einheitskreisscheibe.

Eindeutigkeit: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Dirichlet'schen Problems, d.h.

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} u_1(\rho e^{i\vartheta}) = \lim_{\rho \rightarrow 1} u_2(\rho e^{i\vartheta}) = \varphi(\vartheta). \quad (2.53)$$

Dann ist $u := u_1 - u_2$ auch eine harmonische Abbildung, die am Rand der Einheitskreisscheibe identisch Null ist. Wegen der Poisson'schen Integralformel ist u daher in ganz $B_1(0)$ identisch Null, also $u_1 = u_2$ in ganz $B_1(0)$. □

Da die eindeutige Lösung (2.52) des Dirichlet'schen Problems für $B_1(0)$ unendlich oft differenzierbar ist, erhalten wir eine entsprechende Regularitätsaussage für Funktionen, welche die Mittelwerteigenschaft erfüllen.

Korollar 2.22. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine stetige Funktion $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch in D , wenn u die Mittelwerteigenschaft besitzt. Insbesondere ist jede stetige Funktion $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Mittelwerteigenschaft besitzt, unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Wir wissen schon, dass harmonische Funktionen unendlich oft differenzierbar sind und die Mittelwerteigenschaft erfüllen. Sei daher u stetig auf \overline{D} und erfülle die Mittelwerteigenschaft in D . Sei $z \in D$ und $\rho > 0$ so, dass $\overline{B_\rho(z)} \subseteq D$.

Sei $U : B_\rho(z) \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung des Dirichlet'schen Problems auf $B_\rho(z)$ mit Randdaten $U(z + \rho e^{i\vartheta}) := u(z + \rho e^{i\vartheta})$. Die Funktion $h := U - u$ ist stetig auf $\overline{B_\rho(z)}$ und erfüllt die Mittelwerteigenschaft. Anwenden des Maximumprinzips 2.18.2 auf h liefert, dass U und u auf ganz $\overline{B_\rho(z)}$ übereinstimmen, d.h. u ist harmonisch. □

Korollar 2.23. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $u_n : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, welche in D harmonisch sind. Wenn $u_n \rightarrow u$ gleichmäßig auf \overline{D} konvergiert, dann ist auch u harmonisch auf D .

Beweis. Da alle u_n in \overline{D} stetig sind, gilt das auch für u . Sei $z \in D$ und $\rho > 0$ so, dass $\overline{B_\rho(z)} \subseteq D$. Aufgrund der Mittelwertegenschaft der u_n ist

$$\begin{aligned} \left| u(z) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{it}) dt \right| &\leq |u(z) - u_n(z)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z + \rho e^{it}) - u_n(z + \rho e^{it})| dt \\ &\leq 2 \sup_{w \in B_\rho(z)} |u(w) - u_n(w)| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

d.h. u erfüllt die Mittelwertegenschaft auf D und ist deshalb dort harmonisch. \square

2.4 Potenzreihen

Im Folgenden werden sich das aus der reellen Analysis bekannten Wurzel- bzw. Quotientenkriterium als nützlich erweisen.

Satz 2.24 (Cauchy-Hadamard). *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist der Konvergenzradius R gegeben durch*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}, \quad (2.55)$$

d.h. die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ konvergiert auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B}_\rho(z_0)$ mit $\rho < R$ gleichmäßig und absolut. Sie divergiert außerhalb jeder offenen Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit $r > R$.

Für den Rand des Konvergenzkreises $B_R(z_0)$ ist ohne weitere Voraussetzungen keine Aussage möglich.

Proposition 2.25 (Quotientenkriterium). *Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dann gilt*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq R \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \quad (2.56)$$

Insbesondere ist $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ falls dieser Limes existiert.

Definition 12. *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, so heißt eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch in D , wenn es um jedes $z_0 \in D$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius gibt, sodass dort*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n. \quad (2.57)$$

Analytische Funktionen in D dürfen addiert, multipliziert und - bei Nullstellenfreiheit - auch dividiert werden ohne dass die Analytizität verloren geht. Auch Differentiation führt aus dem Bereich der analytischen Funktion nicht hinaus. Ferner ist die Komposition analytischer Funktionen auf ihren jeweiligen Definitionsbereich wieder analytisch.

Die folgende Aussage scheint trivial, bedarf jedoch trotzdem eines Beweises.

Proposition 2.26. *Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit positivem Konvergenzradius R . Dann ist f analytisch in $B_R(z_0)$*

Beweis. Sei oBdA. $z_0 = 0$ und $\zeta \in B_R(0)$. Wir müssen zeigen, dass sich f um ζ in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Wähle dazu $r > 0$ so, dass $B_r(\zeta) \subseteq B_R(0)$. Wir überlegen uns, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - \zeta)^k \zeta^{n-k} \quad (2.58)$$

absolut konvergiert: Für $z \in B_r(\zeta)$ gilt $|\zeta| + |\zeta - z| < R$, daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|\zeta| + |z - \zeta|)^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |z - \zeta|^k |\zeta|^{n-k}, \quad z \in B_r(\zeta). \quad (2.59)$$

Die Reihe (2.58) konvergiert also tatsächlich absolut und wir dürfen die Summationsreihenfolge vertauschen.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} \zeta^{n-k} \right) (z - \zeta)^k \quad (2.60)$$

ist somit die gesuchte konvergente Potenzreihenentwicklung um ζ . □

Lemma 2.27. *Hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ den Konvergenzradius R , so hat auch die durch formale gliedweise Differentiation entstehende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$ den Konvergenzradius R .*

Beweis. Nach Cauchy-Hadamard berechnet sich der reziproke Konvergenzradius der formalen Ableitung zu

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |(n+1)a_{n+1}|^{1/n} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |na_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

□

Satz 2.28. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist die durch $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ definierte Funktion $f : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, und die Ableitung kann gliedweise gebildet werden:*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}. \quad (2.62)$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $z_0 = 0$. Um zu beweisen, dass f holomorph ist und seine formale Ableitung als wirkliche Ableitung hat, betrachten wir die Differenz zwischen Differenzenquotient und formaler Ableitung:

$$\frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} \quad (2.63)$$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt dabei für den n -ten Summanden

$$a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) = a_n h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} z^{n-k}. \quad (2.64)$$

Dieser Ausdruck lässt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} &\leq n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \\ &= n(n-1) (|h| + |z|)^{n-2} \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei wir folgende Nebenrechnung für Binomialkoeffizienten verwendet haben:

$$n(n-1) \binom{n-2}{k-2} = k(k-1) \binom{n}{k} \geq \binom{n}{k}, \quad \text{für } k \geq 2. \quad (2.66)$$

Sei nun $z \in B_R(0)$ beliebig aber fest und $\rho < R$. Wir wählen ein $\delta > 0$ so klein, dass die Kugel $B_\delta(z)$ ganz in $B_\rho(0)$ liegt. Dann gilt für $h \in B_\delta(0)$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right) \right| \\ &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |h|^{k-2} |z|^{n-k} \\ &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|h| + |z|)^{n-2} \\ &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| \rho^{n-2}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

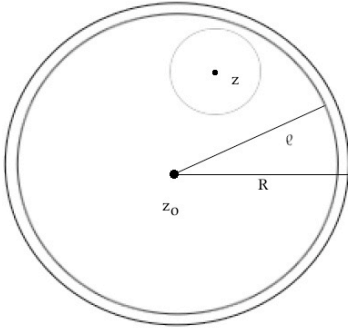


Abbildung 4: Konvergenzbereich

Nach Lemma 2.27 hat die Potenzreihe $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$ Konvergenzradius R und konvergiert daher auf $B_\rho(0)$ sogar absolut. Daher ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n z^{n-1} \right| = 0. \quad (2.68)$$

□

Korollar 2.29. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius R . Dann ist f in $B_R(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt die Taylorsche Koeffizientenformel

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.69)$$

Definition 13. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine in D analytische Funktion. Ist $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, aber $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, so nennen wir z_0 eine n -fache Nullstelle von f .

Eine Potenzreihe, die eine Nullstelle unendlicher Ordnung besitzt, muss wegen Korollar 2.29 in ihrem ganzen Konvergenzkreis verschwinden. Für analytische Funktionen ist die Situation ähnlich.

Satz 2.30 (Identitätssatz). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine in G analytische Funktion. Hat die Menge $\{z \in G : f(z) = 0\}$ einen Häufungspunkt in G , so ist $f = 0$.

Beweis. Sei A die Menge der Häufungspunkte von $\{z \in G : f(z) = 0\}$, welche in G liegen. Als Menge von Häufungspunkten ist A abgeschlossen. Wir zeigen, dass A auch offen ist, woraus dann aufgrund des Zusammenhangs von G die Behauptung folgt. Sei also $z_0 \in A \subseteq G$. Wir entwickeln f um z_0 in eine konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (2.70)$$

Angenommen die Vielfachheit der Nullstelle z_0 ist endlich, also etwa k

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad \text{mit } g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n. \quad (2.71)$$

g ist stetig (sogar analytisch) in einer Kreisscheibe um z_0 und erfüllt $g(z_0) \neq 0$. Daher ist $g(z) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung U um z_0 . Wegen (2.71) ist somit auch $f \neq 0$ in $U \setminus \{z_0\}$, also $U \cap A \setminus \{z_0\} = \emptyset$, im Widerspruch dazu dass z_0 ein Häufungspunkt von A ist. Daher ist die Vielfachheit von z_0 unendlich und f verschwindet auf der ganzen Umgebung U , womit A als offen erkannt ist. \square

Bemerkung 2.31. Aus dem Beweis des Identitätssatzes folgt unmittelbar: Ist z_0 eine k -fache Nullstelle der analytischen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, so gibt es eine Umgebung $U \subseteq G$ von z_0 und eine in U nullstellenfreie analytische Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$.

Beispiel 2.32. e^z ist nach Definition 1 in ganz \mathbb{C} analytisch. Wegen Definition 2 sind damit auch $\sin z$ und $\cos z$ in ganz \mathbb{C} analytisch.

Beispiel 2.33. Die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad (2.72)$$

hat Konvergenzradius 1 und definiert dadurch zunächst auf $B_1(0)$ eine holomorphe Funktion. Setzt man $g(z) := f(z - 1)$, so setzt g den reellen Logarithmus auf $B_1(1)$ fort. g erfüllt also Gleichung $\exp(g(z)) = z$ und wird daher komplexer Logarithmus genannt und – etwas mehrdeutig – wieder mit \ln bezeichnet. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt nämlich auch $g(z) + 2k\pi i$ die angegebenen Funktionalgleichung.

Achtung: Die Gleichung $\ln \exp(z) = z$ ist im allgemeinen falsch!

Wie wir später sehen werden, kann man \ln nicht zu einer auf ganz \mathbb{C}^\times holomorphen Funktion fortsetzen, wohl aber zu einer holomorphen Funktion auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Beispiel 2.34. $z^\sigma := \exp(\sigma \ln z)$ mit $\sigma \in \mathbb{C}$ ist zunächst auch nur für $z \in B_1(1)$ definiert und dort holomorph. Wie im Reellen gilt auch hier die Potenzreihendarstellung

$$(1 + z)^\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\sigma}{k} z^k := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma \cdot (\sigma - 1) \cdots (\sigma - k + 1)}{k!} z^k. \quad (2.73)$$

3 Komplexe Integralrechnung

Im Folgenden bezeichne G stets ein Gebiet. Es sei daran, erinnert, dass Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$ nach Proposition 1.8 stets auch wegzusammenhängend sind. Wir definieren nun *Pfade* als parametrisierte Wege, welche stückweise differenzierbar sein sollen.

Definition 14. Ein Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, für welchen es eine Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Parameterintervalls gibt, sodass $\gamma|_{(t_i, t_{i+1})}$ stetig differenzierbar ist, heißt Pfad.

Bemerkung 3.1. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad, so können wir stets auch den Pfad $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + t(b - a))$ betrachten und uns daher oBdA. auf das Parameterintervall $[0, 1]$ beschränken.

Folgende Operationen führen aus der Menge der Pfade nicht heraus:

Verkettung: Sind $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, zwei Pfade mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, so ist auch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ ein Pfad,

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Umkehrung: Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad, dann ist auch $\hat{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$ ein Pfad.

Pfade gehen also aus Kurven (vgl. Abschnitt 2.2) durch sukzessive Verkettung bzw. Umkehrung hervor.

Es heißt $\gamma(a)$ Anfangspunkt und $\gamma(b)$ Endpunkt von γ . Einen Pfad mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ nennen wir *geschlossen*. Insbesondere ist der Pfad $\gamma + \hat{\gamma}$ stets geschlossen. Auch der konstante Pfad $\epsilon_z(t) := z$ ist geschlossen.

Das Bild eines Pfades $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ werden wir im weiteren mit dem Symbol γ^* bezeichnen. Wenn Verwechslungen nicht zu erwarten sind, insbesondere bei Kreisen und Polygonen gehen wir auch umgekehrt vor und verwenden das Bild als Bezeichnung für den Pfad (wobei wir mathematische positive Orientierung unterstellen), also etwa $\partial\mathbb{E}$ für den Pfad $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$, etc.

Achtung: Die Bezeichnungen *Pfad*, *Kurve* und *Weg* sind in der Literatur nicht einheitlich! Bei uns ist eine Kurve stets differenzierbar, ein Pfad stets stückweise differenzierbar, und ein Weg lediglich stetig.

3.1 Pfadintegrale

Für jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Definition

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

sinnvoll, da $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reellwertige stetige Funktionen sind, deren Integrale somit existieren. Wir präzisieren nun eine Vorgangsweise, die schon bei der Behandlung harmonischer Funktionen sehr nützlich war.

Definition 15. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad. Dann ist das (Pfad-)Integral über f längs γ definiert durch

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt := \sum_{i=1}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt. \quad (3.3)$$

Ist der Pfad γ geschlossen, benutzt man gelegentlich auch das Symbol $\oint_{\gamma} f(z) dz$.

Es ließe sich natürlich in (3.2) die Stetigkeit durch Messbarkeit bzw. in (3.3) die stückweise stetige Differenzierbarkeit durch Rektifizierbarkeit ersetzen, wir wollen das hier aber nicht weiterverfolgen.

Bemerkung 3.2.

1. Sind $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Pfade, die durch Reparametrisierung auseinander hervorgehen, also $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$, für einen Diffeomorphismus $\phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, dann stimmen die Pfadintegrale überein:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt = \int_a^b f(\gamma_2 \circ \phi(t)) \dot{\gamma}_2(\phi(t)) \phi'(t) dt \quad (3.4)$$

$$= \int_c^d f(\gamma_2(s)) \dot{\gamma}_2(s) ds = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (3.5)$$

2. Wegen

$$\int_{\tilde{\gamma}} f dz = \int_1^0 f \circ \gamma(t) \dot{\gamma}(t) dt = - \int_{\gamma} f dz \quad (3.6)$$

schreibt man für die Umkehrung des Pfades γ manchmal auch $-\gamma$.

Definition 16. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein Pfad. $L(\gamma) := \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ heißt euklidische Länge von γ (Die Größe $|\dot{\gamma}(t)|$ nennt man manchmal auch Geschwindigkeit von γ .) Für das Supremum des Betrags einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ auf der kompakten Menge $\gamma^* \subset D$ schreiben wir $\|f\|_{\gamma}$.

Proposition 3.3 (Standardabschätzung). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ ein Pfad. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \|f\|_{\gamma}. \quad (3.7)$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für Pfade $\gamma(t) := t$, $t \in [a, b]$. Sei $\phi := \arg \left(\int_a^b f(t) dt \right)$. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = e^{-i\phi} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{-i\phi} f(t) dt \quad (3.8)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\phi} f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\phi} f(t)) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad (3.9)$$

Der allgemeine Fall folgt nun sofort aus der Definition des Pfadintegrals. \square

Beispiel 3.4 (Das „wichtigste Integral“ der Funktionentheorie). Sei $f(z) = (z - \zeta)^n$ und $\gamma(t) = \zeta + re^{it}$, der Kreis um ζ mit Radius r . Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(z) dt = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{it(n+1)} dt \quad (3.10)$$

$$= \frac{r^{n+1} e^{it(n+1)}}{n+1} \Big|_0^{2\pi} = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } n = -1, \\ 0 & \text{für sonst.} \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2 Stammfunktionen

Eine differenzierbare Funktion F , welche $F' = f$ erfüllt, nennt man bekanntlich eine Stammfunktion von f . Man nennt f in diesem Fall *integrabel*.

Satz 3.5. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. f ist genau dann integrabel in D , wenn für jeden geschlossenen Pfad $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ gilt $\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0$.

Um diesen Satz zu zeigen benötigen wir noch folgende Hilfsaussage.

Lemma 3.6. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind äquivalent:

1. $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Stammfunktion von f .
2. $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Potential von f , d.h. für jeden Pfad γ in D mit Anfangspunkt w und Endpunkt z gilt

$$\int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(w). \quad (3.12)$$

Beweis. (1) \Rightarrow (2) ist ein Übungsbeispiel. Es bleibt daher (2) \Rightarrow (1) zu zeigen: Wir haben den Differentialquotienten

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{1}{z - w} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta, \quad (3.13)$$

zu berechnen, wobei wir oBdA. $w \in B_r(z) \subseteq D$ annehmen können; die geradlinige Verbindung $\gamma_w(t) := w + t(z - w)$ ist dann ein Pfad, der w und z verbindet. Es ist dann trivialerweise

$$\frac{1}{z - w} \int_{\gamma_w} f(z) d\zeta = \frac{1}{z - w} \int_0^1 f(z)(z - w) d\zeta = f(z). \quad (3.14)$$

Beachte $L(\gamma) = |z - w|$ und

$$\left| \frac{1}{z - w} \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta - f(z) \right| = \left| \frac{1}{z - w} \int_{\gamma_w} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \quad (3.15)$$

$$\leq \frac{L(\gamma_w)}{|z - w|} \|f - f(z)\|_{\gamma_w} = \|f - f(z)\|_{\gamma_w}. \quad (3.16)$$

Wegen der Stetigkeit von f strebt die rechte Seite von (3.15) für $w \rightarrow z$ gegen 0, i.e. F ist in z differenzierbar und $F'(z) = f(z)$. \square

Bemerkung 3.7. Für die Implikation (2) \Rightarrow (1) genügt es offensichtlich, sich auf die geradlinige Verbindung von w nach z zu beschränken. 2. ist somit äquivalent zu 2': Für jedes $z \in D$ gibt es eine Umgebung U , sodass für jedes $w \in U$ gilt: $\int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta = F(z) - F(w)$.

Beweis von Satz 3.5. Wenn f integrierbar ist, es also in D eine Stammfunktion F gibt, gilt nach dem gerade gezeigten Lemma für jeden in D verlaufenden geschlossenen Pfad γ :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0. \quad (3.17)$$

Gelte nun $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ für jeden in D verlaufenden geschlossenen Pfad γ . Da Pfade stets in Zusammenhangskomponenten verlaufen, können wir für den Rest des Beweises annehmen, dass D sogar ein Gebiet ist. Es gibt daher zu je zwei Punkten in D einen verbindenden Pfad. Wähle $z_0 \in D$ und setze

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta, \quad (3.18)$$

wobei γ_z ein beliebiger Pfad in D ist, welcher z_0 mit z verbindet. Diese Definition von F ist unabhängig vom gewählten Pfad, denn ist $\tilde{\gamma}_z$ ein anderer Pfad in D , welcher z_0 mit z verbindet, gilt

$$0 = \oint_{\tilde{\gamma}_z - \gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta. \quad (3.19)$$

Um zu zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, genügt es zu zeigen, dass F ein Potential ist. Sei also γ irgendein Pfad in D von w nach z . Wir wählen Pfade

γ_w, γ_z in D von z_0 nach w bzw. z . Dann ist $\gamma_w + \gamma - \gamma_z$ ein geschlossener Pfad und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma_w + \gamma - \gamma_z} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta + \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \\ &= F(w) + \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta - F(z). \end{aligned} \quad (3.20) \quad \square$$

Bemerkung 3.8.

1. Ist G ein Gebiet und sind F_1 und F_2 zwei Stammfunktion von f auf G , so ist $F := F_1 - F_2$ konstant, denn für festes $z_0 \in G$ und geeignetes γ_w , welches z_0 mit w verbindet, gilt

$$\begin{aligned} F(z_0) - F(w) &= (F_1(z_0) - F_1(w)) - (F_2(z_0) - F_2(w)) \\ &= \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_w} f(\zeta) d\zeta = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

2. Mittels Stammfunktionen ist es möglich Integrale längs *Wegen* $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ zu definieren. Man setzt dazu

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{i=1}^n [F_i(\gamma(t_i)) - F_i(\gamma(t_{i-1}))] \quad (3.22)$$

wobei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Partition von $[a, b]$ ist und F_i eine Stammfunktion von f , welche auf einer $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ enthaltenden Kreisscheibe definiert ist. Man muss dazu zeigen, dass (3.22) von der gewählten Partition unabhängig ist. Wir verweisen dazu auf [6, III.4].

Beispiel 3.9. Da $\int_{\partial B_\rho(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$ für jede Kreisscheibe mit Radius ρ um 0 gilt, kann es keine Umgebung U von 0 geben, sodass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ in $U \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion hat. Wohl aber gibt es eine Stammfunktion von f auf der geschlitzten Ebene, i.e. auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Mehr dazu in den nächsten beiden Abschnitten!

