

Komplexe Analysis

SS 2010

Gabriel Maresch

gabriel.maresch@tuwien.ac.at

Literatur

- [1] J. Conway, *Functions Of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics 11, Springer, 1978.
- [2] K. Jänich, *Funktionentheorie*, Springer-Lehrbuch, Springer, 1999.
- [3] S. Krantz, *A Guide To Complex Variables*, The Dolciani Mathematical Expositions 32, MAA Guides 1, Mathematical Association of America, 2008.
- [4] S. Lang, *Complex Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 103, Springer, 1999.
- [5] R. Remmert und G. Schumacher, *Funktionentheorie 1*, Grundwissen Mathematik, Springer, 2001.
- [6] W. Rudin, *Reelle und Komplexe Analysis*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1999.

0 Die Komplexe Exponentialfunktion

Wir folgen der Darstellung aus [6]. Wir nehmen an dieser Stelle die Definition der komplexen Zahlen $z = a + ib$ vorweg und verweisen auf die folgenden Kapitel.

Definition 1. Die Funktion $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ heißt Exponentialfunktion.

Die Exponentialfunktion ist für alle komplexen Zahlen wohldefiniert.

Unmittelbar aus der Reihendarstellung sieht man, $e^0 = 1$ und dass \exp mit seiner Ableitung \exp' übereinstimmt. Durch Ausmultiplizieren des Cauchyprodukts sieht man die wichtige Identität

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}. \quad (0.1)$$

Daher ist $e^{-z} = (e^z)^{-1}$ stets von 0 verschieden.

Die Einschränkung von \exp auf die reelle Achse bildet diese bekanntlich in bijektiver Weise auf $(0, \infty)$ ab. Die Einschränkung von \exp auf die imaginäre Achse hingegen bildet diese in den Einheitskreis ab:

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^{it} e^{-it} = 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.2)$$

Wir definieren

$$\cos t := \operatorname{Re} e^{it}, \quad \sin t := \operatorname{Im} e^{it}. \quad (0.3)$$

Differentiation von (0.3) liefert wegen $(e^{it})' = ie^{it}$ sofort

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t. \quad (0.4)$$

Die Potenzreihendarstellung

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \quad (0.5)$$

folgt durch Bilden des Realteils unmittelbar aus der der Exponentialfunktion. Wir erhalten $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < -\frac{1}{3}$. Somit besitzt \cos aus Stetigkeitsgründen eine kleinste positive Nullstelle, die wir mit $\pi/2$ bezeichnen wollen. Aufgrund der zu (0.3) äquivalenten Euler'schen Gleichung

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (0.6)$$

folgt daraus $e^{i\frac{\pi}{2}} = \pm i$, d.h. $e^{2\pi i} = (\pm i)^4 = 1$. Es ist also \exp eine $2\pi i$ -periodische Funktion, denn

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z. \quad (0.7)$$

Für den (elementaren) Beweis, dass jede andere Periode von \exp ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist, sei auf [6] verwiesen.

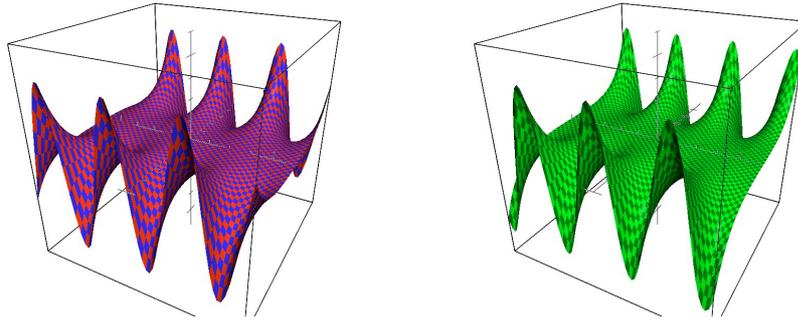


Abbildung 1: Real- und Imaginärteil von $\sin z$

Nun wollen wir noch zeigen, dass wir für jedes w mit $|w| = 1$ ein reelles t angeben können, sodass $w = e^{it}$. Für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ ist $(\sin t)' = \cos t > 0$. Wegen $\sin(0) = 0$, ist $\sin t$ dort also positiv. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass $w = a + ib$ mit $a, b \geq 0$ (die anderen Fälle verlaufen analog). Da $0 \leq a \leq 1$ gibt es genau ein $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $a = \cos t$. Dann ist aber $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - a^2 = b^2$ und es ist $b = \sin t$. Somit bildet e^{it} das Intervall $[0, 2\pi)$ stetig und bijektiv (nicht aber homöomorph!) auf den Einheitskreis ab.