Die Bedingung, dass alle Integrale $\oint_{\gamma} f(z) dz$ längs aller in G geschlossenen Pfade γ verschwinden, ist in der Praxis nicht verifizierbar. Für spezielle Gebiete in $G \subseteq \mathbb{C}$ kann diese Bedingung aber wesentlich abgeschwächt werden.

Definition 17. Eine Menge $S \subseteq \mathbb{C}$ heißt *sternförmig*, wenn es ein $z \in S$ gibt, so dass für jedes $w \in S$ die Strecke $[z, w] := \{(1-t)z + tw : t \in [0, 1]\}$ in S liegt; z heißt ein *Zentrum* von S . Jede sternförmige offene Menge ist ein Gebiet und wird *Sterngebiet* genannt.

Bemerkung 3.10. Jede konvexe Menge ist sternförmig und jede sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend. Die Umkehrungen gelten klarerweise nicht

Beispiel 3.11.

1. Jede Kugel $B_\rho(z)$ ist ein Sterngebiet und jedes $w \in B_\rho(z)$ ist ein Zentrum.
2. Sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ drei affin unabhängige Punkte, so heißt die kompakte konvexe Menge $\Delta(z_1, z_2, z_3) := \text{conv}(\{z_1, z_2, z_3\})$ das Dreieck mit Eckpunkten z_1, z_2, z_3 . Der geschlossene Streckenzug $\partial\Delta := [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, z_1]$ überdeckt den Rand von Δ . Die Menge Δ ist sternförmig und Δ° ein Sterngebiet.

Satz 3.12 (Morera). *Es sei G ein Sterngebiet mit Zentrum z_1 und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subseteq G$, das z_1 als Eckpunkt hat, gelte*

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Dann ist f integabel und $F(z) := \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta$ ist eine Stammfunktion zu f in G .

Beweis. Da G ein Sterngebiet ist, gilt $[z_1, z] \subseteq G$ für alle $z \in G$, daher ist F wohldefiniert. Sei nun $z_0 \in G$ fest und r so klein, dass für $z \in B_r(z_0)$ das Dreieck $\Delta(z_0, z_1, z)$ noch ganz in G liegt. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral von f längs $\partial\Delta$ und

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[z_1, z_0]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[z_0, z]} f(\zeta) d\zeta. \quad (3.23)$$

Somit erfüllt F die Bedingung (ii') aus Bemerkung 3.7 und wir sind fertig. \square

Für jeden Pfad $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ hat jede stetige Funktion f auf der kompakten Menge γ^* eine Stammfunktion. Geht man zu offenen Mengen $D \subseteq \mathbb{C}$ über, so bleibt diese Aussage nur mehr für integrablen Funktionen richtig. Wir zeigen nun, dass holomorphe Funktionen auf Sterngebieten stets die Voraussetzungen des Satzes von Morera erfüllen, also integabel sind.

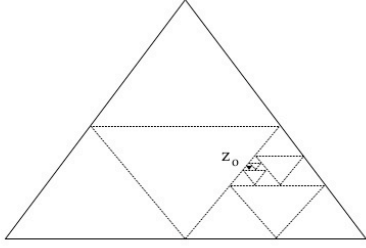
Lemma 3.13 (Integrallemma von Goursat). *Es sei f holomorph in der offenen Menge D . Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subseteq D$*

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Ist D ein Sterngebiet, ist f also insbesondere integabel.

Beweis. Für den Beweis benötigen wir zunächst zwei elementargeometrische Fakten über den Umfang von Dreiecken:

1. Für $w, z \in \Delta$ gilt stets $|w - z| \leq L(\partial\Delta)$, denn für jedes feste z nimmt die Funktion $w \mapsto |w - z|$ ihr Maximum an einem Extrempunkt von Δ an.
2. $L(\partial\Delta') = \frac{1}{2}L(\partial\Delta)$ für jedes der vier kongruenten Teildreiecke Δ' , die durch Ziehen der Verbindungsstrecken der Seitenmittelpunkte von Δ entstehen.



Wir betrachten das Pfadintegral von f längs eines solchen Dreiecks.

$$a(\Delta) := \oint_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta. \quad (3.24)$$

Teilt man Δ durch Ziehen der Verbindungsstrecken der Seitenmittelpunkte in vier kongruente Teildreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, dann gilt

$a(\Delta) = \sum_{i=1}^4 a(\Delta_i)$, denn die Strecken zwischen den Seitenmittelpunkten werden je zweimal, und zwar entgegengesetzt, durchlaufen, so dass sich die zugehörigen Integrale wegheben, während die Summe der übrigen Seiten der Δ_i gerade $\partial\Delta$ ist.

Unter den vier Integralen $a(\Delta_i)$ wählen wir jenes aus, das den größten Betrag hat und bezeichnen das zugehörige Dreieck mit Δ^1 . Dann gilt $|a(\Delta)| \leq 4|a(\Delta^1)|$.

Iteration dieses Verhaltens liefert eine absteigende Folge $\Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \dots \supset \Delta^n$ von kompakten Dreiecken, so dass gilt

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta^n) = 2^{-n} L(\partial\Delta). \quad (3.25)$$

Der Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^k$ besteht aufgrund des Schachtelungsprinzips aus genau einem Punkt $z_0 \in \Delta$. Da f holomorph ist, ist die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \quad (3.26)$$

in ganz D stetig und erfüllt $g(z_0) = 0$. Insbesondere haben wir

$$g(z)(z - z_0) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) \quad (3.27)$$

Aufgrund der Existenz von Stammfunktionen verschwinden für alle $n \geq 1$ die beiden letzten Integrale auf der rechten Seite von (3.27):

$$\oint_{\partial\Delta^n} f(z_0) dz = 0 \quad \text{und} \quad \oint_{\partial\Delta^n} f'(z_0)(z - z_0) dz = 0. \quad (3.28)$$

Es gilt daher

$$|a(\Delta^n)| = \left| \oint_{\partial\Delta^n} (z - z_0)g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial\Delta^n} (|z - z_0| |g(z)|) L(\partial\Delta^n). \quad (3.29)$$

Wir wählen nun $\zeta_n \in \Delta^n$ so, dass die stetige Funktion g auf Δ^n dort ihr Maximum annimmt. Verwenden wir nun die Abschätzungen (3.25) zusammen mit der Beobachtung 1 am Anfang des Beweises, so ergibt sich

$$|a(\Delta)| \leq 4^n |a(\Delta^n)| \leq 4^n |g(\zeta_n)| L(\partial\Delta^n)^2 = |g(\zeta_n)| L(\partial\Delta)^2. \quad (3.30)$$

Da $\zeta_n \in \Delta^n$, gilt sicherlich $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = z_0$. Nun ist g aber bei z_0 stetig und daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\zeta_n) = g(z_0) = 0$. Somit erhalten wir abschließend aus (3.30)

$$|a(\Delta)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |g(\zeta_n)| L(\partial\Delta)^2 = 0. \quad \square$$

Das Bemerkenswerte am Goursat'schen Beweis ist, dass nur die Differenzierbarkeit von f , und nicht die stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt werden muss. Hat man hingegen die stetige Differenzierbarkeit zur Verfügung, kann man das Integrallemma von Goursat als Spezialfall der Formel von Stokes ansehen. Für Dreiecke in \mathbb{R}^2 lautet sie bekanntlich:

Bemerkung 3.14. Es seien p, q reellwertige und stetig differenzierbare Funktionen in der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gilt für den Rand $\partial\Delta$ eines jeden Dreiecks $\Delta \subseteq D$

$$\oint_{\partial\Delta} (p dx + q dy) = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.31)$$

Hieraus ergibt sich sofort das Integrallemma, wenn man nur voraussetzt, dass die Ableitung f' der holomorphen Funktion f stetig in D ist. Es sind dann nämlich $u := \operatorname{Re} f$ und $v := \operatorname{Im} f$ stetig differenzierbar, und es folgt mit $dz = dx + i dy$ aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Delta} f(z) dz &= \oint_{\partial\Delta} (u dx - v dy) + i \oint_{\partial\Delta} (v dx + u dy) \\ &= - \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.3 Cauchy'scher Integralsatz

In Sterngebieten ist nach dem Lemma von Goursat jede holomorphe Funktion f integrierbar und

$$F(z) := \int_{[z_1, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (3.33)$$

ist eine Stammfunktion, wenn nur z_1 ein Zentrum des Sterngebiets ist. Wir wollen nun umgekehrt zeigen, dass integrierbare Funktionen stets holomorph sind. Dazu benötigen wir zunächst eine technische Hilfsaussage über kreisförmige Pfade.

Lemma 3.15 (Zentrierungslemma). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $K \subseteq D$ eine Kreisscheibe mit $z_0 \in K$ und $\overline{K} \subseteq D$. Dann gilt für jede um z_0 zentrierte Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit $B_r(z_0) \subseteq K$*

$$\oint_{\partial K} f(z) dz = \oint_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz. \quad (3.34)$$

Satz 3.16 (Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $\overline{B_r}(z_0) \subseteq D$, dann gilt für alle $z \in B_r(z_0)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.35)$$

Beweis. Sei $z \in B_r(z_0)$ beliebig aber fest. Für $\zeta \in D \setminus \{z\}$ ist die Funktion

$$g(\zeta) := \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z) & \text{für } \zeta \neq z, \\ 0 & \text{für } \zeta = z \end{cases} \quad (3.36)$$

holomorph in $D \setminus \{z\}$ und stetig in D . Also gilt nach dem Zentrierungslemma $\oint_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta) d\zeta = 0$; sei $\delta > 0$ so klein, dass einerseits $\overline{B_\delta} \subseteq B_r(z_0)$ und andererseits $|g(\zeta)| < \epsilon$ für $\zeta \in B_\delta(z)$. Dann ist nach der Standardabschätzung

$$\left| \oint_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta) d\zeta \right| = \left| \oint_{\partial B_\delta(z)} g(\zeta) d\zeta \right| \leq 2\pi r \epsilon \quad (3.37)$$

beliebig klein und verschwindet daher. Somit ergibt sich, wieder mit dem Zentrierungslemma,

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial B_r(z_0)} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \oint_{\partial B_\delta(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta - f'(z) \oint_{\partial B_r(z_0)} d\zeta \\ &= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \quad \square \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die Cauchy'sche Integralformel bleibt richtig, wenn man anstelle von Scheiben etwa Dreiecke oder Rechtecke in D betrachtet. Wir werden das in den nächsten Abschnitten weitgehend verallgemeinern. Auch lassen sich aus der Cauchyschen Formel durch geschickte Manipulation weitere Integralformeln herleiten:

Satz 3.17. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $B := B_R(0)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{B} \subseteq D$. Dann gilt für alle $z \in B$:

1. Poisson'sche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \frac{R^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} d\zeta. \quad (3.39)$$

2. Schwarz'sche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{\operatorname{Re} f(\zeta)}{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\zeta + i \operatorname{Im} f(0). \quad (3.40)$$

Beweis. Übungsbeispiel □

Es wurde bereits im Abschnitt über Potenzreihen gezeigt, dass wenn f in einer Kreisscheibe in eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ entwickelbar ist, f dort holomorph und beliebig oft komplex differenzierbar ist. Bemerkenswerter Weise gilt auch die Umkehrung:

Satz 3.18 (Cauchy-Taylor). *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $B := B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe um z_0 mit $\bar{B} \subseteq D$. Dann gilt für $z \in B$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \quad (3.41)$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius von (3.41) mindestens r und f ist in D analytisch.

Beweis. Da f in D holomorph ist, gilt für $z \in B_r(z_0)$ die Cauchysche Integralformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.42)$$

Für $\rho < r$, $z \in B_\rho(z_0)$ und $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ gilt ferner

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \leq \frac{\rho}{r} < 1. \quad (3.43)$$

Daher konvergiert

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \quad (3.44)$$

gleichmäßig und absolut für $z \in B_\rho(z_0)$. Wir dürfen somit Integration und Summation vertauschen und erhalten für $z \in B_\rho(z_0)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Da diese Darstellung für alle $z \in B_\rho(z_0)$ mit $\rho < r$ gilt, ist der Konvergenzradius mindestens r . □

Bemerkung 3.19. Aus dem Satz von Cauchy-Taylor und der Taylor'schen Formel (2.69) folgt sofort

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (3.46)$$

für $z = z_0$. Ist nun $B_\varepsilon(z)$ eine ganz in $B_r(z_0)$ liegende, um z zentrierte Kreisscheibe, dann liefert das Zentrierungslemma die Gültigkeit von

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (3.47)$$

auf ganz $B_r(z_0)$.

Proposition 3.20 (Cauchy'sche Abschätzungen). *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $B := B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe um z_0 mit $\bar{B} \subseteq D$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in B_r(z_0)$*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! r}{\text{dist}(z, \partial B)^{n+1}} \|f\|_{\partial B} \quad \text{bzw.} \quad |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial B}. \quad (3.48)$$

Beweis. Aufgrund der Cauchy'schen Integralformeln für Ableitungen

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (3.49)$$

und der Standardabschätzung gilt

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{\|f\|_{\partial B}}{\text{dist}(z, \partial B)^{n+1}} 2\pi r. \quad (3.50)$$

Setzt man $z = z_0$, gilt $\text{dist}(z, \partial B) = r$. Damit ergibt sich die zweite Behauptung. \square

Die Abschätzung (3.48) zeigt, dass die Folge $\left\{ r^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right\}_{n=0}^\infty$ stets beschränkt ist. In Wirklichkeit gilt viel mehr; die Folge ist sogar l^2 . Um dies zu sehen, bemerken wir, dass auf Kreislinien $z = z_0 + r e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Potenzreihen zu trigonometrischen Reihen werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\varphi}. \quad (3.51)$$

Für diese gelten bekanntlich die Orthonormalitätsrelationen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 1 & \text{für } m = n. \end{cases} \quad (3.52)$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in (3.51) dürfen wir Integration und Summation vertauschen und es folgt

$$\langle f_r, e^{in\varphi} \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \overline{e^{in\varphi}} d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\varphi} d\varphi = a_n r^n, \quad (3.53)$$

wobei $f_r(\varphi) := f(z_0 + r e^{i\varphi})$. Beachte, dass $\langle f_r, e^{in\varphi} \rangle$ gerade die Koeffizienten in der Fourier-Entwicklung von f_r sind.

Proposition 3.21 (Gutzmer'sche Formel). *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $B := B_r(z_0)$ eine Kreisscheibe um z_0 mit $\overline{B} \subseteq D$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right|^2 r^{2n} \leq \|f\|_{\partial B_r(z_0)}^2. \quad (3.54)$$

Beweis. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius R . Für festes $r < R$ ist die Funktion $f_r(\varphi) := f(z_0 + re^{i\varphi})$ stetig auf $[0, 2\pi]$ und hat laut (3.53) die Fourier-Entwicklung

$$f_r(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\varphi}. \quad (3.55)$$

Die Parseval'sche Gleichung impliziert dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leq \|f\|_{\partial B_r(z_0)}^2. \quad (3.56)$$

Aufgrund der Taylor'schen Koeffizientenformel (2.69) folgt die Behauptung. \square

Satz 3.22 (Liouville). *Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, welche der Wachstumsbedingung $|f(z)| \leq M|z|^m$ genügt, dann ist f ein Polynom vom Grad höchstens m . Insbesondere ist jede beschränkte ganze Funktion konstant.*

Beweis. Nach Cauchy-Taylor hat f eine überall konvergente Potenzreihendarstellung, also etwa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (3.57)$$

Verwenden wir die Cauchy'sche Abschätzung zusammen mit der Wachstumsbedingung erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_{\partial B_r(0)} \leq M r^{m-n}. \quad (3.58)$$

Betrachten wir $r \rightarrow \infty$, müssen daher alle a_n mit $n > m$ verschwinden. D.h. $f(z)$ ist ein Polynom vom Grad höchstens m . \square

Bemerkung 3.23.

1. Man kann eine nicht konstante Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R})$, welche beschränkt ist nicht beschränkt auf \mathbb{C} fortsetzen.
2. Jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ ist konstant, es gibt insbesondere keine biholomorphe Abbildung $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Es ist aber sehr wohl möglich, die Ebene homöomorph auf den Einheitskreis abzubilden.

Korollar 3.24 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht-konstantes komplexes Polynom. Dann hat p mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Angenommen $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ vom Grad $n \geq 1$ hat in \mathbb{C} keine Nullstelle. Dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ ganz. Wegen $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \infty$, gilt $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$, d.h. f ist beschränkt und damit nach dem Satz von Liouville konstant. Widerspruch. \square

3.4 Homotopie

3.4.1 Fundamentalgruppen

Definition 18. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Zwei Wege $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow D$ mit $\gamma(a) = \eta(a)$ und $\gamma(b) = \eta(b)$ heißen FEP-homotop (in D), wenn es eine stetige Abbildung $\tau : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ gibt, mit

1. $\tau(a, s) = \gamma(a)$ und $\tau(b, s) = \gamma(b)$ für alle $s \in [0, 1]$,
2. $\tau(t, 0) = \gamma(t)$ und $\tau(t, 1) = \eta(t)$ für alle $t \in [a, b]$,

FEP steht für fixed end points.

Bemerkung 3.25. Sind γ, η zwei geschlossene Wege, so heißt eine Abbildung τ , die nur

1. $\tau(a, s) = \tau(b, s)$ für alle $s \in [0, 1]$,
2. $\tau(t, 0) = \gamma(t)$ und $\tau(t, 1) = \eta(t)$ für alle $t \in [a, b]$,

erfüllt, (freie) Homotopie zwischen γ und η .

Beispiel 3.26. Je zwei Wege γ, η mit selben Anfangs- und Endpunkt in einer konvexen Menge sind FEP-homotop. Eine FEP-Homotopie wird durch $\tau(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\eta(t)$ gegeben.

Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir ab nun für den Rest des Kapitels die Hintereinanderausführung zweier Wege γ_1, γ_2 mit $\gamma_1 \gamma_2$.

Proposition 3.27. Die Relation $\gamma \approx_D \eta \Leftrightarrow (\gamma \text{ und } \eta \text{ sind FEP-homotop in } D)$ ist eine Äquivalenzrelation. Außerdem gilt:

1. $\gamma_1 \approx_D \eta_1$ und $\gamma_2 \approx_D \eta_2$ impliziert $(\gamma_1 \gamma_2) \approx_D (\eta_1 \eta_2)$, passende Anfangs- und Endpunkte vorausgesetzt.
2. $\epsilon_{\gamma(a)} \gamma \approx_D \gamma$ bzw. $\gamma \epsilon_{\gamma(b)} \approx_D \gamma$.
3. $\gamma \hat{\gamma} \approx_D \epsilon_{\gamma(a)}$ bzw. $\hat{\gamma} \gamma \approx_D \epsilon_{\gamma(b)}$.

Betrachten wir nur geschlossene Wege in D , die in z_0 starten, so können wir je zwei Äquivalenzklassen solcher Wege addieren und erhalten wieder die Äquivalenzklasse eines geschlossenen Wegs, der in z_0 startet. Die Klasse $[\epsilon_{z_0}]$ ist das neutrale Element, die Klasse $[\hat{\gamma}]$ das eindeutig bestimmte inverse Element zu $[\gamma]$. Da außerdem das Assoziativgesetz gilt, liegt eine Gruppe vor, $\pi_1(D, z_0)$, die Fundamentalgruppe von D mit Basispunkt z_0 .

Ist D wegzusammenhängend, d.h. gibt es zu $x, y \in D$ stets einen Weg von x nach y , so sind alle Fundamentalgruppen $\pi_1(D, z_0)$, $z_0 \in D$ isomorph. Man lässt dann die Angabe des Basispunkts weg.

Beispiel 3.28.

1. Ist S ein Sterngebiet dann ist S wegzusammenhängend und $\pi_1(S) = \{0\}$.
2. \mathbb{C}^\times ist wegzusammenhängend und $\pi_1(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}$.
3. $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit paarweise verschiedenen a_i . ist wegzusammenhängend und $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = F_n$, die freie Gruppe in n Erzeugenden.

Eine erste kleine Anwendung des Homotopiebegriffs ist der Satz über die Homotopieinvarianz von Wegintegralen holomorpher Funktionen.

Satz 3.29. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sind γ, η zwei in D FEP-homotope Wege, dann ist $\int_{\gamma} f dz = \int_{\eta} f dz$.*

Beweis. Sei $\tau : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow D$ eine Homotopie zwischen γ und η . Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass das Bild von τ ganz mit Kreisscheiben vom Radius ε überdeckt werden kann, welche ganz in D liegen. Wegen der Kompaktheit von $[a, b] \times [0, 1]$ und der Stetigkeit von τ gibt es Partitionen $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ und $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ sodass $|\tau(t, s) - \tau(t', s')| < \varepsilon$ auf $[t_j, t_{j+1}] \times [s_i, s_{i+1}]$. Sei also $D_{i,j}$ eine Kreisscheibe welche $\tau([t_j, t_{j+1}] \times [s_i, s_{i+1}])$ enthält und noch ganz in D liegt.

Es genügt offenbar zu zeigen, dass die Integrale längs $\tau_i := \tau(\cdot, s_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ übereinstimmen. Jede Kreisscheibe $D_{i,j}$ ist ein Sterngebiet, daher folgt aufgrund des Lemmas von Goursat und des Satzes von Morera die Existenz einer lokalen Stammfunktion von $F_{i,j}$ von f auf $D_{i,j}$. Damit gilt nach Bemerkung 3.8.2

$$\int_{\tau_i} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} F_{i,j}(\tau_i(t_{j+1})) - F_{i,j}(\tau_i(t_j)), \quad (3.59)$$

$$\int_{\tau_{i+1}} f(z) dz = \sum_{j=0}^{n-1} F_{i,j}(\tau_{i+1}(t_{j+1})) - F_{i,j}(\tau_{i+1}(t_j)) \quad (3.60)$$

Auf dem Durchschnitt $D_{i,j} \cap D_{i,j+1}$ sind sowohl $F_{i,j}$ als auch $F_{i,j+1}$ Stammfunktionen von f , somit muss ihre Differenz konstant sein. Beachte dass, sowohl $\tau_i(t_{j+1})$ als auch $\tau_{i+1}(t_{j+1})$ in diesem Durchschnitt liegen. Mithin

$$F_{i,j+1}(\tau_i(t_{j+1})) - F_{i,j+1}(\tau_{i+1}(t_{j+1})) = F_{i,j}(\tau_i(t_{j+1})) - F_{i,j}(\tau_{i+1}(t_{j+1})). \quad (3.61)$$

Setzt man diese Beziehung in (3.59) ein so ergibt sich eine Teleskopsumme

$$\int_{\tau_i} f(z) dz - \int_{\tau_{i+1}} f(z) dz = [F_{i,n-1}(\tau_i(b)) - F_{i,n-1}(\tau_{i+1}(b))] - [F_{i,0}(\tau_i(a)) - F_{i,0}(\tau_{i+1}(a))] = 0, \quad (3.62)$$

denn da alle τ_i den selben Anfangs- und Endpunkt haben, verschwindet diese Differenz und wir sind fertig. \square

Lemma 3.30. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ein Weg. Dann gibt es einen Pfad $\rho : [0, 1] \rightarrow D$ mit selbem Anfangs- und Endpunkt wie γ , sodass γ und ρ in D FEP-homotop sind.*

Beweis. Wir wählen zunächst eine Überdeckung von γ^* mit endlich vielen Kreisscheiben D_0, \dots, D_n derart, dass die Mittelpunkte von D_i auf γ^* liegen und $\overline{D_i} \subset D$, für $0 = 1, \dots, n$. Wegen der Kompaktheit von γ^* ist das möglich.

Sei, eventuell nach Umm nummerieren, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} \leq 1$ so, dass $\gamma(t_i) \in D_{i-1} \cap D_i$, für $i = 1, \dots, n$. Falls γ geschlossen ist, wähle zusätzlich $\gamma(t_{n+1}) \in D_n \cap D_0$, ansonsten setzen wir $t_{n+1} = 1$. Betrachten wir nun die Streckenzüge $\rho_i := [\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})]$, so verlaufen diese wegen der Konvexität von D_i ganz in D_i . Schreiben wir nun weiters $\gamma_i := \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$, so sind γ_i und ρ_i in D_i FEP-homotop, weil D_i ja konvex ist. A fortiori sind sie auch in ganz D FEP-homotop. Da die Verknüpfung endlich vieler FEP-homotoper Wege wieder FEP-homotop ist, sind $\gamma = \gamma_0 \dots \gamma_n$ und $\rho := \rho_0 \dots \rho_n$ in D FEP-homotop. \square

Durch Verkleinern der Menge D können wir, wenn gewünscht, stets erreichen, dass für einen festen Punkt mit $z \notin \gamma^*$ auch gilt $z \notin \rho^*$.

Definition 19. *Ein geschlossener Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ heißt nullhomotop (in D) wenn γ FEP-homotop (in D) zum konstanten Weg $\epsilon_{\gamma(a)}$ ist.*

Bemerkung 3.31.

1. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann ist jeder geschlossene Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ welcher frei homotop zum konstanten Weg ist auch nullhomotop und vice versa.
2. Zwei Wege $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow D$ mit selbem Anfangs- und Endpunkt sind genau dann FEP-homotop, wenn der geschlossene Weg $\gamma \hat{\eta}$ nullhomotop ist. Denn

$$[\gamma] = [\gamma(\hat{\eta}\eta)] = [(\gamma\hat{\eta})\eta] = [\eta]. \quad (3.63)$$

Definition 20. *Ein wegzusammenhängender Raum X heißt einfach zusammenhängend, wenn die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ trivial ist, i.e. wenn jeder geschlossene Weg in X nullhomotop ist.*

3.4.2 Überlagerungen

Wegzusammenhängende Gebiete in \mathbb{C} haben die angenehme Eigenschaft, dass sie auch lokal wegzusammenhängend sind, d.h. dass es zu jedem Punkt eine wegzusammenhängende Umgebung U gibt, sodass sich je zwei Punkte in U durch einen ganz in U verlaufenden Weg verbinden lassen. Im Allgemeinen ist das nicht so. Bei allen im Folgenden vorkommenden topologischen Räume, wollen wir ausserdem stillschweigend voraussetzen, dass sie Hausdorff'sch sind.

Definition 21 (Covering & Lifting). *Seien X, Y, Z topologische Räume und $\pi : Y \rightarrow X$ bzw. $f : Z \rightarrow X$ stetige Funktionen.*

$$\begin{array}{ccc}
 & & Y \\
 & \nearrow F & \downarrow \pi \\
 Z & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

1. Eine stetige Abbildung $F : Z \rightarrow Y$ mit $\pi \circ F = f$ heißt Lifting von f .
2. (Y, π) heißt Überlagerung, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine *trivialisierende* Umgebung U besitzt, d.h. eine Umgebung deren Urbild von der Gestalt

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{i \in I_x} V_i \quad (3.64)$$

ist, wobei für jedes $i \in I_x$ die Menge V_i eine Umgebung ist, die vermöge $\pi : V_i \rightarrow U$ homöomorph zu U ist. (Man sagt auch, die V_i liegen auf den verschiedenen *Blättern* der Überlagerung und $|I_x|$ sei die Blätterzahl über $x \in X$.)

Beispiel 3.32.

1. (\mathbb{R}, e^{it}) ist eine unendlich-blättrige Überlagerung von $\partial\mathbb{E}$.
2. (\mathbb{C}, e^z) ist eine unendlich-blättrige Überlagerung von \mathbb{C}^\times .
3. (\mathbb{H}, e^{iz}) ist eine unendlich-blättrige Überlagerung von \mathbb{E}^\times .
4. (\mathbb{C}^\times, z^n) mit $n \geq 1$ ist eine n -blättrige Überlagerung von \mathbb{C}^\times .

Liftings müssen im Allgemeinen weder existieren, noch eindeutig sein; für einfach und lokal wegweise zusammenhängendes Z ist die Situation aber sehr erfreulich.

Proposition 3.33. *Sei X, Y topologische Räume, Z einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, $\pi : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Sei $f : Z \rightarrow X$ stetig und $z_0 \in Z, y_0 \in Y$ mit $\pi(y_0) = f(z_0)$ vorgegeben. Dann gibt es genau ein stetiges Lifting $F : Z \rightarrow Y$ mit $F(z_0) = y_0$.*

Wir teilen den Beweis in vier Schritte auf und zeigen nacheinander:

1. Zu vorgegebenem Blatt der Überlagerung gibt es für jeden Weg stets ein Lifting.
2. Zu vorgegebenem Blatt der Überlagerung gibt es immer höchstens ein Lifting.
3. Die Liftings FEP-homotoper Wege in X sind FEP-homotop in der Überlagerung Y . (Diese Aussage heißt auch *Monodromiesatz*.)
4. Jede stetige Funktion $f : Z \rightarrow X$ besitzt ein stetiges Lifting $F : Z \rightarrow Y$.

Beweis. ad (1): Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg, d.h. wir haben $Z = [0, 1]$. Sei $x_0 := \gamma(0)$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ eine Partition derart, dass es trivialisierende Mengen U_j gibt mit $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$. Wegen der Kompaktheit von $[0, 1]$ ist das möglich. Wie in der Definition der Überlagerung schreiben wir

$$\pi^{-1}(U_j) = \bigcup_{i \in I_j} V_j^i. \quad (3.65)$$

Sei nun $y_0 \in V_1^{j_1}$ mit $\pi(y_0) = x_0$ fest vorgegeben. Wir zeigen für jedes k , dass $\gamma|_{[0, t_k]}$ ein Lifting Γ_k mit $\Gamma_k(0) = y_0$ besitzt. Für $k = 0$ ist das trivial. Sei also Γ_{k-1} bereits konstruiert. Da $\pi^{-1}(U_{k-1}) \cap \pi^{-1}(U_k) \neq \emptyset$ gibt es einen Index j_k mit $\Gamma_{k-1}(t_{k-1}) \in V_k^{j_k}$. Setze nun

$$\Gamma_k(t) := \begin{cases} \Gamma_{k-1}(t) & \text{für } t \in [0, t_{k-1}], \\ (\pi|_{V_k^{j_k}})^{-1} \circ \gamma(t) & \text{für } t \in [t_{k-1}, t_k]. \end{cases} \quad (3.66)$$

Beachte, dass der *Zusammenhang* von Z hier noch nicht eingeht.

ad (2): Sei $f : Z \rightarrow X$ gegeben, $z_0 \in Z$ beliebig aber fest, und $F_1, F_2 : Z \rightarrow Y$ zwei Liftings mit $F_1(z_0) = F_2(z_0)$, i.e. die Werte von F_1 bzw. F_2 um z_0 liegen am selben Blatt der Überlagerung. Wegen der Stetigkeit ist

$$A := \{z \in Z : F_1(z) = F_2(z)\} \quad (3.67)$$

nicht leer und abgeschlossen (dafür brauchen wir Hausdorff'sch). Wir zeigen, dass A auch offen ist: Sei $z \in A$, dann gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq Y$ von $y := F_1(z) = F_2(z)$, sodass $\pi|_V$ ein Homöomorphismus ist. Wegen der Stetigkeit gibt es eine Umgebung $W \subseteq Z$ von z mit $F_1(W) \subseteq V$ und $F_2(W) \subseteq V$. Aufgrund der Lifting-Eigenschaft gilt $f|_W = \pi|_V \circ F_i|_W$, also hängt

$$F_i|_W = (\pi|_V)^{-1} \circ f|_W \quad (3.68)$$

nicht von $i = 1, 2$ ab und F_1, F_2 stimmen auf W überein, d.h. A ist offen. Beachte, dass der *einfache* Zusammenhang von Z hier noch nicht eingeht.

ad(3): Seien $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow X$ zwei FEP-homotope Wege und sei τ eine FEP-Homotopie. Sei ferner $y_0 \in Y$ ein beliebiger aber fester Punkt mit $\pi(y_0) = \gamma(0)$. Jeder Weg $\gamma_s(t) := \tau(t, s)$ hat nach (2) ein eindeutiges Lifting $\Gamma_s : [0, 1] \rightarrow Y$ mit $\Gamma_s(0) = y_0$. Es ist zu zeigen, dass $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $T(t, s) := \Gamma_s(t)$ eine FEP-Homotopie ist. Der Beweis, dass T stetig ist, ist nicht besonders schwer, trotzdem sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen.

Da π eine Überlagerung ist, ist $\pi^{-1}(\{x\})$ stets diskret. Nun ist $T(\{1\} \times [0, 1])$, die Menge der Endpunkte, einerseits als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge selbst zusammenhängend und andererseits wegen $T(\{1\} \times [0, 1]) = \pi^{-1}(\{\gamma(1)\})$ diskret. Somit ist $T(\{1\} \times [0, 1]) = \{\Gamma(1)\}$.

ad(4): Fixiere ein $z_0 \in Z$ und ein $y_0 \in Y$ mit $f(z_0) = \pi(y_0)$. Wähle einen Weg γ in Z , der z_0 mit z verbindet, lifte $f \circ \gamma$ zu Γ in Y mit $\Gamma(0) = y_0$ und setze $F(z) := \Gamma(1)$. Wir haben zu zeigen, dass (i) F wohldefiniert ist, (ii) $f = \pi \circ F$ und (iii) F stetig ist.

(i): Ist γ' ein anderer Weg, der z_0 mit z verbindet, dann ist wegen des einfachen Zusammenhangs $\gamma\hat{\gamma}'$ nullhomotop, i.e. γ und γ' sind FEP-homotop. Somit sind auch $f \circ \gamma$ und $f \circ \gamma'$ FEP-homotop. Nach (3) sind somit die Liftings Γ und Γ' FEP-homotop in Y . Insbesondere ist $\Gamma(1) = \Gamma'(1)$.

(ii): Da Γ ein Lifting von $f \circ \gamma$ ist, gilt $\pi \circ F(z) = \pi(\Gamma(1)) = f \circ \gamma(1) = f(z)$.

(iii): Sei $z \in Z$, U eine trivialisierende Umgebung von $f(z)$ und $V \subseteq Y$ eine Umgebung von $F(z)$ auf der $\pi|_V : V \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Wir konstruieren eine offene Umgebung W von $z \in Z$ mit $F(W) \subseteq V$. Sei dazu W eine wegzusammenhängende Umgebung von $z \in Z$ mit $f(W) \subseteq U$. (So ein W gibt es wegen der Stetigkeit von f .) Seien γ, Γ wie in der Definition von F ; sei $z' \in W$ beliebig und γ' ein Weg in W der z mit z' verbindet. $f \circ \gamma'$ lässt sich wieder zu Γ' liften und wir können $\Gamma'(0) = F(z)$ fordern. Da γ' ganz in U verläuft, verläuft Γ' ganz in V . Insbesondere ist $F(z') = \Gamma'(1) \in V$. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen wichtigen Anwendungen.

Korollar 3.34 (Stetiger Logarithmus). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ stetig. Dann existiert eine stetige Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{F(z)}$. Sei ferner $z_0 \in G$ vorgegeben und $w_0 \in \mathbb{C}$ so, dass $e^{w_0} = f(z_0)$. Dann gibt es genau ein solches F mit $F(z_0) = w_0$.*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \\ & \nearrow F & \downarrow \text{exp} \\ z_0 \in G & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^\times \end{array}$$

Korollar 3.35 (Holomorpher Logarithmus). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ holomorph. Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{F(z)}$. Sei ferner $z_0 \in G$ vorgegeben und $w_0 \in \mathbb{C}$ so, dass $e^{w_0} = f(z_0)$. Dann gibt es genau ein solches F mit $F(z_0) = w_0$.*

Beweis. Sei F der stetige Logarithmus von f , den es gemäß Korollar 3.34 geben muss. Sei $z \in G$ beliebig aber fest, $V \subseteq \mathbb{C}^\times$ eine offene Umgebung von $f(z)$ und W eine offene Umgebung von $F(z)$ sodass $\text{exp} : W \rightarrow V$ dort biholomorph ist. Sei $U \subseteq G$ eine offene Umgebung von z mit $F(U) \subseteq W$. Dann ist wegen

$$F|_U = (\text{exp}|_W)^{-1} \circ f|_U \tag{3.69}$$

F auf U holomorph. \square

Analog zeigt man, dass das stetige Lifting $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, mit $\gamma(t) = e^{\Gamma(t)}$, einer stetig differenzierbaren Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ selbst auch stetig differenzierbar ist.

Korollar 3.36 (Holomorphe Wurzel). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $z_0 \in D$ eine k -fache Nullstelle von f , dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von z_0 und eine holomorphe Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit einer einfachen Nullstelle an z_0 sodass $f(z) = h(z)^k$ für $z \in U$.*

Beweis. Sei $F(z)$ ein Lifting der auf $U := B_\varepsilon(z_0)$ nullstellenfreien und holomorph ergänzten Funktion $z \mapsto (z - z_0)^{-k} f(z)$. Setze $h(z) := (z - z_0) e^{1/k F(z)}$. \square

Bemerkung 3.37. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ holomorph. Nach Korollar 3.35 gibt es einen holomorphen Logarithmus $h : G \rightarrow \mathbb{C}$. Diesen holomorphen Logarithmus können wir dazu verwenden, um k -te holomorphe Wurzeln $h_k : G \rightarrow \mathbb{C}$ via $h_k(z) := e^{1/k h(z)}$ zu definieren.

Definition 22. Eine Überlagerung (Y, π) von X heißt universell, wenn Y einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist.

Proposition 3.38. Sind (Y_1, π_1) und (Y_2, π_2) zwei universelle Überlagerungen von X , so sind Y_1 und Y_2 homöomorph.

Beweis. Sei $y \in Y_1$ beliebig und $\Phi : Y_1 \rightarrow Y_2$ ein Lifting von $\pi_1 : Y_1 \rightarrow X$. Setze $\tilde{y} := \Phi(y)$; insbesondere ist $\pi_2(\tilde{y}) = \pi_1(y)$. Vertauschen der Rollen von Y_1 und Y_2 liefert ein Lifting $\Psi : Y_2 \rightarrow Y_1$ von $\pi_2 : Y_2 \rightarrow X$ mit $\Psi(\tilde{y}) = y$.

$$\begin{array}{ccc} & Y_2 & \\ & \nearrow \Phi & \downarrow \pi_2 \\ y \in Y_1 & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & Y_1 & \\ & \nearrow \Psi & \downarrow \pi_1 \\ \tilde{y} \in Y_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X. \end{array}$$

Es ist also $\Psi \circ \Phi : Y_1 \rightarrow Y_1$ eine stetige Abbildung mit $\Psi \circ \Phi(y) = y$. Wegen $\pi_1 \circ (\Psi \circ \Phi) = (\pi_1 \circ \Psi) \circ \Phi = \pi_2 \circ \Phi = \pi_1$ liegt ein Lifting von π_1 vor.

$$\begin{array}{ccc} & Y_1 & \\ & \nearrow \Psi \circ \Phi & \downarrow \pi_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & Y_2 & \\ & \nearrow \Phi \circ \Psi & \downarrow \pi_2 \\ Y_2 & \xrightarrow{\pi_2} & X. \end{array}$$

Nun ist aber auch id_{Y_1} ein Lifting von π_1 mit $\text{id}_{Y_1}(y) = y$, also $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{Y_1}$. Analog folgt $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{Y_2}$. \square

Bemerkung 3.39. Tatsächlich lässt sich unschwer zeigen, dass die Bezeichnung universelle Überlagerung insofern gerechtfertigt ist, als dass eine universelle Überlagerung jede andere Überlagerung überlagert.

Betrachten wir ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ so stellt sich die Frage, ob (i) die universelle Überlagerung von G (über deren Existenz wir uns bis jetzt ja noch keine Gedanken gemacht haben) wieder zu einem Gebiet von \mathbb{C} homöomorph ist und (ii) ob die Überlagerungsabbildung π in diesem Fall holomorph gewählt werden kann.

Da \mathbb{E}^\times und \mathbb{C}^\times homöomorph sind, sind auch ihre universellen Überlagerungen homöomorph (nämlich \mathbb{H} und \mathbb{C}). Eine Überlagerung $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}^\times$ kann aber wegen des Satzes von Liouville niemals holomorph sein. Wir müssen dazu ein anderes Gebiet heranziehen, das dann notwendigerweise zu \mathbb{C} zwar homöomorph aber nicht biholomorph äquivalent ist, nämlich \mathbb{H} .

Es läßt sich zeigen, dass die universelle Überlagerung der doppelt-gepunkteten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ durch (\mathbb{E}, π) mit holomorphe π gegeben ist.

Korollar 3.40 (Kleiner Satz von Picard). *Sei f eine ganze Funktion. Dann ist entweder $\text{card}(f(\mathbb{C})) = 1$ oder $\text{card}(\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})) \leq 1$*

Beweis. Sei f ganz und lasse zwei Werte aus. Durch Nachschalten einer affinen Abbildung können wir oBdA. annehmen, dass 0 und 1 ausgelassen werden. Nun lässt sich $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ zu einer holomorphen Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ liften. Nach dem Satz von Liouville muss F konstant sein. \square

Der kleine Satz von Picard besagt also, dass eine nichtkonstante ganze Funktion alle komplexen Zahlen bis auf möglicherweise eine Ausnahme als Wert annimmt. exp ist ein Beispiel einer ganzen Funktion welche z.B. 0 auslässt.

3.5 Homologie

3.5.1 Windungszahlen

Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ ein geschlossener Weg und Γ ein Lifting wie in Korollar 3.35, dann folgt $e^{\Gamma(1)} = e^{\Gamma(0)}$. Also ist $\frac{1}{2\pi i}(\Gamma(1) - \Gamma(0))$ ganzzahlig. Diese Zahl hängt nicht vom gewählten Lifting ab; denn sind Γ_1, Γ_2 zwei solche Liftings, dann ist

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t) - (\Gamma_1(0) - \Gamma_2(0)) \quad (3.70)$$

ein Lifting mit selbem Anfangspunkt wie Γ_2 , stimmt also mit diesem überein. Also:

$$\Gamma_2(1) - \Gamma_2(0) = \left(\Gamma_1(1) - (\Gamma_1(0) - \Gamma_2(0)) \right) - \Gamma_2(0) = \Gamma_1(1) - \Gamma_1(0). \quad (3.71)$$

Definition 23. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ein geschlossener Weg, $z \notin \gamma^*$ und Γ_z ein Lifting von $\gamma_z(t) := \gamma(t) - z$, wie in Korollar 3.35. Dann heißt die ganze Zahl*

$$\text{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} (\Gamma_z(1) - \Gamma_z(0)) \quad (3.72)$$

Index (auch: Umlaufzahl bzw. Windungszahl) von γ um z .