Abschließend geben wir in Analogie zu (0.3) noch die Definition für die komplexe Sinus- bzw. Cosinusfunktion an.

Definition 2. Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (0.8)$$

Insbesondere sind $\sin z$ und $\cos z$ also auf der imaginären Achse unbeschränkt.

Wir werden später sehen, dass das die einzige Möglichkeit ist, die Exponential-, bzw. Sinus- und Cosinus-Funktion, von \mathbb{R} auf differenzierbare Weise nach \mathbb{C} fortzusetzen.

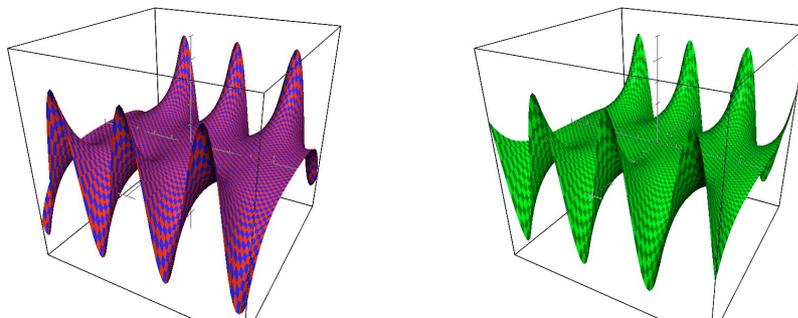


Abbildung 2: Real- und Imaginärteil von $\cos z$

1 Die Komplexen Zahlen

1.1 Historisches

Die komplexen Zahlen traten vermutlich erstmals 1545 auf, als der Mathematiker Gerolamo Cardano in seinem Buch *Ars magna* Formeln für die Lösungen kubischer Gleichungen veröffentlichte

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat bekanntlich im Falle einer negativen Diskriminante keine reellen Lösungen. Bei einer nichtnegativen Diskriminante lauten die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad (1.1)$$

und es gilt der Wurzelsatz von Vieta:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \quad (1.2)$$

Die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ kann durch Abspalten eines vollständigen Kubus

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{3a^2}{9}\right)x + c - \frac{a^3}{27} \\ &= \left(x + \frac{a}{3}\right)^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)\left(x + \frac{a}{3}\right) + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

durch die Substitution $y = x + \frac{a}{3}$ in die sogenannte reduzierte Gleichung

$$y^3 + py + q = 0 \quad (1.4)$$

übergeführt werden. Der Ansatz $y = u + v$ ergibt nun

$$y^3 + py + q = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0. \quad (1.5)$$

Wählt man nun unter allen (u, v) mit $y = u + v$ jenes Paar welches zusätzlich die Nebenbedingung

$$uv = -\frac{p}{3} \text{ bzw. } u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (1.6)$$

erfüllt, so vereinfacht dadurch die reduzierte Gleichung zu

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (1.7)$$

Aus dem vietaschen Wurzelsatz folgt, dass u^3, v^3 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (1.8)$$

sind. Diese Gleichung heißt die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung und führt zur Darstellung der Lösung der kubischen Gleichung durch die cardanosche Formel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (1.9)$$

Der Fall der einer negativen Diskriminante $D := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ heißt *casus irreducibilis* und erfordert die Kenntnis der dritten komplexen Einheitswurzeln. Es ist dann (1.9) die Summe zweier konjugiert komplexer Zahlen, somit gibt es hier genau drei verschiedene *reelle* Lösungen x_1, x_2 und x_3 .