Proposition 3.41. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ein geschlossener Weg.*

1. *Es gilt die Integraldarstellung*

$$\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{für } z \notin \gamma^*. \quad (3.73)$$

2. *Die Indexfunktion $\text{ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ ist stetig, i.e. lokal konstant.*

Beweis. ad (1): Sei zunächst γ ein Pfad und Γ ein Lifting mit $e^{\Gamma(t)} = \gamma(t)$. Wie im Satz vom holomorphen Logarithmus sieht man, dass auch Γ ein Pfad ist, i.e. dass

es eine Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ gibt, sodass γ und Γ auf (t_i, t_{i+1}) stetig differenzierbar sind. Wegen

$$\frac{\gamma(t)'}{\gamma(t)} = \frac{(e^{\Gamma(t)})'}{e^{\Gamma(t)}} = \Gamma(t)', \quad t \in (t_i, t_{i+1}) \quad (3.74)$$

gilt somit

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=0}^{n-1} (\Gamma(t_{i+1}) - \Gamma(t_i)) = \text{ind}_{\gamma}(0). \quad (3.75)$$

Ist nun γ ein Weg (d.h. nicht notwendigerweise stückweise differenzierbar), so folgt die Aussage aus der Homotopieinvarianz des Integrals zusammen mit Lemma 3.30.

ad (2): Wir zeigen die Stetigkeit an 0. Ist $0 \notin \gamma^*$, dann gibt es sogar eine Kreisscheibe $B_{2\varepsilon}(0)$, welche γ^* nicht trifft. Für $z \in B_{\varepsilon}(0)$ sei $\sigma_z(t) := \gamma(0) - tz$ die direkte Verbindung von $\gamma(0)$ nach $\gamma(0) - z$. Wir verwenden wieder die Schreibweise $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$. Es sind dann γ und $\sigma_z \gamma_z \hat{\sigma}_z$ in \mathbb{C}^{\times} zueinander FEP-homotop, wie man etwa durch Betrachten der FEP-Homotopie $\tau(s, t) = \sigma_{sz}(t) \gamma_{sz}(t) \hat{\sigma}_{sz}(t)$ sieht. Wegen (1) und der Homotopieinvarianz des Integrals gilt somit

$$\text{ind}_{\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_z \gamma_z \hat{\sigma}_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\sigma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta + \int_{\gamma_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta - \int_{\hat{\sigma}_z} \frac{1}{\zeta} d\zeta \right] = \text{ind}_{\gamma}(z). \quad \square$$

Bemerkung 3.42.

1. Sei γ ein geschlossener Weg und $R > 0$ groß genug, dann ist $\gamma([a, b]) \subseteq B_R(0)$. $\mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ besitzt dann genau eine unbeschränkte Komponente; nämlich jene Komponente, welche $\mathbb{C} \setminus B_R(0)$ enthält. Der Index von γ auf dieser Komponente ist 0. Dies folgt unmittelbar aus der Integraldarstellung der Windungszahl, kann aber auch ohne Schwierigkeiten direkt nachgerechnet werden (siehe Übungen).
2. Folgendes heuristische Prinzip hilft bei der praktischen Bestimmung des Index: Kreuzt man einen Pfad, so erhöht sich der Index um eins bzw. verringert sich um eins, wenn die Kurve im mathematisch positiven bzw. negativen Sinn einfach durchlaufen wird, siehe [8, Satz 10.37].
3. Die Mengen

$$\text{int}\gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \text{ind}_{\gamma}(z) \neq 0\} \quad \text{bzw.} \quad \text{ext}\gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* : \text{ind}_{\gamma}(z) = 0\}$$

heißen das Innere bzw. Äußere von γ und $\mathbb{C} = \text{int}\gamma \cup \gamma^* \cup \text{ext}\gamma$ ist eine disjunkte Zerlegung von \mathbb{C} .

4. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Jordan-Kurve*, wenn γ stetig differenzierbar und injektiv auf (a, b) ist. Der Jordan'sche Kurvensatz besagt, dass $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ aus genau zwei Komponenten besteht, einer beschränkten und einer unbeschränkten. Aus 1. folgt, dass der Index in der unbeschränkten Komponente 0 ist, aus 2. dass der Index in der beschränkten Komponente ± 1 ist,

Beispiel 3.43.

1. Siehe die Pfade (i), (ii) und (iii) in Abbildung 5.
2. Sei $\gamma(t) = e^{2\pi int}$, $t \in [0, 1]$. Dann ist $\Gamma(t) = int$ und

$$\text{ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi in e^{2\pi int}}{e^{2\pi int}} dt = n = \frac{1}{2\pi i} (2\pi in - 0). \quad (3.76)$$

Es ergibt sich aus Proposition 3.41 unmittelbar ein Zusammenhang zwischen Umlaufzahlen und Homotopien.

Korollar 3.44. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma, \eta : [a, b] \rightarrow D$ zwei in D FEP-homotope geschlossene Wege. Dann gilt $\text{ind}_\gamma(z) = \text{ind}_\eta(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$.

Die Umkehrung, also dass man aus der Gleichheit der Windungszahlen auch Homotopie schließen kann, gilt i.A. nicht wie man aus folgendem Beispiel sieht:

Beispiel 3.45. Siehe Abbildung 6.

In einem speziellen Fall, nämlich $D = \mathbb{C}^\times$ können wir jedoch mehr sagen.

Proposition 3.46. Seien $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ zwei geschlossene Wege. Dann gilt $\text{ind}_\gamma(z_0) = \text{ind}_\eta(z_0)$ genau dann, wenn γ und η FEP-homotop in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sind.

Beweis. Sei oBdA. $z_0 = 0$. Wir wissen schon, dass FEP-homotope Wege denselben Index haben. Seien also γ, η zwei Wege mit $\text{ind}_\gamma(0) = \text{ind}_\eta(0)$. Seien Γ_1, Γ_2 Liftings von γ, η mit selbem Anfangspunkt. Wegen

$$\Gamma_2(1) = \Gamma_2(0) + 2\pi i \text{ind}_\gamma(0) = \Gamma_1(0) + 2\pi i \text{ind}_\eta(0) = \Gamma_1(1) \quad (3.77)$$

haben sie auch den selben Endpunkt und sind daher in \mathbb{C} FEP-homotop. Ist τ eine solche FEP-Homotopie, dann ist $\exp \circ \tau$ eine FEP-Homotopie zwischen γ und η in \mathbb{C}^\times . \square

In der Sprache der Fundamentalgruppen besagt Proposition 3.46 somit nichts anderes als $\pi_1(\mathbb{C}^\times) = \mathbb{Z}$. Der tieferen Grund, weshalb sich in \mathbb{C}^\times Homotopie durch Windungszahlen charakterisieren lässt, liegt in der Kommutativität der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}^\times)$. Wir wollen das im nächsten Abschnitt weiter herausarbeiten.

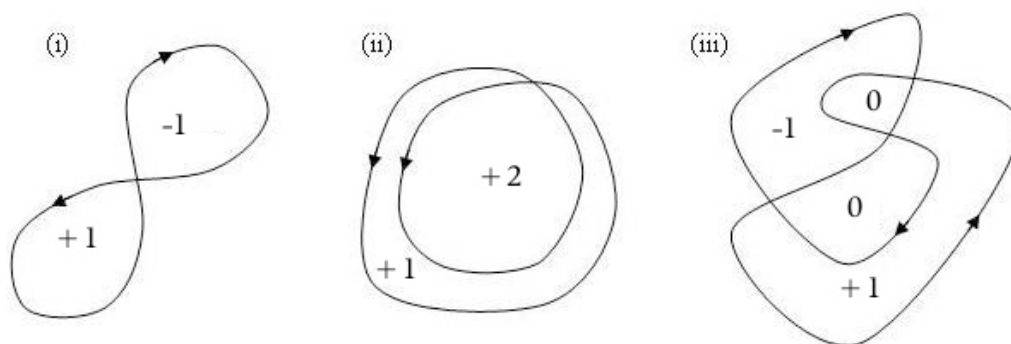


Abbildung 5: Umlaufzahlen verschiedener Pfade

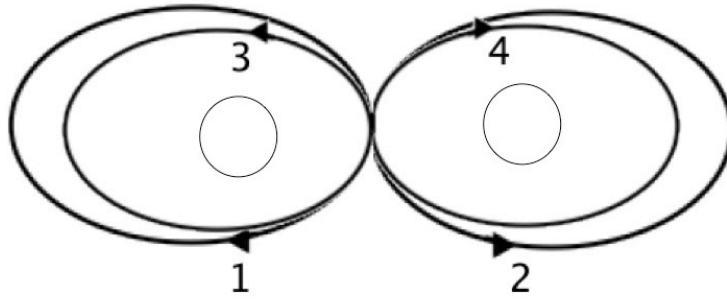


Abbildung 6: Nicht nullhomotoper Weg mit Umlaufzahl 0

3.5.2 Homologiegruppen

Für eine feste offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ wollen wir die Bezeichnungen

$$S_0(D) := C(\{0\}, D), \quad S_1(D) := C([0, 1], D), \quad S_2 := C(\Delta_2, D)$$

eingeführen ($\Delta_2 := \text{conv}(\{0, e_1, e_2\}) \subseteq \mathbb{R}^2$) ist das zweidimensionale Simplex). S_0 sind somit Punkte, S_1 Wege und S_2 stetige Bilder von Dreiecken in D .

Definition 24. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in S_j$, $j = 0, 1, 2$. Die formalen Linearkombination mit Koeffizienten $n_i \in \mathbb{Z}$

$$\gamma := n_1 \gamma_1 + \dots + n_k \gamma_k \tag{3.78}$$

heißen j -Ketten und werden mit $\mathcal{C}_j(D)$ bezeichnet. $\mathcal{C}_j(D)$ erhält damit die Struktur einer abelschen Gruppe.

Bemerkung 3.47 (\mathbb{Z} -lineare Fortsetzung). Ist $\phi : S_j(D) \rightarrow H$ eine beliebige Abbildung in eine abelsche Gruppe H , $j = 0, 1, 2$. So kann man ϕ zu einem Homomorphismus $\mathcal{C}_j(D) \rightarrow H$ fortsetzen, indem man festlegt $\sum_i n_i \gamma_i \mapsto \sum_i n_i \phi(\gamma_i)$.

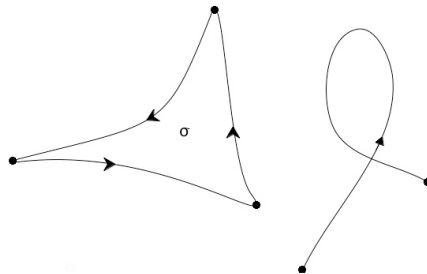


Abbildung 7: Die Randoperatoren ∂_2 und ∂_1

Wir können jedem $\sigma \in S_2(D)$ eine 1-Kette $\partial_2 \sigma \in \mathcal{C}_1(D)$ und jedem Weg $\gamma \in S_1(D)$ eine 0-Kette $\partial_1 \gamma \in \mathcal{C}_0(D)$ wie folgt zuordnen:

$$\partial_2 \sigma := \sigma|_{[0, e_1]} + \sigma|_{[e_1, e_2]} - \sigma|_{[0, e_2]}, \quad \partial_1 \gamma := \gamma(1) - \gamma(0). \tag{3.79}$$

Außerdem führen wir die triviale Abbildung $\varepsilon : S_0(D) \rightarrow \mathbb{Z}$ ein, welche jedem $x \in D$ den Wert 1 zuweist. ∂_1 und ∂_2 heißen Randoperatoren.

Die Randoperatoren ∂_1 und ∂_2 werden \mathbb{Z} -linear fortgesetzt und ergeben sodann, ebenso wie die \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung von ε , Homomorphismen abelscher Gruppen

$$\partial_2 : \mathcal{C}_2(D) \rightarrow \mathcal{C}_1(D), \quad (3.80)$$

$$\partial_1 : \mathcal{C}_1(D) \rightarrow \mathcal{C}_0(D), \quad (3.81)$$

$$\varepsilon : \mathcal{C}_0(D) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (3.82)$$

Eine j -Kette aus $\ker \partial_j$ heißt geschlossen bzw. j -Zyklus; die Elemente von $\ker \partial_j$ nennt man exakt.

Bemerkung 3.48.

1. Ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ist genau dann geschlossen, wenn $\gamma(1) = \gamma(0)$ gilt, i.e. γ ist als Weg genau dann geschlossen, wenn γ als 1-Kette geschlossen ist.
2. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so ist die \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung der Abbildung $I_f : S_1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\gamma \mapsto I_f(\gamma) := \int_{\gamma} f(z) dz \quad (3.83)$$

ein Gruppenhomomorphismus $\mathcal{C}_1(D) \rightarrow \mathbb{C}$, den wir wieder mit I_f bezeichnen wollen.

3. Ist G ein Gebiet, so induziert wegen der Homotopieinvarianz des Integrals jedes auf G holomorphe f auch einen Homomorphismus $\overline{I}_f : \pi_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ vermöge

$$[\gamma] \mapsto \overline{I}_f([\gamma]) := \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (3.84)$$

Da \mathbb{C} abelsch ist, umfaßt $\ker \overline{I}_f$ jedenfalls die Kommutatorgruppe $[\pi_1(G), \pi_1(G)]$ von $\pi_1(G)$.

Proposition 3.49. *Die Sequenz von Homomorphismen abelscher Gruppen*

$$\mathcal{C}_2(D) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(D) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(D) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}, \quad (3.85)$$

erfüllt im $\partial_2 \subseteq \ker \partial_1$ und im $\partial_1 \subseteq \ker \varepsilon$. Insbesondere gilt $\partial_1 \circ \partial_2 = 0$.

Definition 25. *Zwei j -Zyklen heißen homolog, wenn sie sich nur um einen exakten j -Zyklus unterscheiden. Die Faktorgruppe $H_1(D) := \ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ heißt erste Homologiegruppe von D .*

Definition 26. *Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt einfach homologisch zusammenhängend, wenn $H_1(G)$ trivial ist.*

Bemerkung 3.50. Wenn das Integrations-Funktional I_f auf allen exakten 1-Zyklen verschwindet, liegt ein Gruppenhomomorphismus $I_f : H_1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ vor. Für holomorphes f werden wir das in Satz 3.55 sehen. Insbesondere den Fall des Indexfunktionals, i.e. für $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z-z_0}$ mit $z_0 \notin D$ werden wir später noch benötigen.

Es ist zu beachten, dass die erste Homologiegruppe im Unterschied zur ersten Homotopiegruppe stets *abelsch* ist. Auch die Gruppenoperationen unterscheiden sich grundlegend. Erst durch Integration von Vertretern einer Homotopie- bzw. Homologiekategorie entsteht ein Zusammenhang zwischen den beiden Konzepten.

Aufgrund obiger Bemerkung können wir jeden geschlossenen Weg γ als 1-Zyklus auffassen (denn $\partial_1 \gamma = 0$). Wir überlegen uns nun, dass diese Zuordnung nur von der Homotopieklasse von γ abhängt.

Proposition 3.51. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Die Abbildung $\bar{\chi} : \pi_1(G) \rightarrow H_1(G)$ mit

$$[\gamma] \mapsto \gamma + \text{im } \partial_2 \quad (3.86)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Insbesondere sind homotope Wege stets auch homolog.

Beweis. Seien γ_1, γ_2 geschlossene homotope Wege mit Anfangspunkt z_0 . Wir konstruieren eine 2-Kette $\tilde{\sigma}$ mit $\partial_2 \tilde{\sigma} = \gamma_1 - \gamma_2$, i.e. wir zeigen dass $\gamma_1 - \gamma_2$ exakt ist und $\bar{\chi}$ somit wohldefiniert ist.

Wir benötigen zuerst eine Abbildung, welche den Definitionsbereich $[0, 1] \times [0, 1]$ einer Homotopie stetig auf das 2-Simplex Δ_2 abbildet. Das wird von Θ geleistet:

$$\Theta_s(t) := \Theta(s, t) = t((1-s)e_1 + se_2). \quad (3.87)$$

Beachte das Randverhalten

$$\Theta_s(0) = 0, \quad \Theta_s(1) = (1-s)e_1 + se_2, \quad \Theta_0(t) = te_1, \quad \Theta_1(t) = te_2.$$

Nun ist Θ zwar nicht injektiv, wenn wir eine FEP-Homotopie $\tau : [0, 1] \times [0, 1]$ zwischen γ_1 und γ_2 haben, können wir trotzdem eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_2 \rightarrow D$ definieren, indem wir setzen

$$\sigma(\Theta_s(t)) := \tau_s(t). \quad (3.88)$$

Wenden wir den Randoperator auf σ an erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_2 \sigma &= (t \mapsto \Theta_0(t)) + (s \mapsto \Theta_s(1)) - (t \mapsto \Theta_1(t)) \\ &= \tau_0(t) + \tau_s(1) - \tau_1(t) \\ &= \gamma_1 + \epsilon_{z_0} - \gamma_2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Berechnen wir den Rand der konstanten 2-Kette $\sigma'(t, s) := z_0$, ergibt sich klarerweise $\partial_2 \sigma' = \epsilon_{z_0}$. Somit ist $\sigma - \sigma'$ eine 2-Kette mit

$$\partial_2 (\sigma - \sigma') = \gamma_1 - \gamma_2 \in \text{im } \partial_2. \quad (3.90)$$

Wir weisen nun die noch die Homomorphie von $\bar{\chi}$ nach: Seien γ_1, γ_2 zwei Wege mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_0 := \gamma_1 \gamma_2$ ihre Hintereinanderausführung. Wir konstruieren eine 2-Kette wie folgt:

$$\sigma(x, y) := \begin{cases} \gamma_1(x + 2y) & \text{falls } x + 2y \leq 1 \\ \gamma_2(x + 2y - 1) & \text{falls } x + 2y \geq 1 \end{cases} \quad (3.91)$$

Da $\sigma|_{[0, e_1]} = \gamma_1$, $\sigma|_{[e_1, e_2]} = \gamma_2$ und $\sigma|_{[e_2, 0]} = \gamma_0$ gilt, ist der 1-Zyklus $\partial_2 \sigma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_0$ exakt, i.e. die 1-Zyklen $\gamma_1 + \gamma_2$ und γ_0 sind homolog. Also ist

$$\bar{\chi}([\gamma_1][\gamma_2]) = \bar{\chi}([\gamma_0]) = \bar{\chi}([\gamma_1]) + \bar{\chi}([\gamma_2]).$$

Es bleibt noch, die Surjektivität nachzuweisen. Wir haben gerade nachgerechnet, dass unter der Einbettung

$$\chi : S_1(G) \rightarrow \mathcal{C}_1(G) \quad (3.92)$$

alle nullhomotopen Wege auf exakte 1-Zyklen abgebildet werden und sich diese Abbildung sogar zu $\bar{\chi} : \pi_1(G) \rightarrow H_1(G)$ faktorisieren lässt. Das bedeutet aber, dass für jeden geschlossenen Weg γ , die Klasse $\gamma +$ im ∂_2 als Bild auftritt. Wir sind fertig, sobald wir gezeigt haben, dass jede Klasse in $H_1(G)$ einen Repräsentanten besitzt, der ein geschlossener Weg ist. Das ist eine einfache Übungsaufgabe. \square

Korollar 3.52. *Ist ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, so ist G auch einfach homologisch zusammenhängend.*

Um den Kern des Gruppenhomomorphismus $\bar{\chi}$ zu identifizieren ist noch etwas Arbeit nötig. Den Beweis der nachstehenden Aussage müssen wir daher noch etwas verschieben.

Satz 3.53. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Der Kern des Gruppenhomomorphismus $\bar{\chi} : \pi_1(G) \rightarrow H_1(G)$ ist die Kommutatorgruppe $[\pi_1(G), \pi_1(G)]$ von $\pi_1(G)$. Insbesondere gilt $H_1(G) \cong \pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)]$.*

Beispiel 3.54.

1. Ist G ein Gebiet mit abelscher Fundamentalgruppe, so gilt $H_1(G) = \pi_1(G)$.
2. Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ die n -fach gepunktete Ebene, dann gilt $H_1(G) = \mathbb{Z}^n$.
3. Sei $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ die doppelt-gepunktete Ebene und γ der geschlossene Weg aus Beispiel 3.45. Sei $a := \partial B_1(1)$ ein Kreis um das eine Loch und $b := \partial B_1(-1)$ ein Kreis um das andere Loch. Dann ist γ zum Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ homotop, welcher nicht *nullhomotop* ist. Nach dem gerade gezeigten Satz ist γ aber (wie jeder andere Kommutator auch) *nullhomolog*.

Ist $z \notin D$, dann ist die Funktion $f_z(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in D und wir können jeden 1-Zyklus $\gamma \in \mathcal{C}_1(D)$ nach f_z integrieren. Das Integrations-Funktional I_{f_z} ist daher eine Fortsetzung der Indexfunktion $\text{ind}_{\gamma}(z)$ von $S_1(D)$ auf $\mathcal{C}_1(D)$.

Definition 27. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma = n_1\gamma_1 + \dots + n_k\gamma_k$ ein 1-Zyklus. Bild und Index eines 1-Zyklus sind definiert durch $\gamma^* := \bigcup_{i=1}^n \gamma_i^*$ bzw.

$$\text{ind}_\gamma(z) := I_{f_z}(\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{für } z \notin \gamma^*. \quad (3.93)$$

Wie jedes Integrationsfunktional ist $\text{ind}_\gamma(z)$ ein Homomorphismus $\mathcal{C}_1(D) \rightarrow \mathbb{C}$. Wir überlegen nun, dass $\text{ind}_\gamma(z)$ sogar ein Homomorphismus $H_1(D) \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

Satz 3.55. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $I_f : \mathcal{C}_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ das Integrations-Funktional. Dann gilt $\ker I_f \supseteq \text{im } \partial_2$, d.h. I_f verschwindet auf allen exakten 1-Zyklen. Insbesondere wird ein Homomorphismus $I_f : H_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ induziert.

Beweis. Wir fixieren einen Punkt z_0 und wählen für jedes $z \in G$ einen Weg α_z der z_0 mit z verbindet. Sodann identifizieren wir für den Rest des Beweises $\pi_1(G)$ und $\pi_1(G, z_0)$. Betrachte jene Abbildung μ , die einem Weg $\gamma \in S_1(D)$ die Nebenklasse

$$\gamma \mapsto [\alpha_{\gamma(0)} \gamma \hat{\alpha}_{\gamma(1)}] + [\pi_1(G), \pi_1(G)] \quad (3.94)$$

in der Faktorgruppe $\pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)]$ zuordnet. Da diese Faktorgruppe abelsch ist, können wir nach Bemerkung 3.47 die \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung betrachten und erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\mathcal{C}_1(G) \rightarrow \pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)]$, den wir wieder mit μ bezeichnen wollen. Auf einem 1-Zyklus wirkt μ dann wie folgt:

$$\mu : \gamma \mapsto \prod_i [\alpha_{\gamma_i(0)} \gamma_i \hat{\alpha}_{\gamma_i(1)}]^{n_i} + [\pi_1(G), \pi_1(G)]. \quad (3.95)$$

Wir argumentieren nun, dass μ auf $\text{im } \partial_2$ verschwindet. Sei dazu $\sigma \in S_2(D)$. Es lässt sich explizit eine FEP-Homotopie zwischen den Wegen $\sigma_{|[e_1, e_2]} \hat{\sigma}_{|[0, e_2]} \sigma_{|[0, e_1]}$ und $\varepsilon_{\sigma(e_1)}$ angeben (siehe dazu [1, 74 pp.]). Da μ und ∂_2 Homomorphismen sind, gilt also tatsächlich $\ker \mu \supseteq \text{im } \partial_2$.

Sei nun $\gamma = \sum_i n_i \gamma_i$ ein 1-Zyklus (i.e. eine geschlossene 1-Kette). Die Komposition $\overline{I_f} \circ \mu : H_1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ ist wohldefiniert:

$$\mathcal{C}_1(G) \xrightarrow{\mu} \pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)] \xrightarrow{\overline{I_f}} \mathbb{C}. \quad (3.96)$$

Nach dem gerade Gezeigten ist nämlich einerseits $\ker \mu \supseteq \text{im } \partial_2$, und andererseits $\ker \overline{I_f} \supseteq [\pi_1(G), \pi_1(G)]$, weil \mathbb{C} ja abelsch ist. Wir wenden diese Komposition auf die Homologiekategorie $\gamma + \text{im } \partial_2$ an:

$$\begin{aligned} \overline{I_f} \circ \mu(\gamma + \text{im } \partial_2) &= \sum_i n_i \overline{I_f}([\alpha_{\gamma_i(0)} \gamma_i \hat{\alpha}_{\gamma_i(1)}]) \\ &= \sum_i n_i I_f(\alpha_{\gamma_i(0)}) + \sum_i n_i I_f(\gamma_i) - \sum_i n_i I_f(\alpha_{\gamma_i(1)}). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Im folgenden erweist sich die Notation $I(z) := \{i : \gamma_i(0) = z\}$ und $J(z) := \{i : \gamma_i(1) = z\}$ für Anfangs- und Endpunkte der im 1-Zyklus γ vorkommenden Wege als zweckmäßig. Dass γ geschlossen ist, bedeutet gerade

$$\sum_{i \in I(z)} n_i = \sum_{i \in J(z)} n_i \quad (3.98)$$

für alle $z \in G$. Somit kürzen sich in (3.97) die erste und letzte Summe weg und wir erhalten

$$\overline{I}_f \circ \mu(\gamma + \text{im } \partial_2) = \sum_i n_i I_f(\gamma_i) = I_f(\gamma). \quad (3.99)$$

Somit ist $\overline{I}_f \circ \mu = I_f$. Insbesondere gilt $\ker I_f \supseteq \ker \mu \supseteq \text{im } \partial_2$. □

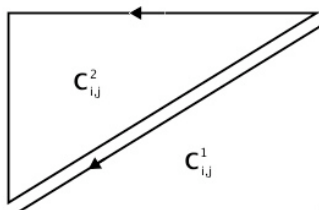
Korollar 3.56. *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach homologisch zusammenhängend, so ist jede in G holomorphe Funktion integrabel. Insbesondere besitzt jedes holomorphe $f : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ einen holomorphen Logarithmus in G .*

Beweis. Nach dem gerade gezeigten Satz ist $\oint_\gamma f dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in D . Nach Satz 3.5 ist f daher integrabel. Ist f nullstellenfrei, so ist $\frac{f'}{f}$ holomorph und besitzt daher eine Stammfunktion F , welche bis auf eine additive Konstante ein Logarithmus von f ist. □

Satz 3.57. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Ein 1-Zyklus $\gamma \in \mathcal{C}_1(G)$ ist genau dann exakt, wenn $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$.*

Beweis. Ist γ exakt, so besagt Satz 3.55 für $f_z(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z}$, dass $\text{ind}_\gamma(z) = I_{f_z}(\gamma) = 0$ gilt. Sei daher γ ein 1-Zyklus mit $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Wir konstruieren einen 2-Zyklus σ mit $\partial_2 \sigma = \gamma$. Dabei genügt es, wenn wir uns auf *spezielle* 1-Zyklen γ beschränken (Das sind 1-Zyklen die Linearkombinationen von Pfaden sind, die nur vertikal oder horizontal verlaufen. Jeder Weg ist nämlich zu einer Verknüpfung von solchen Pfaden FEP-homotop in G , vgl. Lemma 3.30).

Seien also $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ die Projektionen der End- bzw. Anfangspunkte von γ auf die horizontale Achse, und $b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$ die Projektionen auf die vertikale Achse. Wir können somit oBdA. annehmen, dass jeder Summand in $\gamma := \sum_k n_k \gamma_k$ von der Form $[a_i, a_{i+1}] \times \{b_j\}$ oder $\{a_i\} \times [b_j, b_{j+1}]$ ist. Mit $Q_{i,j}$ bezeichnen wir das Rechteck $[a_i, a_{i+1}] \times [b_j, b_{j+1}]$. Wir definieren nun auf $Q_{i,j}$ die 2-Kette $c_{i,j} = c_{i,j}^1 + c_{i,j}^2$ wie folgt:



Sei $z_{i,j} \in Q_{i,j}^\circ$. Setze $\gamma' := \sum_{i,j} \text{ind}_\gamma(z_{i,j}) \partial_2(c_{i,j})$. Dann ist γ' klarerweise der Rand einer 2-Kette in $\bigcup_{i,j} Q_{i,j}$. Wir zeigen, dass γ' sogar der Rand einer 2-Kette in G ist. Dazu genügt es offenbar für alle Indexpaare (i, j) mit $\text{ind}_\gamma(z_{i,j}) \neq 0$ zu zeigen, dass $Q_{i,j} \subseteq G$. Angenommen es gibt in einem solchen $Q_{i,j}$ einen Punkt z mit $z \notin G$, dann folgt wegen der Voraussetzung $\text{ind}_\gamma(z) = 0$. Da $\text{ind}_\gamma(\cdot)$ aber lokal konstant auf $Q_{i,j}^\circ$ ist, ist das ein Widerspruch zu $\text{ind}_\gamma(z_{i,j}) \neq 0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\gamma = \gamma'$. Die Differenz $\gamma - \gamma'$ ist von der Form $\sum_p n_p \sigma_p$, wobei die σ_p horizontale oder vertikale Segmente sind, die sich höchstens in ihren Endpunkten treffen. Sei oBdA. σ_{p_0} ein vertikales Segment, etwa der gemeinsame vertikale Rand der Rechtecke Q_{i_0-1, j_0} und Q_{i_0, j_0} . Betrachte die 1-Kette

$$\gamma'' = (\gamma - \gamma') + n_{p_0} \partial_2(c_{i_0, j_0}). \quad (3.100)$$

Es gilt dann $\text{ind}_{\gamma''}(z_{i_0, j_0}) = n_{p_0}$ und $\text{ind}_{\gamma''}(z_{i_0-1, j_0}) = 0$. Beachte, dass der 1-Zyklus $n_p \partial_2(c_{i_0, j_0})$ den Term $-n_{p_0} \sigma_{p_0}$ enthält. Somit kommt in γ'' das Segment σ_{p_0} mit Vielfachheit $(n_{p_0} - n_{p_0}) = 0$ vor. Es liegen daher Q_{i_0-1, j_0}° und Q_{i_0, j_0}° in der selben Komponente von $\mathbb{C} \setminus \gamma''^*$, woraus $n_{p_0} = \text{ind}_{\gamma''}(z_{i_0, j_0}) = \text{ind}_{\gamma''}(z_{i_0-1, j_0}) = 0$ folgt. Somit ist $\gamma = \gamma'$. \square

Wir sind nun endlich in der Lage den genauen Zusammenhang zwischen Homotopie- und Homologiegruppe herzustellen.

Beweis von Satz 3.53. Wir betrachten nochmals die Abbildung aus Satz 3.55

$$S_1(G) \ni \gamma \mapsto [\alpha_{\gamma(0)} \gamma \hat{\alpha}_{\gamma(1)}] + [\pi_1(G), \pi_1(G)] \quad (3.101)$$

und ihre \mathbb{Z} -lineare Fortsetzung $\mu : \mathcal{C}_1(G) \rightarrow \pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)]$. μ ist trivalerweise surjektiv. Wir haben bereits gesehen, dass $\ker \mu \supseteq \text{im } \partial_2$. Aus Satz 3.57 folgt nun, dass $\ker \mu = \text{im } \partial_2$. Wir haben daher einen *Isomorphismus*

$$\mu : H_1(G) \rightarrow \pi_1(G)/[\pi_1(G), \pi_1(G)]. \quad \square$$

3.5.3 Globaler Cauchy'scher Integralsatz

Ab sofort verwenden wir die Bezeichnung *nullhomolog* für die beiden äquivalenten Eigenschaften aus Satz 3.57 und sagen zu einem 1-Zyklus nur kurz Zyklus. Wir formulieren und beweisen nun die angekündigte allgemeine Fassung des Cauchy'schen Integralsatzes.

Satz 3.58 (Cauchy). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und γ ein nullhomologer Zyklus in D . Dann ist für $z_0 \in D \setminus \gamma^*$*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \text{ind}_\gamma(z_0) f(z_0). \quad (3.102)$$

Beweis. Definiere

$$g(z, w) := \begin{cases} f'(z) & \text{falls } z = w, \\ \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{falls } z \neq w. \end{cases} \quad (3.103)$$

Dann ist $g : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und in jeder der beiden Variablen holomorph (Übungsbeispiel). Wir setzen nun

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(z, w) dw & \text{falls } z \in D, \\ h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw & \text{falls } z \in \text{ext } \gamma. \end{aligned} \quad (3.104)$$

h ist auf ganz \mathbb{C} erklärt, denn da γ in D nullhomolog ist, ist für $z \notin D$ der Funktionswert $h(z)$ durch (3.104) definiert. h ist auch wohldefiniert, denn für $z \in D \setminus \gamma^*$ mit $\text{ind}_{\gamma}(z) = 0$ gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} g(z, w) dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \quad (3.105)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw}_{=\text{ind}_{\gamma}(z)}. \quad (3.106)$$

Wir zeigen nun, dass h holomorph ist: auf der offenen Menge $\text{ext } \gamma$ ist die Funktion h sicherlich holomorph, denn ihre Ableitung dort ist durch $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$ gegeben. Ebenso ist h auf D zumindest stetig. Um die Holomorphie in D zu zeigen, reicht es nach dem Satz von Morera, dass es um jeden Punkt $z_0 \in D$ eine kleine Kreisscheibe $B_r(z_0)$ gibt, sodass das Integral von h längs eines jeden Dreiecks $\Delta \subset B_r(z_0)$ verschwindet. Mit dem Satz von Fubini (g ist auf Kompakta in $D \times D$ integrierbar) erhalten wir nun

$$\oint_{\partial\Delta} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Delta} \oint_{\gamma} g(z, w) dw dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \oint_{\partial\Delta} g(z, w) dz dw = 0, \quad (3.107)$$

aus dem Lemma von Goursat, da die Funktion $z \mapsto g(z, w)$ in D holomorph ist. h ist also eine ganze Funktion. Außerhalb eines genügend großen Kreises $B_R(0) \supseteq \gamma^*$ gilt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \right| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{\|f\|_{\gamma^*}}{\text{dist}(z, \gamma^*)} < \varepsilon \quad (3.108)$$

Somit ist h nach dem Satz von Liouville überall 0. Das bedeutet

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{w - z} dw. \quad \square$$

Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so können sich die Nullstellen von f nur am Rand von G häufen. Insbesondere kann eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ nur endlich viele Nullstellen enthalten. Wir können dort durch wiederholte Anwendung von Bemerkung 2.31 schreiben

$$f(z) = (z - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - a_n)^{k_n} g(z) \quad (3.109)$$

wobei a_i die mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen von f in $K \subseteq G$ und g eine in G holomorphe und in $K \subseteq G$ nullstellenfreie Funktion ist. Logarithmisches Ableiten ergibt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1}{z - a_1} + \dots + \frac{k_n}{z - a_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}. \quad (3.110)$$

Satz 3.59 (Nullstellenzählendes Integral). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, γ ein in G nullhomologer Zyklus, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und auf γ^* nullstellenfrei. Sind a_1, \dots, a_n die Nullstellen von f in $\text{int } \gamma$ und ist k_i die Vielfachheit der Nullstelle a_i , dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n k_i \text{ind}_{\gamma}(a_i). \quad (3.111)$$

Beweis. Wir verwenden die Darstellung (3.110). Nach Cauchy ist $\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - a_i} = \text{ind}_{\gamma}(a_i)$ und da $\frac{g'}{g}$ holomorph und γ nullhomolog in D ist, gilt $\oint_{\gamma} \frac{g(z)'}{g(z)} dz = 0$. \square

Definition 28. *Ein geschlossener Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt einfach geschlossen, wenn $\text{ind}_{\gamma}(\cdot)$ nur die Werte 0 und 1 annimmt.*

Jeder Punkt im Inneren eines einfach geschlossenen Weges hat also Index 1. Insbesondere sind einfach durchlaufene positiv orientierte Kreise einfach geschlossen.

Bemerkung 3.60. Ist γ ein einfach geschlossener Weg, so gibt $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz$ nach dem Satz vom nullstellenzählenden Integral genau die Anzahl der a -Stellen in $\text{int } \gamma$ an.

Satz 3.61 (Satz von der Gebietstreue). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f konstant oder offen. Insbesondere ist $f(G)$ einpunktig oder ein Gebiet.*

Beweis. Sei f nicht konstant. Wir zeigen, dass f lokal offen ist, i.e. für jeden Punkt $z_0 \in G$ und jede Umgebung U von z_0 gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(U)$ eine Kreisscheibe $B_{\varepsilon}(f(z_0))$ enthält. Da eine offene Menge Umgebung von jedem ihrer Punkte ist, folgt daraus die Offenheit von f .

Wir nehmen zunächst an, dass f nur einfache a -Stellen hat. Sei also z_0 eine einfache a -Stelle und $\delta > 0$ so, dass $B_{2\delta}(z_0)$ ganz in G liegt. Durch weiteres Verkleinern von δ können wir erreichen dass z_0 dort die einzige a -Stelle von f ist und f' dort nicht verschwindet.

Setze $\gamma := \partial B_{\delta}(z_0)$ und betrachte $\sigma := f \circ \gamma$. Da z_0 die einzige a -Stelle ist, gilt $a \notin \sigma^*$ und wir können sogar eine Kreisscheibe $B_{\varepsilon}(a)$ finden, die in der selben Komponente von $\mathbb{C} \setminus \sigma^*$ liegt wie $\{a\}$. Auf dieser Kreisscheibe ist der Index $\text{ind}_{\sigma}(a)$ natürlich konstant. Wir wollen diesen Index nun berechnen:

$$\text{ind}_{\sigma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} \frac{dz}{z - a} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = 1, \quad (3.112)$$

denn wegen Bemerkung 3.60 ist der letzte Ausdruck gleich der Anzahl der a -Stellen in $B_\delta(z_0)$. Es gibt daher zu jedem $\alpha \in B_\varepsilon(a)$ genau ein $z \in B_\delta(z_0)$ mit $f(z) = \alpha$, i.e. $f(B_\delta(z_0)) \supseteq B_\varepsilon(a)$.

Nun zum allgemeinen Fall k -facher a -Stellen: Sei z_0 eine k -fache Nullstelle von $f(z) - a$, dann gibt es nach dem Satz von der holomorphen Wurzel eine holomorphe Funktion h mit $f(z) - a = h(z)^k$, welche an z_0 eine einfache Nullstelle besitzt. Sei U eine Umgebung von z_0 . Nach dem bereits Bewiesenen enthält $h(U)$ eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(0)$, also enthält $f(U)$ eine Kreisscheibe $B_{\varepsilon^k}(a)$. \square

Satz 3.62 (Satz von der Umkehrfunktion). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann ist $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ ebenfalls holomorph.*

Beweis. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ ist wegen des Satzes von der Gebietstreue jedenfalls stetig. Der Beweis der Aussage für den Fall, dass f eine nirgends verschwindende Ableitung hat, ist ein Übungsbeispiel.

Wir nehmen nun an, dass $z_0 \in G$ eine Nullstelle von f' in G ist. Durch Vor- bzw. Nachschalten einer Translation können wir oBdA. annehmen, dass $z_0 = 0$ und z_0 sogar k -fache Nullstelle von f , mit $k \geq 2$, ist. Es gibt dann nach dem Satz von der holomorphen Wurzel eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = g(z)^k$, welche an $z_0 = 0$ eine einfache Nullstelle besitzt. Wegen des Satzes von der Gebietstreue enthält $g(G)$ eine Kreisscheibe $B_r(0)$. Auf dieser Kreisscheibe ist aber die Potenzfunktion $z \mapsto z^k$ nicht injektiv, mithin kann auch $f(z) = g(z)^k$ nicht injektiv sein. Widerspruch. \square

4 Ganze und meromorphe Funktionen

4.1 Singularitäten und Laurent-Reihen

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so heißen die isolierten Punkte des Komplements $\mathbb{C} \setminus D$ die isolierten Singularitäten von f . Eine isolierte Singularität ist also ein Punkt z_0 , an dem f zwar nicht definiert ist, um den es aber eine offene Kreisscheibe gibt, worin er der einzige nicht zum Definitionsbereich D gehörige Punkt ist. Man unterscheidet drei Typen von isolierten Singularitäten:

Definition 29. Eine isolierte Singularität z_0 einer holomorphen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt

1. hebbbar, wenn f durch geeignete Festsetzung von $f(z_0)$ zu einer holomorphen Funktion auf $D \cup \{z_0\}$ wird.
2. Pol, wenn sie nicht hebbbar ist, aber ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(z - z_0)^k f(z)$ eine hebbare Singularität bei z_0 hat. Das kleinste derartige k heißt die Ordnung des Poles.
3. wesentlich, wenn sie weder hebbbar, noch ein Pol ist.

Ist f eine ganze Funktion, so sagen wir, dass f bei ∞ eine hebbare Singularität bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität hat, wenn $z_0 = 0$ diese Eigenschaft für die Funktion $f^\times(z) := f(z^{-1})$ hat.

Beispiel 4.1.

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ hat an 0 eine durch 1 hebbare isolierte Singularität.
2. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^{m+1}}$ hat an 0 einen Pol m -ter Ordnung.
3. $f(z) = e^z$ hat an ∞ eine wesentliche Singularität.

Definition 30. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $D \supseteq A$ abgeschlossen und $f : D \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ stetig bzw. holomorph, so heißt f stetig bzw. holomorph nach A fortsetzbar, wenn es eine in D stetige bzw. holomorphe Funktion $\hat{f} : D \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\hat{f}|_{D \setminus A} = f$.