Beispiel 1.1. Die quadratische Resolvente der kubischen Gleichung $x^3 - 6x + 4 = 0$ hat die Lösungen

$$u^3, v^3 = -2 \pm \sqrt{-4}. \quad (1.10)$$

Bedient man sich der imaginäre Einheit i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$, läßt sich schreiben

$$u^3, v^3 = -2 \pm 2i. \quad (1.11)$$

Wegen

$$(1 \pm i)^3 = -2 \pm 2i$$

gewinnt man somit eine (reelle) Lösung

$$x_1 = \sqrt[3]{-2 + 2i} + \sqrt[3]{-2 - 2i} = (1 + i) + (1 - i) = 2. \quad (1.12)$$

Die zur cardanoschen Formel (1.9) führenden Gleichungen für u und v besitzen jedoch nicht nur eine, sondern drei Lösungen, nämlich

$$u_i = \varepsilon_i(1 + i), \quad v_j = \varepsilon_j(1 - i) \quad (1.13)$$

wobei $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ die drei Nullstellen des Kreisteilungspolynoms $x^3 - 1$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{\varepsilon}_2 \quad (1.14)$$

bezeichnen. Hieraus ergeben sich neun Kombinationsmöglichkeiten für $x = u_i + v_j$. Aber nur drei von ihnen führen zu Lösungen der kubischen Gleichung, denn

$$uv = -\frac{p}{3} \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

verlangt, dass $\varepsilon_m \varepsilon_n = 1$ gilt. Deshalb lauten die drei Lösungen einer kubischen Gleichung

$$x_1 = \varepsilon_0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_0 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.16)$$

$$x_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.17)$$

$$x_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (1.18)$$

Für unsere konkrete Gleichung $x^3 - 6x + 4$ erhält man dann speziell die beiden weiteren reellen Lösungen $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ und $x_3 = -1 + \sqrt{3}$.

Bemerkung 1.2. Natürlich ist es möglich bei Kenntnis einer reellen Lösung (welche ja immer existieren muss), den Grad der Gleichung zu reduzieren und die beiden anderen Lösungen explizit anzugeben. Im *casus irreducibilis* ist es aber bereits für das Gewinnen *einer* reellen Nullstelle notwendig, die dritte Wurzeln aus einer echt komplexen Zahl zu ziehen!

1.2 Algebraische Struktur

Wir definieren die komplexen Zahlen \mathbb{C} als Paare reeller Zahlen (a, b) . Addition und Multiplikation sind gemäß

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \quad (1.19)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \quad (1.20)$$

erklärt. Durch Nachrechnen überzeugt man sich zunächst leicht, dass dadurch ein kommutativer Ring mit Einselement $(1, 0)$ definiert wird. Im folgenden werden wir gelegentlich \mathbb{C}^\times für die Menge der komplexen Zahlen ohne das Nullelement schreiben.

Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\phi(a) = (a, 0)$ ist ein Monomorphismus, daher werden wir im Weiteren die reelle Zahl a und das Element $(a, 0)$ identifizieren. Für das Element $(0, 1)$ vereinbaren wir die Schreibweise i . Dadurch gelangt man zu der gewohnten kartesischen Darstellung der komplexen Zahlen

$$z = a + ib. \quad (1.21)$$

Als nächstes betrachten wir die Konjugationsabbildung $a + ib \mapsto \overline{a + ib} := a - ib$. Sie besitzt folgende Eigenschaften

1. (Automorphismus) $\forall z, w \in \mathbb{C} : \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ bzw. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
2. (Involution) $\forall z \in \mathbb{C} : \overline{\overline{z}} = z$
3. (Definitheit) $\forall z \in \mathbb{C} : z\overline{z} \geq 0$ und $z\overline{z} = 0$ genau für $z = 0$.

Insbesondere ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ der Ausdruck $z\overline{z}$ reell und für $z \neq 0$ sogar positiv. Daraus ergibt sich sofort die Inversionsformel

$$\forall z \in \mathbb{C}^\times : z \cdot \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = 1, \quad (1.22)$$

d.h. jedes $z \neq 0$ besitzt ein multiplikativ inverses Element, welches wir in Zukunft mit z^{-1} bzw. $\frac{1}{z}$ bezeichnen werden. \mathbb{C} ist somit ein kommutativer Ring mit Eins, in dem jedes von 0 verschiedene Element ein multiplikatives Inverses besitzt, d.h. \mathbb{C} ist ein Körper.

Bemerkung 1.3. 1. Die Konjugation ist der einzige nicht-triviale Körperautomorphismus von \mathbb{C} ist, der \mathbb{R} punktweise fest läßt.

2. \mathbb{C} läßt sich nicht anordnen.

Definition 3. Sei $z \in \mathbb{C}$, dann heißt $|z| := (z\bar{z})^{1/2}$ der Betrag von z .

Lemma 1.4. Der Betrag auf \mathbb{C} ist eine Norm, d.h. $|\cdot|$ ist homogen und erfüllt die Dreiecksungleichung.

Beweis. Es gilt sogar $|zw| = |z||w|$, daher ist $|\cdot|$ insbesondere auch homogen. Es bleibt daher zu zeigen, dass stets $|z+w| \leq |z| + |w|$. Einfaches Ausmultiplizieren liefert zunächst

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2. \quad (1.23)$$

Nun ist aber für jedes beliebige komplexe α sicherlich $\operatorname{Re} \alpha \leq |\alpha|$. Somit gilt

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|\bar{z}w| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2. \quad (1.24)$$

□

1.3 Lineare Struktur

\mathbb{C} ist als Körper Vektorraum über jedem seiner Unterkörper, insbesondere also über \mathbb{R} . Eine Basis von \mathbb{C} über \mathbb{R} ist gegeben durch 1 und i . Die Koordinaten bezüglich dieser Basis (d.h. die Koeffizienten der Darstellung eines Elements in dieser Basis) werden als Realteil Re bzw. Imaginärteil Im bezeichnet. $\operatorname{Re}, \operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Es gilt also stets

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z. \quad (1.25)$$

Die \mathbb{R} -lineare Abbildung $(a, b) \rightarrow a + ib$ ist mithin invers zu $z \mapsto (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ und stellt somit einen Vektorraum-Isomorphismus zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{C} dar.

\mathbb{R}^2 ist nicht nur ein Vektorraum, sondern bekanntlich auch ein Euklidischer Raum, d.h. mit einem Skalarprodukt ausgestattet. Mit Hilfe des oben angegebenen Isomorphismus kann man dieses Skalarprodukt auch in \mathbb{C} wiederfinden. Es gilt nämlich

$$\langle z, w \rangle := \left\langle \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im} z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w = \operatorname{Re}(z\bar{w}). \quad (1.26)$$

Insbesondere ist die Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gültig.

Da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ist jede \mathbb{C} -lineare Abbildung automatisch auch \mathbb{R} -linear. Die Umkehrung gilt natürlich nicht. Die \mathbb{C} -linearen Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ haben genau die Form $z \mapsto wz$ mit $w \in \mathbb{C}$. Damit ergibt sich folgende Charakterisierung

Lemma 1.5. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann \mathbb{C} -linear, wenn ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $\{1, i\}$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ist. In diesem Fall gilt $Az = wz$ mit $w = a + ib$.

Beweis. Es genügt sich für festes $w = a + ib$ die Darstellung der Abbildung $z \mapsto wz$ in der Basis $\{1, i\}$ zu überlegen: Dann ist wegen

$$(a + ib)1 = a + ib \quad (1.27)$$

$$(a + ib)i = -b + ia \quad (1.28)$$

die Abbildungsmatrix von der angegebenen Form. □

Beispiel 1.6. Die Konjugationsabbildung ist \mathbb{R} -linear. Ihre Abbildungsmatrix bezüglich der obigen Basis ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Sie ist klarerweise nicht \mathbb{C} -linear.

1.4 Topologische Struktur

Vermöge des Betrags werden die komplexen Zahlen \mathbb{C} zu einem metrischen Raum mit Metrik $d(z, w) = |z - w|$. Der Vektorraum-Isomorphismus aus Abschnitt 1.3 führt den Betrag auf \mathbb{C} in die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^2 über, ist also sogar ein Homöomorphismus. Daraus folgt

Proposition 1.7. $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ als topologische (Vektor-)Räume. Insbesondere ist \mathbb{C} ein vollständiger, lokalkompakter metrischer Raum, in welchem die kompakten Teilmengen genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen sind (Heine-Borel).