Satz 4.2 (Riemann'scher Fortsetzungssatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ist $A \subseteq D$ eine abgeschlossene Menge isolierter Singularitäten, dann sind äquivalent:

1. f ist holomorph nach A fortsetzbar.
2. f ist stetig nach A fortsetzbar.
3. f ist in einer Umgebung $U \subseteq D$ eines jeden Punktes $z_0 \in A$ beschränkt.

Beweis. Wir zeigen, wie aus Aussage (3) die Aussage (1) folgt: Da nach Definition A diskret ist, können wir oBdA. annehmen, dass A nur den Punkt z_0 enthält. Wir betrachten die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0) f(z) & \text{für } z \neq z_0 \\ 0 & \text{für } z = z_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$g : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig, da f um z_0 beschränkt ist. Die Funktion $h(z) := (z - z_0) g(z)$ ist somit holomorph, denn an z_0 gilt ja $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = g(z_0) = 0$, und kann daher um z_0 in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n \quad (4.2)$$

(Beachte $h(z_0) = h'(z_0) = 0$). Damit ist aber die holomorphe Fortsetzung von f nach D durch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - z_0)^n$ gegeben. \square

Korollar 4.3 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). *Der Punkt z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität einer in $D \setminus \{z_0\}$ holomorphen Funktion f , wenn es eine Umgebung $U \subseteq D$ von z_0 gibt, so dass f in $U \setminus \{z_0\}$ beschränkt ist.*

Die Holomorphie einer Funktion kann also höchstens von Polen oder wesentlichen Singularitäten unterbunden werden. Im letzteren Fall dafür aber sehr kräftig:

Proposition 4.4 (Casorati-Weierstrass). *Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und z_0 eine wesentliche Singularität von f , dann liegt für jede (noch so kleine) Kreisscheibe $B_\varepsilon(z_0)$ das Bild $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ dicht in \mathbb{C} .*

Beweis. Angenommen es gäbe eine Umgebung $U \subseteq D$ von z_0 , so dass $f(U \setminus \{z_0\})$ nicht dicht in \mathbb{C} liegt. Dann gibt es also ein $w_0 \in \mathbb{C}$ und eine Kreisscheibe $B_r(w_0)$ mit $r > 0$, sodass $f(U \setminus \{z_0\}) \cap B_r(w_0) = \emptyset$. Da dann dort $|f(z) - w_0| \geq r$, ist die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w_0} \quad (4.3)$$

in $U \setminus \{z_0\}$ holomorph und beschränkt. Nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz ist sie zu einer holomorphen Funktion auf ganz U fortsetzbar. Wäre $g(z_0) \neq 0$, so wäre wegen (4.3) z_0 eine hebbare Singularität für f . Ist hingegen z_0 eine Nullstelle k -ter Ordnung von g , dann hat

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0. \quad (4.4)$$

einen Pol k -ter Ordnung in z_0 , was ebenfalls ein Widerspruch zur Voraussetzung ist, dass sich dort eine wesentliche Singularität befindet. \square

Bemerkung 4.5. Aus dem Satz von der Gebietstreue folgt, dass $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ sogar stets eine *offen* dichte Menge ist.

Korollar 4.6.

1. Ist f eine ganze Funktion welche kein Polynom ist, so gibt es zu jeder Zahl $w \in \mathbb{C}$ eine Folge z_n in \mathbb{C} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$.
2. Ist f eine ganze Funktion, welche eine stetige Fortsetzung auf \mathbb{C}_∞ besitzt, i.e. für die $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)$ existiert, dann ist f ein Polynom.

Beweis. 1. folgt aus dem Satz von Casorati-Weierstrass, wenn wir gezeigt haben, dass f eine wesentliche Singularität bei ∞ besitzt.

Sei also $f^\times : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f^\times(z) := f(z^{-1})$ und $z_0 = 0$ lediglich ein Pol von f^\times , etwa der Ordnung k_0 . Da f eine überall konvergente Potenzreihen-Entwicklung $f(z) = \sum a_n z^n$ besitzt können wir für $k \geq k_0$ schreiben

$$z^k f^\times(z) = z^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^k a_{k-n} z^n. \quad (4.5)$$

Aufgrund der Existenz von Stammfunktionen gilt daher

$$0 = \oint z^k f^\times(z) dz = \sum_{n=-\infty}^k a_{k-n} \oint z^n dz = 2\pi i a_{k+1}. \quad (4.6)$$

Somit verschwinden fast alle a_n , i.e. f ist ein Polynom. Aussage 2 folgt nun direkt aus 1. \square

Um eine isolierte Singularität lässt sich eine holomorphe Funktion zwar im allgemeinen nicht in eine Potenzreihe entwickeln, wohl aber in eine sogenannte Laurentreihe. Unter einer Laurentreihe um z_0 versteht man eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (4.7)$$

oder, genauer, das Paar der beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4.8)$$

welche Haupt- und Nebenteil der Laurentreihe genannt wird. Dementsprechend heißt eine Laurentreihe konvergent, wenn das für beide Teilreihen zutrifft. Es gibt stets eine Kreisring um z_0 außerhalb dessen die Laurentreihe divergiert und auf dessen kompakten Teilmengen sie gleichmäßig und absolut konvergiert. Kreisringe wollen wir im weiteren mit $A_{r,R}(z_0) := \{z : r < |z - z_0| < R\}$ abkürzen.

Satz 4.7 (Entwicklungssatz von Laurent). *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f . Dann lässt sich f um jeden Kreisring mit*

$\overline{A_{r,R}(z_0)} \subseteq D$ in eine konvergente Laurentreihe entwickeln. Für $z \in A_{r,R}(z_0)$ und $r \leq \rho \leq R$ gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \quad (4.9)$$

Beweis. Der Zyklus $\gamma := \partial B_R(z_0) - \partial B_r(z_0)$ ist nullhomolog in $A_{r,R}(z_0)$ und der Cauchy'sche Satz liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.10)$$

Sei $r' := r + \varepsilon$ und $R' := R - \varepsilon$. Das erste Integral auf der rechten Seite von (4.10) entwickeln wir für $\zeta \in \partial B_R(z_0)$ und $|z - z_0| \leq R'$ wie im Satz von Cauchy-Taylor zu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \quad (4.11)$$

Um das zweite Integral auf der rechten Seite von (4.10) zu entwickeln, schreiben wir nun

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad (4.12)$$

und beachten, dass die geometrische Reihe gleichmäßig und absolut für $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ und $|z - z_0| \geq r'$ konvergiert. Wir dürfen somit wieder Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^n d\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}. \quad (4.13)$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Integrale $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_\rho(z_0)} f(\zeta) (\zeta - z_0)^k d\zeta$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht von $r \leq \rho \leq R$ abhängen. Das ist aber eine einfache Konsequenz aus dem Cauchy'schen Satz, denn die Kurven ∂B_ρ sind alle in $A_{r,R}(z_0)$ homolog zueinander. \square

Bemerkung 4.8. Die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung sind durch (4.9) eindeutig bestimmt, da sich aus ihnen z.B. die Fourier-Entwicklung der Funktion $f_r : \varphi \mapsto f(z_0 + re^{i\varphi})$ analog zur Gutzmer'schen Formel herleiten lässt.

Beispiel 4.9. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat um $z_0 = 0$ die in \mathbb{C}^\times konvergente Laurententwicklung

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}. \quad (4.14)$$

Ist die Funktion f im Kreisring $A_{r,R}(z_0)$ holomorph und ist $\sum a_n (z - z_0)^n$ dort ihre Laurent-Entwicklung, so gilt

$$\int_{\partial B_\rho(z_0)} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i a_{-1} \quad (4.15)$$

Wir wollen diese Beobachtung im nächsten Abschnitt weiter ausbauen.

4.2 Residuenkalkül

Wir benötigen zunächst eine einfache Konstruktion Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und z_1, \dots, z_n endlich viele paarweise verschiedene Punkte in D . Es gibt dann zu jedem Zyklus $\gamma : [0, 1] \rightarrow D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, sodass γ zum Zyklus

$$\text{ind}_\gamma(z_1) \partial B_\varepsilon(z_1) + \dots + \text{ind}_\gamma(z_n) \partial B_\varepsilon(z_n) \quad (4.16)$$

in D homolog ist. (Dass dem wirklich so ist, folgt daraus, dass γ und der Zyklus aus (4.16) die selbe Indexfunktion in $\mathbb{C} \setminus D$ haben.)

Definition 31 (Residuum). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine isolierte Singularität von f . Der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Entwicklung von f um z_0 heißt Residuum $\text{res}_f(z_0)$.

Satz 4.10 (Residuensatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph außer an den isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_n . Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ ein nullhomologer Zyklus, dann gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{ind}_\gamma(z_i) \text{res}_f(z_i). \quad (4.17)$$

Beweis. Sei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(i)} (z - z_i)^k$ die Laurent-Entwicklung von f um z_i . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z) dz &= \sum_{i=1}^n \text{ind}_\gamma(z_i) \oint_{\partial B_\varepsilon(z_i)} f(z) dz \\ &= \sum_{i=1}^n \text{ind}_\gamma(z_i) \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{\partial B_\varepsilon(z_i)} a_k^{(i)} (z - z_i)^k dz}_{=2\pi i \text{res}_f(z_i)}. \quad \square \end{aligned} \quad (4.18)$$

Zur Berechnung von Residuen kann hilfreich sein:

Proposition 4.11. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $f : D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und hat an z_0 einen einfachen Pol dann ist

$$\text{res}_{fg}(z_0) = g(z_0) \text{res}_f(z_0). \quad (4.19)$$

Proposition 4.12. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine einfache Nullstelle von f . Dann hat $\frac{1}{f}$ an z_0 einen einfachen Pol und es gilt

$$\operatorname{res}_{1/f}(z_0) = (f'(z_0))^{-1}. \quad (4.20)$$

Proposition 4.13. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine k -fache Nullstelle von f . Dann hat $\frac{f'}{f}$ an z_0 einen einfachen Pol und es gilt

$$\operatorname{res}_{f'/f}(z_0) = k. \quad (4.21)$$

Beweis von Proposition 4.11-4.13. Nachrechnen.

Beispiel 4.14. Gesucht ist das reelle Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}$. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}$ ist holomorph in ganz \mathbb{C} mit Ausnahme der beiden einfachen Pole an $z = \pm ia$. Dort gilt $\operatorname{res}_f(\pm ia) = \pm \frac{1}{2ia}$. Sei γ_R der geschlossene Halbkreisbogen in der oberen Halbebene mit Radius R . Dann gilt nach dem Residuensatz

$$2\pi i \operatorname{res}_f(ia) = \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2+a^2} + \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{R^2e^{2it}+a^2} dt \quad (4.22)$$

Wegen $|R^2e^{2it}+a^2| \geq R^2-a^2$ ist das letzte Integral betragsmäßig beschränkt durch $\frac{\pi R}{R^2-a^2}$. Lassen wir also $R \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi i \operatorname{res}_f(ia) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}. \quad (4.23)$$

4.3 Meromorphe Funktionen

Definition 32. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine bis auf Pole und hebbare Singularitäten holomorphe Funktion, so nennt man f meromorph.

Eine Funktion ist also genau dann meromorph, wenn sie lokal der Quotient von zwei holomorphen Funktionen ist. Dass diese Aussage auch global gilt, werden wir mit Hilfe des Weierstrass'schen Produktsatzes sehen.

Zuvor fassen wir einige nützliche Fakten über unendliche Produkte zusammen. Zur Erinnerung: Ein unendliches Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der partiellen Produkte $p_n := \prod_{i=1}^n a_i$ konvergiert. Um Triviales zu vermeiden, fordern wir $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und interessieren uns nur für Grenzwerte ungleich 0. Eine notwendige Bedingung für diese Konvergenz ist dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Lemma 4.15. Sei \ln der Hauptzweig des komplexen Logarithmus und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen.

1. Sei $\operatorname{Re} a_n > 0$. Das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann gegen einen Grenzwert $\neq 0$, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ konvergiert.
2. Sei $\operatorname{Re} a_n > -1$. Die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ konvergiert genau dann absolut, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert.

Beweis. Folgt aus der Tatsache, dass bei 1. für große n stets $a_n \in B_{1/2}(1)$ und bei 2. $a_n \in B_{1/2}(0)$ gelten muss. Für Details dieser elementaren Rechnung siehe z.B. [2, Proposition 5.2 und 5.4]. \square

Lemma 4.16. *Sei $X \subseteq \mathbb{C}$ beliebig und $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge gleichmäßig gegen f konvergenter Funktionen auf X . Wenn $\operatorname{Re} f$ auf X beschränkt ist, dann konvergiert auch die Funktionenfolge $\exp(f_n)$ gleichmäßig auf X gegen $\exp(f)$.*

Beweis. Sei $\|f_n - f\|_X < \delta$ mit $(e^\delta - 1) < \varepsilon$, dann ist

$$\|e^{f_n} - e^f\|_X = \|e^f\|_X \cdot \|e^{(f_n - f)} - 1\|_X \leq e^{\|\operatorname{Re} f\|_X} \varepsilon. \quad \square$$

Proposition 4.17. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, sodass $\sum f_n$ gleichmäßig und absolut auf Kompakta konvergiert. Dann existiert der Grenzwert*

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z)) \quad (4.24)$$

und stellt eine in D holomorphe Funktion dar. Außerdem gibt es einen Index n_0 , sodass für jede Nullstelle $z \in D$ von f gilt, dass für einen Index $n < n_0$ der Faktor $(1 + f_n(z))$ verschwindet.

Beweis. Wir zeigen, dass das unendliche Produkt (4.24) gleichmäßig auf Kompakta konvergiert. Da alle Faktoren holomorph sind, muss dann auch der Grenzwert holomorph sein (vgl. Übungsbeispiel).

Sei $K \subseteq D$ kompakt. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum f_n$ gibt es einen Index n_0 , sodass $|f_n(z)| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq n_0$ und $z \in K$. Insbesondere ist dann $\operatorname{Re}(1 + f_n(z)) > 0$ und daher konvergiert $\prod_{n=n_0}^{\infty} (1 + f_n(z))$ genau dann, wenn $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1 + f_n(z))$ konvergiert. Letzteres ist wegen Lemma 4.15.1 der Fall. Als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen ist $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1 + f_n(z))$ auf K beschränkt. Nach Lemma 4.16 konvergiert daher auch

$$\exp\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1 + f_n)\right) = \prod_{n=n_0}^{\infty} (1 + f_n(x)). \quad (4.25)$$

Gilt nun

$$0 = f(z) = (1 + f_1(z)) \dots (1 + f_{n_0-1}(z)) \underbrace{\exp\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln(1 + f_n)\right)}_{\neq 0} \quad (4.26)$$

muss also einer der Faktoren $(1 + f_n(z))$ mit $n < n_0$ verschwinden. \square

Definition 33. *Die ganzen Funktionen*

$$E_p(z) = \begin{cases} 1 - z & \text{für } p = 1 \\ (1 - z) \exp\left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{z^n}{n}\right) & \text{für } p > 1 \end{cases} \quad (4.27)$$

heißen *Elementarfaktoren*.

Bemerkung 4.18.

1. Jeder Elementarfaktor E_p hat genau eine Nullstelle: nämlich eine einfache Nullstelle an $z = 1$.
2. Die Ableitung ist gegeben durch $E_p'(z) = -z^{p-1} \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{p-1}\right)$.

Es wird sich im folgenden auch als nützlich erweisen, dass wir für $|z| < 1$ die Funktion $\ln(1 - z)$ in ihre Taylorreihe $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ entwickeln können. Es gilt damit nämlich

$$\ln E_p(z) = -\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad (4.28)$$

und daher $|E_p(z)| = \left| \exp\left(-\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) \right| = \exp\left(-\operatorname{Re} \sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right)$

$$\geq \exp\left(-\sum_{n=p}^{\infty} \frac{|z|^n}{n}\right) = E_p(|z|). \quad (4.29)$$

Lemma 4.19.

1. Sei $0 < |z| < 1$. Dann gilt $|1 - E_p(z)| < |z|^p$.
2. Sei $0 < |z| < \frac{1}{2}$. Dann gilt $-\frac{2}{p}|z|^p \leq \ln |E_p(z)| < |z|^p$.

Beweis. ad (1): Sei

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \quad (4.30)$$

die Taylor-Entwicklung von E_p um 0. Aus der Darstellung

$$E_p'(z) = -z^{p-1} \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{p-1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \quad (4.31)$$

lesen wir ab, dass $a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ und $a_k < 0$ für $k \geq p$ (denn die Koeffizienten in der Entwicklung von $\exp\left(z + \frac{z}{2} + \dots + \frac{z^{p-1}}{p-1}\right)$ sind alle positiv). Weiters gilt

$$\sum_{k=p}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p}^{\infty} a_k = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -E_p(1) + 1 = 1. \quad (4.32)$$

Somit können wir für $|z| < 1$ abschätzen:

$$|E_p(z) - 1| = \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^k \right| = |z|^p \left| \sum_{k=p}^{\infty} a_k z^{k-p} \right| \quad (4.33)$$

$$\leq |z|^p \sum_{k=p}^{\infty} |a_k| \cdot 1 = |z|^p. \quad (4.34)$$

ad (2): Durch Logarithmieren und Anwenden der elementare Ungleichung $\ln(1+t) \leq t$, folgt aus dem gerade Gezeigten

$$\ln |E_p(z)| \leq \ln(1 + |1 - E_p(z)|) \leq |1 - E_p(z)| \leq |z|^p, \quad (4.35)$$

i.e. die rechte Seite der behaupteten Ungleichung. Verwenden wir (4.29), erhalten wir für $|z| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \ln |E_p(z)| &\geq \ln E_p(|z|) = -\frac{|z|^p}{p} - \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \\ &= -\frac{|z|^p}{p} - |z|^p \underbrace{\left(\frac{|z|}{p+1} + \frac{|z|^2}{p+2} + \dots \right)}_{\leq \frac{1}{p+1} \cdot 1} \geq -\frac{2}{p}|z|^p. \quad \square \end{aligned} \quad (4.36)$$

Satz 4.20 (Produktsatz von Weierstrass). *Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge (nicht notwendigerweise paarweise verschiedener) komplexer Zahlen, welche keinen Häufungspunkt besitzt. Dann gibt es eine ganze Funktion f , welche unter Berücksichtigung von Vielfachheiten ihre Nullstellen genau an den a_n besitzt.*

Beweis. Wir können oBdA. $a_n \neq 0$ für alle n annehmen (multipliziere die Funktion f am Schluss gegebenenfalls mit z^m). Da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ keinen Häufungspunkt besitzt, gilt sicherlich $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Deshalb gilt auch für jedes $r > 0$ (Wurzelkriterium!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^n < \infty. \quad (4.37)$$

Wegen Lemma 4.19 gilt für $|z| \leq r$

$$\left| 1 - E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) \right| \leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^n \leq \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^n. \quad (4.38)$$

Somit konvergiert für jedes feste R die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1 \right) \quad (4.39)$$

gleichmäßig und absolut auf der Kreisscheibe $\overline{B}_R(0)$. Damit konvergiert nach Proposition 4.17 dort aber auch das Produkt

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{a_n}\right). \quad (4.40)$$

und stellt dort eine holomorphe Funktion dar, welche zumindest auf $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cap B_R(0)$ verschwindet. Nach Proposition 4.17 gibt es einen Index n_0 derart, dass $z \in B_R(0)$ genau dann eine Nullstelle von f ist, wenn $E_n\left(\frac{z}{a_n}\right) = 0$ für ein $n < n_0$. Somit sind die a_n mit $|a_n| < R$ genau die in $B_R(0)$ gelegenen Nullstellen von f . Klarerweise stimmen dann auch die Vielfachheiten überein. Da $R > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 4.21. Es lässt sich die Folge $E_1(\frac{z}{a_1}), E_2(\frac{z}{a_2}), \dots$ durch jede Folge $E_{p_1}(\frac{z}{a_1}), E_{p_2}(\frac{z}{a_2}), \dots$ ersetzen, welche folgende Wachstumsbedingung erfüllt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p_n} < \infty, \quad \text{für alle } r > 0. \quad (4.41)$$

Satz 4.22 (Faktorisierungssatz von Weierstrass). *Sei f eine ganze Funktionen und $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ die betragsmäßig ansteigend geordnete Folge der von Null verschiedenen Nullstellen von f (jeweils wiederholt mit ihrer Vielfachheit). Dann gibt es eine ganze Funktion g und eine Folge natürlicher Zahlen $(p_n)_{n=0}^{\infty}$, sodass*

$$f(z) = z^{p_0} e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right). \quad (4.42)$$

Beweis. Sei p_0 die Vielfachheit der Nullstelle 0 und $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ irgendeine Folge, die die Wachstumsbedingung aus Bemerkung 4.21 erfüllt. Nach dem Produktsatz von Weierstrass besitzt die Funktion

$$h(z) = z^{p_0} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{a_n} \right) \quad (4.43)$$

die selben Nullstellen mit den selben Vielfachheiten wie f . Die Funktion f/h besitzt daher ausschließlich hebbare Singularitäten und lässt sich also zu einer ganzen und nullstellenfreien Funktion fortsetzen. Da \mathbb{C} einfach zusammenhängend ist, gibt es einen holomorphen Logarithmus $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, i.e. $\frac{f}{h} = e^g$. \square

Die Rolle der Folge $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ wollen wir im nächsten Abschnitt noch näher untersuchen.