Konvergenz von Folgen und Cauchyfolgen auf \mathbb{C} sind analog zu jedem anderen metrischen Raum erklärt. Zusammenhang, einfacher Zusammenhang und Wegzusammenhang, analog zu jedem anderen topologischen Raum.

Eine besondere Rolle spielt in den folgenden Kapiteln die offene Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \quad (1.29)$$

sowie nichtleere offene und zusammenhängende Mengen, die man *Gebiete* nennt.

Proposition 1.8. Sei G ein Gebiet in \mathbb{C} . Dann ist G sogar wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $z_0 \in G$ beliebig, aber fest. Sei

$$W_{z_0} := \{z \in G : \exists \text{Weg in } G, \text{ der } z_0 \text{ und } z \text{ verbindet}\}. \quad (1.30)$$

Wegen $z_0 \in W_{z_0}$ ist diese Menge nicht leer. W_{z_0} ist offen: Gibt es einen Weg von z_0 nach w , so gibt es auch einen Weg von z_0 zu jedem Punkt in $B_\rho(w) \subset G$. Es ist aber auch $G \setminus W_{z_0}$ offen: Sei $w \notin W_{z_0}$, dann ist auch $v \notin W_{z_0}$ für jedes $v \in B_\rho(w) \subset G$, denn gäbe es einen Weg von z_0 nach v , so könnten wir zuerst von z_0 nach v und dann von v nach w gehen. Da G zusammenhängend ist, muss die nicht leere offen und abgeschlossene Menge W_{z_0} mit G übereinstimmen. □

Beispiel 1.9.

1. $X := \{a+ib : b = \sin(1/b) \text{ mit } b \neq 0\} \cup \{ib : -1 \leq b \leq 1\}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. X ist aber auch kein Gebiet.
2. Der Kreisring $\{z : 1 < |z| < 2\}$ ist ein Gebiet (und damit wegzusammenhängend), nicht aber einfach zusammenhängend.
3. \mathbb{E} ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

\mathbb{C} ist zwar lokalkompakt (jede abgeschlossene Kugel ist kompakt), selbst aber nicht kompakt. Die Menge $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wird Ein-Punkt-Kompaktifizierung genannt, wenn man eine Umgebungsbasis des Punktes ∞ durch folgendes Mengensystem erklärt

$$\mathcal{U}(\infty) := \{\{\infty\} \cup O : \mathbb{C} \setminus O \text{ kompakt}\}. \quad (1.31)$$

Der dadurch definierte topologische Raum \mathbb{C}_∞ ist dann kompakt. Versehen mit den Rechenregeln $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$ wird \mathbb{C}_∞ die erweiterte gaußsche Zahlenebene genannt.

\mathbb{C}_∞ ist aber auch zur Riemann'schen Zahlenkugel isomorph, i.e. zur auf dem Nullpunkt der komplexen Ebene ruhenden Kugel mit Radius $\frac{1}{2}$. Der Südpol der Kugel besitzt die Raumkoordinaten $S = (0, 0, 0)$. Wenn die komplexe Zahl $z = x + iy = (x, y, 0)$ mit dem Nordpol $N = (0, 0, 1)$ der Kugel geradlinig verbunden wird, durchstößt die Gerade den Kugelpunkt $P = (\xi, \eta, \zeta)$. Die Zuordnung von $z = x + iy$ zu $P = (\xi, \eta, \zeta)$ heißt stereographische Projektion. Sie erfaßt umkehrbar eindeutig jeden Punkt der Kugel mit Ausnahme des Nordpols. Ihm wird der Punkt ∞ zugeschrieben. Tatsächlich ist die stereographische Projektion ein Homöomorphismus zwischen \mathbb{C}_∞ und der 2-Sphäre S^2 .

\mathbb{C}_∞ ist ein Beispiel einer *Riemann'schen* Fläche und läßt sich daher auch mit einer differenzierbaren Struktur versehen.