Korollar 4.23. *Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, dann gibt es ganze Funktionen g, h , sodass $f = \frac{g}{h}$.*

Korollar 4.24. *Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, welche eine stetige Fortsetzung auf \mathbb{C}_∞ besitzt, i.e. existiert $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)$, dann ist f rational.*

Bemerkung 4.25. Der Produktsatz 4.20 und der Faktorisierungssatz 4.22 gelten entsprechend sogar für beliebige Gebiete $G \subseteq \mathbb{C}$. Wir wollen das an dieser Stelle aber nicht beweisen und verweisen stattdessen auf [2, Proposition 5.15].

4.4 Funktionen mit endlicher Ordnung

In diesem Abschnitt wollen wir die Wachstumsraten von ganzen Funktionen betrachten. Wir vereinbaren dabei für ganze Funktionen folgende Sprechweise: $\|f\|_R \ll R^p$ wenn es ein $R_0 > 0$ und ein $C > 0$ gibt, sodass $|f(z)| \leq C|z|^p$ für alle z mit $|z| \geq R_0$.

Aus dem Satz von Liouville wissen wir schon, dass ganze Funktionen mit polynomiellen Wachstum auch wirklich Polynome sind. Quasi zum Aufwärmen wollen wir uns folgende exponentielle Variante dieser Aussage überlegen.

Proposition 4.26. *Ist f eine ganze und nullstellenfreie Funktion mit $\|f\|_R \ll e^{\alpha R^k}$ für ein $\alpha > 0$. Dann ist $f(z) = e^{h(z)}$ für ein Polynom h vom Grad höchstens k .*

Beweis. Da f nullstellenfrei ist, gibt es einen ganzen Logarithmus $e^{h(z)} = f(z)$. Wir nehmen oBdA. $h(0) = 0$ an. Die Wachstumsbedingung lautet dann

$$e^{\alpha|z|^k} \geq |f(z)| = |e^{h(z)}| = e^{\operatorname{Re} h(z)} \quad (4.44)$$

Es ist also $\operatorname{Re} h$ auf der Kreislinie $\partial B_{2R}(0)$ durch $\alpha (2R)^k$ beschränkt. Aufgrund des Maximumprinzips gilt sogar $\operatorname{Re} h(z) \leq \alpha (2R)^k$ für alle $z \in B_{2R}(0)$. Vermöge der Schwarz'schen Integralformel 3.17.2, angewandt auf $\partial B_{2R}(0)$ erhalten wir damit für $|z| \leq R$ zunächst die Abschätzung

$$\operatorname{Re} h(z) \geq -(3\alpha) (2R)^k, \quad (4.45)$$

insgesamt also $|\operatorname{Re} h(z)| \leq (3\alpha) (2R)^k$ für alle $z \in B_R(0)$. Wieder mit der Schwarz'schen Integralformel folgt dann

$$|h(z)| \leq 3\|\operatorname{Re} h\|_R \ll R^k. \quad (4.46)$$

Aus dem Satz von Liouville folgt, dass h ein Polynom vom Grad höchstens k ist. \square

Bemerkung 4.27. Ist f eine ganze Funktion mit $\|f\|_R \ll e^{\alpha R^p}$ für ein $\alpha > 0$ und $N_f(R)$ die Anzahl der Nullstellen von f in der Kreisscheibe $B_R(0)$. Dann ist $N_f(R) \ll R^p$, wie man durch Abschätzen von $\|g\|_{3R}$ für die holomorphe (!) Funktion

$$g(z) := f(z) \frac{z_1 \cdots z_{N_f(R)}}{(z_1 - z) \cdots (z_{N_f(R)} - z)} \quad (4.47)$$

sieht. Es sind dabei $z_1, \dots, z_{N_f(R)}$ die Nullstellen von f in $B_R(0)$.

Definition 34. Ist f eine ganze Funktion und sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ ihre von Null verschiedenen Nullstellen, dann heißt das Infimum über alle Zahlen $p > 0$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^p} < \infty \quad (4.48)$$

Rang von f bzw. der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$. Gibt es kein solches p ist der Rang ∞ ; gibt es nur endlich viele Nullstellen, ist der Rang 0. Wird das Infimum angenommen sprechen wir von striktem Rang.

Proposition 4.28. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Null verschiedener komplexer Zahlen, welche keinen Häufungspunkt besitzt und betragsmäßig ansteigend angeordnet ist. Besitzt $(a_n)_{n=1}^\infty$ den strikten Rang p und ist $k = \lfloor p + 1 \rfloor \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl echt größer als p , dann erfüllt das Weierstrass-Produkt

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (4.49)$$

die Wachstumsbedingung $\|E\|_R \ll e^{\alpha R^p}$ für alle $\alpha > 0$.

Beweis. Strikter Rang p bedeutet, dass die Reihe $\sum \frac{1}{|a_n|^p}$ konvergiert. Die konstante Folge $(p_n)_{n=1}^\infty = k$ erfüllt daher die für den Produktsatz von Weierstrass nötige Wachstumsbedingung $\sum \frac{r^k}{|a_n|^k} < \infty$ für alle $r > 0$. Somit existiert das Weierstrass-Produkt $E(z)$.

Die Behauptung trifft offenbar für *einzelne* Elementarfaktoren zu, denn aus

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln |E_k(z)|}{|z|^p} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \leq \frac{\ln |1 - z| + (|z| + \dots + \frac{|z|^{k-1}}{k-1})}{|z|^p} = 0 \quad (4.50)$$

für hinreichend große z , folgt $\ln |E_k(z)| \leq \alpha |z|^p$ für jedes $\alpha > 0$ und $|z| > R_\alpha$, was ja gerade $\|E_p\|_R \ll e^{\alpha R^p}$ besagt.

Ist hingegen z in einem Kreisring $\bar{A}_{1/2, R}(0)$, so betrachten wir die Funktion $\ln |E_k(z)| |z|^{-p}$. Diese ist mit Ausnahme der Stelle $z = 1$ (dort nimmt sie den Wert $-\infty$ an) stetig, also nach oben beschränkt. Es gibt daher jedenfalls eine Konstante $B > 0$ sodass

$$\ln |E_k(z)| \leq B |z|^p \quad \text{für } \frac{1}{2}|z| \leq R. \quad (4.51)$$

Auf der Kreisscheibe $B_{1/2}(0)$ wissen wir schon aus Lemma 4.19.2, dass die Abschätzung $\ln |E_k(z)| \leq |z|^p$ gilt. Insgesamt gibt es daher eine Konstante $M > 0$, sodass

$$\ln |E_k(z)| \leq M |z|^p \quad (4.52)$$

sogar für *alle* $z \in \mathbb{C}$ gilt. Schränken wir uns ausserdem auf hinreichend große z ein, so kann diese Konstante M beliebig klein gemacht werden.

Für ein allgemeines Weierstrass-Produkt wählen wir zunächst $N > 0$ so groß, dass für den Reihenrest gilt $\sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{|a_n|^p} < \varepsilon$. Damit schätzen wir für alle $z \in \mathbb{C}$ ab:

$$\sum_{n=N+1}^\infty \ln \left| E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq M \sum_{n=N+1}^\infty \frac{|z|^p}{|a_n|^p} \leq \varepsilon M |z|^p. \quad (4.53)$$

Für die endlich vielen Terme, die noch fehlen, beschränken wir uns jetzt auf jene hinreichend großen z , für die wir

$$\ln \left| E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \varepsilon \left| \frac{z}{a_n} \right|^p \quad (4.54)$$

für $n = 1, \dots, N$ voraussetzen dürfen. Somit gilt

$$\sum_{n=1}^N \ln \left| E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|a_n|^p}}_{:=S < \infty} |z|^p \quad (4.55)$$

Für diese hinreichend großen z haben wir damit $\sum_{n=1}^\infty \ln \left| E_k \left(\frac{z}{a_n} \right) \right| \leq \varepsilon(S + M) |z|^p$, woraus die Behauptung folgt. \square

Definition 35. Ist f eine ganze Funktion und $p > 0$ so, dass f für alle $\varepsilon > 0$ die Wachstumsbedingung

$$\|f\|_R \ll e^{C_\varepsilon R^{p+\varepsilon}} \quad (4.56)$$

mit einer Konstanten $C_\varepsilon > 0$ erfüllt, dann heißt f von Ordnung höchstens p . Gibt es kein solches p hat f die Ordnung ∞ . Gilt sogar die Wachstumsbedingung

$$\|f\|_R \ll e^{\varepsilon R^p}, \quad (4.57)$$

für alle $\varepsilon > 0$, so sprechen wir von strikter Ordnung.

Proposition 4.28 besagt also, dass das Weierstrass-Produkt vom strikten Rang p auch strikte Ordnung höchstens p hat. Vollkommen analog zeigt man übrigens, dass ein Weierstrass-Produkt vom Rang p auch Ordnung höchstens p hat. Wir wollen uns nun eine Umkehrung davon überlegen.

Proposition 4.29. Sei f eine ganze Funktion und $(a_n)_{n=1}^\infty$ die Folge der von Null verschiedenen Nullstellen. Hat f strikte Ordnung p , dann ist $\text{rang}(a_n) \leq p$.

Beweis. Sei $N_f(R)$ wieder die Anzahl der Nullstellen von f in der Kreisscheibe $B_R(0)$. Aus Bemerkung 4.27 wissen wir $N_f(R) \ll R^p$. Sei $\varepsilon > 0$ und R fest. Es gilt dann

$$\sum_{|a_n| < R} \frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}} = \sum_{k=0}^{R-1} \sum_{k \leq |a_n| < k+1} \frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}} \quad (4.58)$$

$$\leq \sum_{|a_n| < 1} \frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}} + \sum_{k=1}^{R-1} \frac{N_f(k+1) - N_f(k)}{k^{p+\varepsilon}} \quad (4.59)$$

Wir verwenden nun die allseits bekannte und wohlgeleitene Methode der *Abel'schen partiellen Summation*. Diese besagt, dass für beliebige (komplexe) Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n-1} A_k (\beta_{k+1} - \beta_k) = A_n \beta_n - \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k, \quad \text{wobei } A_k = \alpha_1 + \dots + \alpha_k. \quad (4.60)$$

Wir setzen hier speziell $\alpha_k := \frac{1}{k^{p+1+\varepsilon}}$ und $\beta_k := N_f(k)$. Beachte, dass insbesondere

$$A_R \leq 1 + \int_1^R \frac{dt}{t^{p+1+\varepsilon}} \ll \frac{1}{R^{p+\varepsilon}}.$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{R-1} \frac{N_f(k+1) - N_f(k)}{k^{p+\varepsilon}} \ll \frac{N_f(R)}{R^{p+\varepsilon}} + \sum_{k=1}^R \frac{N_f(k)}{k^{p+1+\varepsilon}} \quad (4.61)$$

Verwenden wir nun die Abschätzung für $N_f(k)$, so erhalten wir

$$\sum_{|a_n| < R} \frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}} \ll \frac{R^p}{R^{p+\varepsilon}} + \sum_{k=1}^R \frac{k^p}{k^{p+1+\varepsilon}} \quad (4.62)$$

$$= \frac{1}{R^\varepsilon} + \sum_{k=1}^R \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}. \quad (4.63)$$

und dieser Ausdruck bleibt wegen der Konvergenz der hyperharmonischen Reihe beschränkt für $R \rightarrow \infty$. Somit ist $\text{rang}(a_n) \leq p + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. \square

Bemerkung 4.30. Ist f von Ordnung höchstens p und ist $s > p$ dann ist f automatisch von strikter Ordnung höchstens s .

Wenn wir zwei Funktionen mit Ordnung höchstens p miteinander multiplizieren, erhalten wir offenbar wieder eine Funktion von Ordnung höchstens p . Möchten wir hingegen Aussagen über das Verhalten des *Quotienten* zweier solcher Funktionen treffen, brauchen wir eine betragsmäßige Abschätzung nach unten. Das ist der Inhalt des folgenden Lemmas, dessen Beweis wir allerdings auf das Ende des Abschnitts verschieben.

Lemma 4.31. Sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge von Null verschiedener komplexer Zahlen, welche keinen Häufungspunkt besitzt und betragsmäßig ansteigend angeordnet ist. Sei p der Rang von $(a_n)_{n=1}^\infty$ und $k = \lfloor p + 1 \rfloor \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl echt größer als p . Dann erfüllt das Weierstrass-Produkt

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (4.64)$$

die Wachstumsbedingung

$$|E(z)| > e^{-|z|^{p+\varepsilon}} \quad (4.65)$$

für alle hinreichend großen z außerhalb einer Ausnahmemenge U . $U := U_R^s$ kann als Vereinigung der Kreisscheiben $B_{|a_n|^{-s}}(a_n)$ mit $s > p$ über alle Nullstellen a_n mit $|a_n| > R$ gewählt werden. Insbesondere kann das Lebesgue-Maß von U beliebig klein gemacht werden.

Satz 4.32 (Faktorisierungssatz von Hadamard). Ist f eine ganze Funktion von Ordnung höchstens p und sind $(a_n)_{n=1}^\infty$ ihre von Null verschiedenen Nullstellen. Sei $k := \lfloor p + 1 \rfloor$ die kleinste ganze Zahl echt größer p , dann gilt

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (4.66)$$

wobei m die Vielfachheit der Nullstelle $z = 0$ ist und g ein Polynom vom Grad höchstens p .

Beweis. Sei $s > p$. Da p die Ordnung von f ist, konvergiert die Reihe $\sum \frac{1}{|a_n|^s}$. Für jedes hinreichend große $r > 0$ gibt es daher ein $R \geq r$, sodass der Kreisrand $\partial B_R(0)$ keine der Kreisscheiben $B_{|a_n|^{-s}}(a_n)$ trifft, denn die Reihe $\sum \frac{1}{|a_n|^s}$ der Radien ist ja endlich. Das Weierstrass-Produkt

$$E(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right) \quad (4.67)$$

ist nach Lemma 4.31 daher auf $\partial B_R(0)$ betragsmäßig nach unten durch $e^{-|z|^s}$ beschränkt. Sei nun zusätzlich angenommen, dass r ausserdem so groß ist, dass die Abschätzung $\|f\|_R \leq \alpha e^{R^s}$ für alle $R \geq r$ gilt. Somit gilt für die ganze und nullstellenfreie Funktion $h(z) := \frac{f(z)}{z^m E(z)}$ die Abschätzung

$$|h(z)| \leq \text{const. } e^{\alpha|z|^s} e^{|z|^s} = \text{const. } e^{(\alpha+1)|z|^s}, \quad (4.68)$$

für $z \in \partial B_R(0)$. Aufgrund des Maximumprinzips gilt diese Abschätzung sogar in ganz $B_R(0)$, insbesondere daher für $z \in \partial B_r(0)$. Für jedes $\alpha > 0$ und hinreichend großes r haben wir also $\|h\|_r \leq \text{const. } e^{(\alpha+1)r^s}$, was gerade bedeutet, dass h ebenfalls von Ordnung höchstens p ist. Nach Proposition 4.26 ist h daher von der Form $e^{g(z)}$ mit einem Polynom vom Grad höchstens p . Somit ist $f(z) = z^m E(z) e^{g(z)}$. \square

Korollar 4.33. *Ist f eine ganze Funktion von endlicher Ordnung p und ist $p \notin \mathbb{N}$, dann nimmt f jeden Wert $\alpha \in \mathbb{C}$ unendlich oft an.*

Beweis. Durch Übergang zu $f - \alpha$ können wir oBdA. annehmen, dass $\alpha = 0$. Hat f nur endlich viele Nullstellen z_1, \dots, z_n , so ist $\text{rang } f = 0$. Wegen des Satzes von Hadamard gibt es daher ein Polynom g mit

$$f(z) = e^{g(z)} \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \dots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right), \quad (4.69)$$

woraus man $p = \text{grad } g$ abliest (beachte den Grad $k = 1$ der Elementarfaktoren). Insbesondere ist $p \in \mathbb{N}$. \square

Korollar 4.34 (Satz von Picard für Funktionen mit endlicher Ordnung). *Ist f eine ganze Funktion mit endlicher Ordnung, welche nicht konstant ist. Dann nimmt f jeden Wert in \mathbb{C} mit höchstens einer Ausnahme an.*

Beweis. Sei oBdA. 0 der Wert, welcher nicht angenommen wird. Dann folgt die Aussage aus der Darstellung $f(z) = q(z) e^{p(z)}$ mit einem Polynom $p(z)$. \square

Beweis von Lemma 4.31. Setze $P(z) := \left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{k-1}}{k-1}\right)$, d.h. der k -te Elementarfaktor kann als $E_k(z) = (1 - z)e^{P(z)}$ geschrieben werden. Für das Polynom P gibt es dann eine nur von k abhängige Konstante $M > 0$, sodass folgende Abschätzung gilt

$$|P(z)| \leq \begin{cases} M|z|^{k-1} & \text{für } |z| \geq 1 \\ M & \text{für } |z| < 1. \end{cases} \quad (4.70)$$

Sei $r = |z|$ fest. Wir teilen die Faktoren des Weierstrass-Produkts in zwei Teile auf, je nachdem ob $|a_n| \geq 2r$ oder $|a_n| < 2r$. Die Abschätzung für die „großen“ Nullstellen ist vergleichsweise einfach: wegen $|a_n| \geq 2r > 2|z|$ gilt $|\frac{z}{a_n}| < \frac{1}{2}$ und daher nach Lemma 4.19.2

$$\sum_{|a_n| \geq 2r} \ln |E_k(\frac{z}{a_n})| \geq -\frac{2}{k} \sum_{|z_n| \geq 2r} \left| \frac{z}{a_n} \right|^k \geq -\frac{2}{k} |z|^{p+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}} = -C_1 r^{p+\varepsilon}, \quad (4.71)$$

für eine Konstante $C_1 > 0$. Betrachte nun

$$\sum_{|a_n| < 2r} \ln |E_k(\frac{z}{a_n})| = \sum_{|a_n| < 2r} \ln |1 - \frac{z}{a_n}| + \sum_{|a_n| < 2r} \ln |e^{P(\frac{z}{a_n})}|. \quad (4.72)$$

Für den zweiten dieser beiden Summanden gilt

$$\sum_{|a_n| < 2r} \ln \left| e^{P(\frac{z}{a_n})} \right| \geq -M \left(\sum_{|a_n| < r} \left| \frac{z}{a_n} \right|^{k-1} + N_E(2r) \right). \quad (4.73)$$

Genau wie in Proposition 4.29 zeigt man

$$\sum_{|a_n| < r} \frac{1}{|a_n|^{k-1}} \ll \frac{r^{p+\varepsilon}}{r^{k-1}}, \quad (4.74)$$

woraus folgt, dass

$$\sum_{|a_n| < 2r} \ln \left| e^{P(\frac{z}{a_n})} \right| > -C_2 r^{p+\varepsilon}, \quad (4.75)$$

für eine Konstante $C_2 > 0$. Schlussendlich müssen wir noch abschätzen

$$\left| 1 - \frac{z}{a_n} \right| = \frac{|z - a_n|}{|a_n|} \geq \frac{1}{|a_n|^s} \frac{1}{R} \geq \frac{1}{(2r)^{s+1}} \quad (4.76)$$

für alle z außerhalb der Ausnahmemenge

$$U_R^s = \bigcup_{|a_n| > R} B_{|a_n|^{-s}}(a_n) \quad (4.77)$$

und alle Nullstellen a_n mit $R \leq |a_n| < 2r$. Somit gilt

$$\sum_{|a_n| < 2r} \ln |1 - \frac{z}{a_n}| \geq -N_E(2r) (s+1) \ln 2r \geq -C_3 r^{p+\varepsilon} \ln(2r), \quad (4.78)$$

für ein $C_3 > 0$. Da $\ln r \ll r^\varepsilon$ und gilt für hinreichend großes $|z| > R$

$$\ln |E(z)| > -(C_1 + C_2 + C_3) r^{p+\varepsilon}. \quad (4.79)$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung durch Exponentiation. \square

5 Riemann'scher Abbildungssatz

5.1 Algebren holomorpher Funktionen

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und ist $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, so heißt bekanntlich f_n kompakt konvergent gegen f , wenn es für jedes Kompaktum $K \subseteq D$, die Einschränkungen $f_n|_K$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergieren. Die kompakte Konvergenz wird also durch das System der Semi-Normen

$$\|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| \quad (4.1)$$

mit $K \subseteq D$ kompakt, bestimmt.

Lemma 5.1. *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann gibt es eine aufsteigende Folge von Kompakta in D mit $K_n^\circ \subseteq K_{n+1}$ derart, dass $D = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$.*

Daraus folgt unmittelbar, dass auf $H(D)$, dem Raum der holomorphen Funktionen auf D , durch

$$d(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}} \quad (4.2)$$

eine Metrik definiert wird, die die kompakte Konvergenz metrisiert. Insbesondere hängt die metrische Struktur nicht von der speziellen Wahl der K_n ab, d.h. die induzierten Metriken sind äquivalent.

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $D = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$ mit kompakten Mengen $K_n \subseteq D$. Dann ist $H(D)$ versehen mit der Metrik d aus (4.2) vollständig.

Insbesondere führt also die kompakte Konvergenz nicht aus dem Bereich der holomorphen Funktionen heraus. Diese Aussage ist so wichtig, dass Sie einen eigenen Namen erhält.