1.5 Geometrische Deutung

Aufgrund des Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist es möglich, komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene zu interpretieren. Man spricht dann von der Gauß'schen Zahlenebene. Der Betrag $|z|$ läßt sich als euklidische Distanz vom Koordinatenursprung deuten, die Konjugation \bar{z} , als Spiegelung an der reellen Achse, Realteil $\operatorname{Re} z$ und Imaginärteil $\operatorname{Im} z$ als orthogonale Projektion auf die reelle bzw. imaginäre Achse.

Nach unseren einleitenden Bemerkungen zur komplexen Exponentialfunktion kann man jeden Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ der Ebene eindeutig in Polarkoordinaten

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad (1.32)$$

mit $r > 0$ und $\phi \in [0, 2\pi)$ schreiben. Ist $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$, so ist $r = |z|$. Den Winkel ϕ nennt man Argument von z ; in Zeichen $\arg z$.

Bemerkung 1.10. Die Abbildung $\arg : \mathbb{C}^\times \rightarrow [0, 2\pi)$ ist unstetig. Erst durch Wegnehmen der ganzen nichtnegativen reellen Achse wird \arg stetig.

Diese Definition von ϕ erweist sich als konsistent mit der Definition über das Skalarprodukt

$$\cos \angle(z, w) = \frac{\langle z, w \rangle}{|z||w|} = \frac{\operatorname{Re}(z\bar{w})}{|z||w|}. \quad (1.33)$$

Insbesondere ist $\arg z$ der Winkel zwischen 1 und z . Die Darstellung

$$z = |z|e^{i \arg z} = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (1.34)$$

nennt man auch Polardarstellung von z . Diese Darstellung ist insbesondere für die Multiplikation zweier komplexer Zahlen praktisch, denn

$$zw = |z||w|e^{i(\arg z + \arg w)}. \quad (1.35)$$

Für $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ergibt sich aus (1.35)

$$z^N = r^N(\cos N\varphi + i \sin N\varphi), \quad N \in \mathbb{Z} \quad (1.36)$$

Der Spezialfall für $|z| = 1$ wird auch als Formel von de Moivre bezeichnet:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^N = \cos N\varphi + i \sin N\varphi. \quad (1.37)$$

Beispiel 1.11 (Wurzeln einer komplexen Zahl). Um die Gleichung $z^N = w$ mit $N \in \mathbb{Z}$ zu lösen, gewinnt man mit Hilfe der Polardarstellung die beiden Gleichungen

$$|z|^N = |w|, \quad N \arg z = \arg w \pmod{2\pi}. \quad (1.38)$$

Erste ist durch $|z| = \sqrt[N]{|w|}$ eindeutig lösbar, die zweite besitzt die N Lösungen

$$\arg z = \frac{\arg w}{N} + n \frac{2\pi}{N} \pmod{2\pi}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.39)$$

Darum ergeben sich die N Lösungen der Gleichung $z^N = w$ zu

$$z = \sqrt[N]{R} \left(\cos \frac{\psi + 2\pi n}{N} + i \sin \frac{\psi + 2\pi n}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.40)$$

Beispiel 1.12 (Logarithmen einer komplexen Zahl). Um die Gleichung $e^z = w$ zu lösen, verwendet man wieder die Polardarstellung von w und erhält die beiden Gleichungen

$$e^{\operatorname{Re} z} = |w|, \quad \operatorname{Im} z = \arg w \pmod{2\pi}. \quad (1.41)$$

Die erste ist durch $\operatorname{Re} z = \ln |w|$ wieder eindeutig lösbar, die zweite hingegen besitzt die abzählbar vielen Lösungen $\operatorname{Im} z = \arg w + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Insgesamt ergibt sich

$$z = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.42)$$

1.6 Möbius-Transformationen

Definition 4. Eine Abbildung M der Form $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ heißt gebrochen linear bzw. Möbius-Transformation, wenn $ad - bc \neq 0$.

Die Einschränkung $ad - bc \neq 0$ ist nötig, da M sonst entweder konstant oder nirgends definiert ist. Eine Möbius-Transformation ist offenbar eine stetige Bijektion $M : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. M läßt sich aber auch als stetige Abbildung $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ auffassen, denn

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty. \quad (1.43)$$

Proposition 1.13. Die Menge der Möbius-Transformationen bildet unter der Komposition von Abbildungen eine Gruppe. Das Inverse von $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist gegeben durch $M^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$.

Beweis. Nachrechnen. □

Zwei Tupel (a, b, c, d) und $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ definieren genau dann die selbe Möbius-Transformation, wenn $(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Mithilfe dieser Beobachtung läßt sich dann ein Gruppenisomorphismus zwischen der Gruppe der Möbiustransformationen und $\text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ herstellen.

Beispiel 1.14.

1. Die Menge der Möbius-Transformationen $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ bilden eine Untergruppe, welche zu $\text{GL}(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ isomorph ist. Sie bilden $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf sich ab.
2. Die Menge der Möbius-Transformationen $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc > 1$ sind zu $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ isomorph. Sie bilden die obere Halbebene in sich ab: Da M ein Homöomorphismus ist, der die reelle Achse festläßt, muss das Gebiet $\text{Im } z > 0$ auf $\text{Im } z > 0$ oder $\text{Im } z < 0$ abgebildet werden. Wegen

$$M(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{1}{c^2+d^2} ((ac+bd) + i) \quad (1.44)$$

wird i in die obere Halbebene abgebildet, also tritt der erstere Fall ein.

Bemerkung 1.15. Man kann zeigen, dass $\text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$ isomorph ist zu $\text{SO}^+(1, 3)$, der Drehgruppe im Minkowskiraum. Damit lassen sich Möbius-Transformationen als Drehungen der Riemann'schen Zahlenkugel deuten.

Proposition 1.16. Die Gruppe der Möbius-Transformationen agiert transitiv auf \mathbb{C}_∞ , d.h. zu jede zwei Punkten $z_1, w_1 \in \mathbb{C}_\infty$ gibt es eine gebrochen lineare Transformation M mit $M(z_1) = w_1$.

Beweis. Der Fall $z_1 = w_1 = \infty$ ist trivial. Durch eine Translation $z \mapsto z + b$ können wir je zwei beliebige Punkte $z_1, w_1 \in \mathbb{C}$ aufeinander abbilden. Ist $z_1 = \infty$ wenden wir zuerst die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ an und bilden danach 0 auf w_1 ab. Ist $w_1 = \infty$, bilden wir zuerst z_1 auf 0 ab und wenden danach die Inversion an. □

Bemerkung 1.17. Proposition 1.16 kann wesentlich verschärft werden. So gibt es etwa zu je drei paarweise verschiedenen Punkten z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 genau eine Möbius-Transformation M mit $M(z_i) = w_i, i = 1, 2, 3$. Insbesondere ist also eine Möbius-Transformation mit drei Fixpunkten schon die Identität.

Proposition 1.18. *Jede Möbius-Transformation $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ kann als Komposition von Translationen, Dilatationen, Rotationen und Inversionen geschrieben werden.*

Korollar 1.19. *Sei $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation. Dann bildet M Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden ab.*

Beweis. Die Aussage ist trivial für Translationen, Dilatationen und Rotationen. Die Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ führt die Gleichung

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \gamma \bar{z} + \delta = 0 \quad (1.45)$$

über in

$$\delta z \bar{z} + \gamma z + \beta \bar{z} + \alpha = 0, \quad (1.46)$$

wobei nicht alle Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ verschwinden sollen. Nun ist (1.45) in der Gauß'schen Zahlenebene aber genau die Gleichung eines Kreises ($\alpha \neq 0$) oder einer Geraden ($\alpha = 0$). \square

Lemma 1.20. *Sei $M : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ eine Möbius-Transformation mit $M(\infty) = \infty$. Dann ist M von der Gestalt $z \mapsto \alpha z + \beta$ mit $\alpha \neq 0$.*

Beweis. Aus $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = \infty$ folgt $c = 0$ und da M eine Möbius-Transformation ist auch $a, d \neq 0$. Setze nun $\alpha := a/d$ bzw. $\beta := b/d$. \square

Wir werden in einem späteren Kapitel beweisen, dass die einzigen Automorphismen (i.e. bijektive differenzierbare Funktionen mit differenzierbarer Umkehrfunktion) von \mathbb{C} die Abbildungen $z \mapsto az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ sind. Diesen Satz vorweggenommen können wir zum Abschluss zeigen