Satz 5.2 (Konvergenzsatz von Weierstrass). *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine kompakt konvergente Folge von auf G holomorphen Funktionen. Dann ist die Grenzfunktion auch holomorph auf G .*

Bemerkung 5.3. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine kompakt konvergente Folge von auf G holomorphen Funktionen mit Grenzfunktion f . Gilt $f_n(G) \subseteq G'$ für ein Gebiet G' dann ist auch $f(G) \subseteq G'$. Denn für jedes Kompaktum $K \subseteq G$ gilt ja $f(K) \subset G'$.

Korollar 5.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, dann ist $H(D)$, versehen mit dem System der Semi-Normen $\{\|\cdot\|_K : K \subseteq D \text{ kompakt}\}$ ein Fréchet Raum.*

Gilt $f_n \rightarrow f$ in kompakter Konvergenz, so konvergieren auch die Ableitungen $f'_n \rightarrow f'$ kompakt. Der Ableitungsoperator $\frac{d}{dz} : H(D) \rightarrow H(D)$ ist also stetig!

Bemerkenswerter Weise gilt in $H(D)$ ein Analogon des Satzes von Heine-Borel im \mathbb{R}^n nachdem die kompakten Teilmengen genau die beschränkten und abgeschlossenen sind. Dazu müssen wir uns zuerst überlegen, wann eine Menge in $H(D)$ beschränkt ist.

Definition 36. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Menge $F \subseteq H(D)$ heißt beschränkt, wenn $\sup_{f \in F} \|f\|_K < \infty$ für jedes Kompaktum $K \subseteq D$.

Lemma 5.5. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine lokal beschränkte Folge von auf G holomorphen Funktionen. Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ für alle z aus einer in G dichten Teilmenge, dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ sogar kompakt auf G .

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass das Cauchy-Kriterium lokal gleichmäßig erfüllt ist. Dazu müssen wir für jedes $z_0 \in G$ eine Kugel $B_r(z_0) \subseteq G$ finden, sodass gilt

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad (4.3)$$

für alle $z \in B$ und $n, m \geq N(\varepsilon)$. Sei $z_0 \in G$ fest. Da die Menge der Konvergenzpunkte dicht in G ist, gibt es für jedes $r > 0$ ein $a \in B_r(z_0)$, sodass in

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \underbrace{|f_n(z) - f_n(a)|}_I + \underbrace{|f_n(a) - f_m(a)|}_II + \underbrace{|f_m(a) - f_m(z)|}_III \quad (4.4)$$

der Summand II kleiner als ε bleibt.

Für die Abschätzung der Summanden I und III nutzen wir die lokale Beschränktheit aus und wählen $r > 0$ so klein und $C > 0$ so groß, dass die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius $2r$ um z_0 noch ganz in G liegt und $|f_n(z)| \leq C$ für alle n und alle z mit $|z - z_0| \leq 2r$ gilt. Für alle $z, z' \in B_r(z_0)$ ist dann nach der Cauchy-Formel und der Standardabschätzung

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_n(z')| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{2r}} \left(\frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z'} \right) d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{z - z'}{2\pi i} \int_{\partial B_{2r}} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')} d\zeta \right| \\ &\leq |z - z'| \frac{4\pi r C}{2\pi r^2} = \frac{2C}{r} |z - z'|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Wir betrachten nun die kompakte Menge $\overline{B_r}(z_0)$ und wählen ein ε' -Netz aus Konvergenzpunkten, d.h. endlich viele Konvergenzpunkte $a_1, \dots, a_k \in B_r(z_0)$ sodass jedes $z \in B_r(z_0)$ höchstens ε' von einem der a_1, \dots, a_k entfernt ist. Auf jedem $B_{\varepsilon'}(a_i) \cap B_r(z_0)$ gilt somit

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq \frac{2C}{r} |z - z'| \leq \frac{4C}{r} \varepsilon'. \quad (4.6)$$

Wähle wir also $\varepsilon' = \varepsilon \frac{r}{4C}$ und $N > 0$ so groß, dass $|f_n(a_i) - f_m(a_i)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$ und $i = 1, \dots, k$ gilt, können wir schließlich auch die Summanden I bzw. III abschätzen:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \underbrace{|f_n(z) - f_n(a_i)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_n(a_i) - f_m(a_i)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_m(a_i) - f_m(z)|}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon.$$

Ist nun $K \subseteq G$ eine kompakte Teilmenge, so überdecken wir K durch endlich viele der gerade konstruierten Kugeln $B_r(z_i)$ und erhalten, dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ dort gleichmäßig die Cauchy-Bedingung erfüllt, also gleichmäßig konvergiert. \square

Satz 5.6 (Montel). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Menge $F \subseteq H(G)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Insbesondere enthält jede lokal beschränkte Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine kompakt konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es genügt natürlich zu zeigen, dass eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge in $H(G)$ kompakt ist. Da $H(G)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, ist das äquivalent dazu, dass jede Folge in F eine in F konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $D := \{a_1, a_2, \dots\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge des Gebiets G . Wegen der lokalen Beschränktheit gibt es eine Teilfolge $(f_{n_1})_{n_1=1}^\infty$, welche an der Stelle a_1 konvergiert. Bestimme nun induktiv Teilfolgen f_{n_k} , welche an den Stellen a_1, a_2, \dots, a_k konvergiert. Dann konvergiert die Diagonalfolge f_{n_n} auf der dichten Teilmenge $D \subseteq G$ und damit nach Lemma 5.5 kompakt auf ganz G . \square

Satz 5.7 (Hurwitz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge kompakt konvergenter holomorpher Funktionen mit Grenzfunktion f . Ist $B := \overline{B}_r(z_0) \subseteq G$ und $N_{f_n}(r)$ die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen von f_n in B , dann ist entweder $f = 0$ konstant oder*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} N_{f_n}(r) \geq N_f(r). \quad (4.7)$$

Beweis. Sei $f \neq 0$. Wenn die Anzahl $N_{f_n}(r)$ der Nullstellen nicht beschränkt ist, steht ∞ auf der linken Seite der Ungleichung und die Aussage gilt trivialerweise. Gibt es hingegen ein M , sodass f_n für $n \geq n_0$ höchstens M Nullstellen besitzt, so wählen wir $N > 0$ hinreichend groß, um den Satz von Rouché (siehe Übungsbeispiel) auf die Funktionen f und f_n anwenden zu können:

$$\underbrace{|f(z) - f_n(z)|}_{\leq \varepsilon} < \underbrace{|f(z)|}_{> 0} + |f_n(z)|, \quad (4.8)$$

für $z \in \partial B$ und $n \geq N(\varepsilon)$. Es haben somit f und f_n in B gleich viele Nullstellen, nämlich höchstens M . \square

Korollar 5.8. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine kompakt konvergente Folge von auf G holomorphen Funktionen. Sind alle f_n injektiv, so ist $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ entweder konstant oder auch injektiv.*

5.2 Biholomorph äquivalente Gebiete in \mathbb{C}

Satz 5.9 (Riemann'scher Abbildungssatz). *Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein homologisch einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gibt es eine biholomorphe Abbildung $\phi : G \rightarrow \mathbb{E}$.*

Korollar 5.10. *Jedes homologisch einfach zusammenhängende Gebiet in \mathbb{C} ist einfach zusammenhängend. Insbesondere gibt es keine nichttriviale Fundamentalgruppe $\pi_1(G)$ eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{C}$, welche mit ihrer Kommutatorgruppe $[\pi_1(G), \pi_1(G)]$ übereinstimmt. Oder, nochmals anders gesagt, wenn die Fundamentalgruppe eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{C}$ die Eigenschaft hat, dass die triviale Gruppe die einzige abelsche Gruppe ist, in die $\pi_1(G)$ homomorph und surjektiv abgebildet werden kann, dann ist G schon einfach zusammenhängend.*

Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes. Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein homologisch einfach zusammenhängendes Gebiet und $a \in G$. Wir betrachten die Menge $F \subseteq H(G)$ aller in G holomorphen Funktionen f , welche die folgenden Eigenschaften haben:

1. $f(a) = 0$ und $f'(a) > 0$.
2. f ist injektiv.
3. $f(G) \subseteq \mathbb{E}$.

Wir zeigen als erstes dass F nicht leer ist: da $G \neq \mathbb{C}$, gibt es einen Punkt $b \in \mathbb{C} \setminus G$ und wir können wegen des einfachen homologischen Zusammenhangs von G eine holomorphe Quadratwurzel $h : G \rightarrow \mathbb{C}$ der injektiven und nullstellenfreien Funktion $z \mapsto z - b$ betrachten. h ist ebenfalls injektiv und nullstellenfrei. Nach dem Satz von der offenen Abbildung enthält das Bild $h(G)$ eine Kreisscheibe $B := B_r(\zeta)$, welche dann natürlich 0 nicht enthalten kann. Aufgrund der Injektivität von h muss gelten $-B \cap h(G) = \emptyset$, denn ansonsten gäbe es z_0, z_1 mit $h(z_0) = w \in B$ und $h(z_1) = -w \in -B$. Aus $h(z_0)^2 = w^2 = h(z_1)^2$ folgt dann aber $z_0 = z_1$ und damit $w = -w$, was wegen $0 \notin B$ nicht möglich ist. Die Inversion $z \mapsto \frac{r}{z+\zeta}$ an $-\zeta$ bildet nun $h(G)$ biholomorph auf eine Teilmenge des Einheitskreises ab, d.h. wir haben eine Abbildung \tilde{f} gefunden, welche die Eigenschaften 2. und 3. erfüllt.

Sei $\omega := \tilde{f}(a)$. Durch Nachschalten der Möbius-Transformation

$$\phi : z \mapsto \frac{z - \omega}{1 - \bar{\omega}z} \tag{4.9}$$

erreichen wir, dass a auf 0 abgebildet wird (beachte dass diese Transformation \mathbb{E} invariant lässt, siehe auch Beispiel 1.22). Da die bisher konstruierte Funktion injektiv ist, kann ihre Ableitung nach dem Satz von der holomorphen Umkehrfunktion f' nirgends verschwinden. Durch Nachschalten einer geeigneten Drehung $z \mapsto z e^{i\phi}$ erreichen wir daher, dass die Ableitung an a positiv ist. Somit ist $F \neq \emptyset$.

Um den Abschluss von F zu berechnen, betrachte eine kompakt konvergente Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ von Funktionen in F . Wegen des Konvergenzsatzes von Weierstrass ist die Grenzfunktion f ebenfalls holomorph und es gilt $f(G) \subseteq \bar{\mathbb{E}}$. Aufgrund des Satzes

von der Gebietstreue ist entweder f konstant oder es muss sogar $f(G) \subseteq (\overline{\mathbb{E}})^\circ = \mathbb{E}$ gelten (weil $f_n(a) = 0$ für alle $n \geq 0$, muss diese Konstante dann 0 sein). Ist $f \neq 0$, so ist f injektiv wegen des Satzes von Hurwitz. Die Stetigkeit des Ableitungsoperator $\frac{d}{dz}$ impliziert $f'(a) \geq 0$. Da f injektiv ist, kann nach dem Satz von der holomorphen Umkehrfunktion f' nirgends verschwinden. Also ist $f'(a) > 0$ und daher $f \in F$.

Aus dem Satz von Montel folgt nun, dass $F \cup \{0\}$ ein Kompaktum in $H(G)$ ist. Das Funktional $\delta'_a : f \mapsto f'(a)$ ist stetig auf $H(G)$ und reellwertig auf $F \cup \{0\}$, nimmt also ein Maximum an. Sei $f \in F \cup \{0\}$ so, dass $f'(a)$ maximal ist. Wir zeigen $f(G) = \mathbb{E}$.

Angenommen $\omega \notin f(G)$. Da $f(a) = 0$ ist sicherlich $\omega \neq 0$. Betrachte wieder die Möbius-Transformation

$$\phi : z \mapsto \frac{z - \omega}{1 - \overline{\omega}z}, \quad (4.10)$$

dann nimmt die Funktion $\phi \circ f : G \rightarrow E$ den Wert 0 nicht an. Da G homologisch einfach zusammenhängend, gibt es daher eine holomorphe Quadratwurzel $h : G \rightarrow \mathbb{E}$ von $\phi \circ f$, welche wegen $0 \notin \phi \circ f(G)$ injektiv ist. Ist

$$\psi : z \mapsto \frac{z - h(a)}{1 - \overline{h(a)}z}, \quad (4.11)$$

dann ist die Funktion $F := \psi \circ h : G \rightarrow E$ eine Verkettung injektiver holomorpher Funktionen, die $F(a) = 0$ erfüllt. Wir berechnen $F'(a)$:

Nach der Kettenregel ist $F'(a) = \psi'(h(a)) \cdot h'(a)$. Beachte, dass $h^2(a) = \phi(0) = -\omega$. Damit ergibt sich zunächst

$$\psi'(h(a)) = \frac{1 - |h(a)|^2}{(1 - |h(a)|^2)^2} = \frac{1}{1 - |\omega|}. \quad (4.12)$$

Durch implizites Differenzieren des Ausdrucks $h^2(a) = \phi \circ f(a)$ folgt

$$2h'(a)h(a) = \frac{1 - |\omega|^2}{(1 - \overline{\omega}f(a))^2} f'(a) = (1 - |\omega|^2) f'(a). \quad (4.13)$$

weil ja $f(a) = 0$. Insgesamt ergibt sich

$$F'(a) = \frac{1 + |\omega|}{2h(a)} f'(a). \quad (4.14)$$

Komponieren wir noch F mit der Drehung um den Winkel $\vartheta := \arg(h(a))$ können wir weiters annehmen, dass der Faktor $\frac{1+|\omega|}{2h(a)}$ positiv ist (die Eigenschaft a auf 0 abzubilden, in \mathbb{E} abzubilden, sowie die Injektivität bleiben davon ja unberührt).

$$\frac{1 + |\omega|}{2h(a)} = \frac{1 + |\omega|}{2\sqrt{|\omega|}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{|\omega|}} + \sqrt{|\omega|} \right) > 1. \quad (4.15)$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von $f'(a)$. Es kann somit kein solches $\omega \in \mathbb{E} \setminus f(G)$ geben, i.e. f ist eine biholomorphe Abbildung zwischen G und \mathbb{E} . \square

5.3 Automorphismen

Satz 5.11 (Schwarz'sches Lemma). *Ist $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$, dann gilt für alle $z \in \mathbb{E}$*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1. \quad (4.16)$$

Gibt es ein $z_0 \in \mathbb{E}^\times$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, oder gilt $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung um 0, d.h. $f(z) = ze^{i\theta}$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.

Beweis. Wir betrachten die Taylor-Entwicklung von f um 0:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n =: z \cdot g(z). \quad (4.17)$$

Dann ist auch $g(z)$ holomorph in \mathbb{E} und es gilt $g(0) = a_1 = f'(0)$. Es gilt stets $|z||g(z)| = |f(z)| < 1$, somit ist für jede positive reelle Zahl $r < 1$:

$$r \|g\|_{\partial B_r(0)} \leq 1. \quad (4.18)$$

Nach dem Maximumsprinzip folgt daher sogar $r \|g\|_{B_r(0)} \leq 1$. Lassen wir $r \rightarrow 1$, so ergibt sich die Abschätzung $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und damit

$$|f(z)| = |z| |g(z)| \leq |z| \quad \text{bzw.} \quad |f'(0)| = |g(0)| \leq 1. \quad (4.19)$$

Gilt nun $|f'(0)| = 1$, so folgt $|g(0)| = 1$. Gleichfalls impliziert $|f(z_0)| = |z_0|$, dass $|g(z_0)| = 1$ gilt. In beiden Fällen nimmt g in \mathbb{E} ein Maximum an und ist daher nach dem Maximumsprinzip eine Konstante vom Betrag 1. \square

Definition 37. *Eine biholomorphe Abbildung $f : D \rightarrow D$ einer offenen nichtleeren Menge D auf sich selbst heißt ein Automorphismus von D . Die Automorphismen von D bilden eine Gruppe, die wir mit $\text{Aut } D$ bezeichnen.*

Beispiel 5.12. Die Automorphismengruppe von \mathbb{C} besteht aus allen linearen Abbildungen $f(z) = az + b$ mit komplexen Konstanten $a \neq 0$ und b .

Definition 38. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $L \leq \text{Aut } D$ eine Untergruppe und $z_0 \in D$. Dann ist*

$$\text{Stab}_{L,D}(z_0) := \{\phi \in L : \phi(z_0) = z_0\} \quad (4.20)$$

eine Untergruppe. Im Falle $L = \text{Aut } D$ bezeichnen wir diese Untergruppe kurz mit $\text{Aut}_{z_0} D$.

Die Gruppe $\text{Aut}_0 \mathbb{E}$ besteht somit aus allen mittelpunktstreuen Automorphismen von \mathbb{E} .

Satz 5.13. *Jeder Automorphismus $\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\phi(0) = 0$ ist von der Form $\phi(z) = ze^{i\theta}$ für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.*

Beweis. Es gehören sicherlich alle Drehungen zu $\text{Aut}_0 \mathbb{E}$. Sei umgekehrt $\phi \in \text{Aut}_0 \mathbb{E}$ und damit auch $\phi^{-1} \in \text{Aut}_0 \mathbb{E}$. Dann folgt dann aus dem Schwarz'schen Lemma

$$|\phi(z)| \leq |z| \quad \text{un} \quad |z| = |\phi^{-1}(\phi(z))| \leq |\phi(z)|, \quad (4.21)$$

also $|\phi(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wieder aus dem Schwarz'schen Lemma folgt daher, dass ϕ eine Drehung ist. \square

Korollar 5.14. *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $a \in G$, dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) > 0$.*

Beweis. Dass es so eine Abbildung gibt ist Inhalt des Riemann'schen Abbildungssatzes. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen: ist g eine zweite Abbildung mit den geforderten Eigenschaften, dann ist $f \circ g^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine biholomorphe mittelpunktstreu Abbildung, i.e. ein Element von $\text{Aut}_0 \mathbb{E}$, also eine Drehung. Da weiters

$$(f \circ g^{-1})'(0) = f'(g^{-1}(0)) (g^{-1})'(0) = f'(a) \frac{1}{g'(a)} > 0 \quad (4.22)$$

muss der Winkel dieser Drehung 0 sein, d.h. $f = g$. \square

Für die explizite Angabe aller Automorphismen von \mathbb{E} stützen wir uns auf folgenden

Lemma 5.15. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $J \leq \text{Aut } D$ eine Untergruppe mit folgenden Eigenschaften:*

1. *J wirkt transitiv auf D , d.h. zu je zwei Punkten $a, b \in D$ gibt es ein $\phi \in J$ mit $\phi(a) = b$.*
2. *J enthält eine Isotropiegruppe, d.h. eine Untergruppe der Gestalt $\text{Aut}_{z_0} D$ für ein $z_0 \in D$.*

Dann gilt $J = \text{Aut } D$.

Beweis. Es sei $f \in \text{Aut } D$. Wegen (1.) gibt es ein $\phi \in J$ mit $\phi(f(z_0)) = z_0$. Wegen (2.) ist $\phi \circ f \in \text{Aut}_{z_0} D \subseteq J$. Da J eine Gruppe ist, ist $f = \phi^{-1} \circ (\phi \circ f) \in J$. \square

Beispiel 5.16. $\text{Aut } \mathbb{E}$ ist gegeben durch

$$\left\{ e^{i\theta} \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z} : \zeta \in \mathbb{E}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}. \quad (4.23)$$

Man rechnet nach, dass (4.23) tatsächlich eine Untergruppe $J \leq \text{Aut } \mathbb{E}$ ist. Da die Abbildung $z \mapsto \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z}$ die Eigenschaft hat, 0 auf $-\zeta$ abzubilden wirkt J transitiv auf \mathbb{E} . Außerdem enthält J die Isotropiegruppe $\text{Aut}_0 \mathbb{E}$, da diese ja aus allen Drehungen $z \mapsto z e^{i\theta}$ besteht. Somit muss $J = \text{Aut } \mathbb{E}$ gelten.

Beispiel 5.17. $\text{Aut } \mathbb{H}$ ist gegeben durch

$$\left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad ad - bc > 0 \right\} \quad (4.24)$$

Wieder rechnet man nach, dass durch (4.24) tatsächlich eine Untergruppe J von $\text{Aut } \mathbb{H}$ gegeben ist. J agiert transitiv, denn etwa die Abbildung $z \mapsto \frac{az+b}{z+1}$ hat die Eigenschaft i auf $\frac{a+b}{2} + i\frac{a-b}{2}$ abzubilden. Da die Cayley-Abbildung $C : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ biholomorph ist, gilt

$$\text{Aut}_i \mathbb{H} = \{C^{-1} \circ \phi \circ C : \phi \in \text{Aut}_0 \mathbb{E}\}$$

$$= \left\{ \frac{(1 + \cos \theta)z + 2 \sin \theta}{-(2 \sin \theta)z + (1 + \cos \theta)} : 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

Es enthält J also eine Isotropiegruppe und stimmt daher mit $\text{Aut } \mathbb{H}$ überein.

Korollar 5.18. *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist $\text{Aut } G \cong SL(2, \mathbb{R})$.*