Satz 1.21. *Die Möbiustransformationen sind genau die Automorphismen von \mathbb{C}_∞ .*

Beweis. Sei $\phi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ein Automorphismus. Da die Gruppe der Möbius-Transformationen transitiv auf \mathbb{C}_∞ agiert, finden wir eine Möbius-Transformation ψ sodass ∞ ein Fixpunkt von $\psi \circ \phi$ ist, d.h. sodass $\psi \circ \phi$ eingeschränkt auf \mathbb{C} ebenfalls ein Automorphismus ist. Es ist also $\psi \circ \phi$ affin und damit $\phi = \psi^{-1} \circ (\psi \circ \phi)$ gebrochen linear. \square

Beispiel 1.22 (Cayley-Transformation). Die Abbildung $C(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ist offenbar eine Möbius-Transformation. Wegen

$$\left| \frac{t-i}{t+i} \right|^2 = \frac{t^2+1}{t^2+1} = 1, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.47)$$

bildet sie die reelle Achse in den Rand $\partial\mathbb{E}$ der Einheitskreisscheibe ab, ∞ wird dabei auf 1 abgebildet. Es muss daher die Halbebene $\text{Im } z > 0$ entweder auf \mathbb{E} oder auf $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{E}}$ abgebildet werden. Wegen $C(i) = 0$ ist ersteres der Fall.

Die Umkehrabbildung der Cayleytransformation ist gegeben durch $C^{-1}(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.

Sei M eine Möbius-Transformation, welche die obere Halbebene in sich abbildet und C die Cayley-Transformation. Dann ist $\frac{1}{i} C \circ M \circ C^{-1}$ eine Möbius-Transformation, welche den Einheitskreis in sich abbildet. Wählt man M wie in Beispiel 1.14.2, ergibt sich

$$\frac{1}{i} C \circ M \circ C^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad (1.48)$$

wobei

$$\alpha := a + d + i(b - c) \quad \text{bzw.} \quad \beta := a - d - i(b + c). \quad (1.49)$$

Desweiteren ist nach Voraussetzung stets $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 2(ad - bc) > 0$. Kürzt man also durch α und setzt $\eta := \frac{\alpha}{\alpha}$ bzw. $\zeta := -\frac{\beta}{\alpha}$, so ergibt sich die Darstellung

$$\frac{1}{i} C \circ M \circ C^{-1}(z) = \eta \frac{z - \zeta}{\bar{\zeta}z - 1}, \quad \text{mit} \quad |\eta| = 1, \zeta \in \mathbb{E}. \quad (1.50)$$

Aus den Gleichungen (1.49) erkennt man unschwer, dass die Zuordnung aus (1.50) bijektiv ist. Die Gruppe der Möbius-Transformationen der Gestalt (1.50) ist somit konjugiert zur Gruppe der Möbius-Transformationen aus Beispiel 1.14.2 und somit isomorph zu $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Setzen wir in (1.50) speziell $\zeta = 0$ erhalten wir die Rotationen $z \mapsto \eta z$; setzen wir dagegen $\eta = 1$ erhalten wir Automorphismen, welche $\zeta \mapsto 0$ und $0 \mapsto \zeta$ erfüllen. Es agiert daher $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ transitiv auf \mathbb{E} . Es agieren damit die Möbius-Transformationen aus Beispiel 1.14.2 auf der oberen Halbebene auch transitiv.

Beispiel 1.23. Gesucht ist eine Möbius-Transformation M mit $\infty \mapsto 1$, $1 \mapsto 0$ und $0 \mapsto -1$. Aus diesen Forderungen erhalten wir die drei Gleichungen

$$\frac{a}{c} = 1, \quad \frac{b}{d} = -1, \quad \frac{a+b}{c+d} = 0. \quad (1.51)$$

Geben wir uns etwa $a = 1$ vor, erhalten wir $M(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Geometrisch entspricht M einer Drehung der Riemann'schen Zahlenkugel um den Winkel $\pi/2$ durch die zwischen den Urbildern von $\pm i$ verlaufende Achse. Der Halbkreisbogen $[\infty, 1, 0]$ wird dabei auf den Halbkreisbogen $[1, 0, -1]$ gedreht.