文章编号: 1007-2861(2009)01-0014-03

l_p^n 空间中单位球的距离及其应用

马　丹，　何斌吾

(上海大学 理学院，上海 200444)

摘要: 用优化的方法得到 l_p^n 空间中单位球位似意义下的 Banach-Mazur 距离. 与 Banach-Mazur 距离相比,描述了两个凸体间未经任何旋转变换下的距离. 此后,运用这一结果估计了 l_p^n 空间中单位球的高斯测度.

关键词: 高斯测度; l_p^n 空间; Banach-Mazur 距离; 渐近性质

中图分类号: O 186.5　　　　**文献标志码**: A

Distance between Unit Balls in l_p^n-Space and Its Application

MA Dan,　HE Bin-wu

(College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract: The Banach-Mazur distance, defined by homothetic transformation, between two different unit balls in l_p^n-space is shown with optimization calculation. Compared to the Banach-Mazur distance, it shows distance between convex bodies without any rotation. The result is applied to estimate the Gaussian measure of unit balls in the l_p^n-space.

Key words: Gaussian measure; l_p^n space; Banach-Mazur distance; asymptotic property

度量几何体之间的差异(在某种距离意义下)是体视学(steredogy)、机器人学中的几何探索(geometric probing)和仿晶学(crystallography)等领域中的重要课题. 多年来,为了度量凸体之间形状上的差异,众多学者做了许多出色的工作. 在此过程中,由度量差异的需要,应运而生了许多凸体间的距离. 在文献[1]中, Gardner 介绍了几何距离 d_G 与 Hausdorff 距离 δ. 设 K, L 是凸体,则它们之间的几何距离定义为

$$d_G(K,L) = \inf\left\{\alpha\beta \,\middle|\, \alpha > 0, \beta > 0, \frac{1}{\beta}L \subset K \subset \alpha L\right\};$$

它们之间的 Hausdorff 距离定义为

$$\delta(K,L) = \min\{\lambda > 0 \mid, K \subset L + \lambda B_2^n, L \subset K + \lambda B_2^n\}.$$

这两种距离是从点集距离出发定义的. 在通常情况下,由于人们只关心凸体之间形状的差异,这两种距离对于凸体位置的敏感性也就决定了它们的局限性. Banach-Mazur 距离定义的出现突破了这一局限. 在文献[1]中,给出了这样的定义:

$$d_{BM}(K,L) = \inf\{\lambda \mid L \subset \phi K \subset \lambda L, \phi \in GL_n, \lambda \in \mathbf{R}^n\}.$$

它与几何距离之间的关系可由下式表示:

$$d_{BM}(K,L) = \inf\{d_G(\phi K_z, L_x)\},$$

式中, inf 取遍所有的 $z, x \in \mathbf{R}^n$, 和所有的 $\phi \in GL_n$,

收稿日期: 2007-10-09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671119)
通信作者: 何斌吾(1957~),男,教授,博士生导师,博士,研究方向为凸几何、几何分析. E-mail: hebinwu@shu.edu.cn

$L_x = L - x$. 值得一提的是,Banach-Mazur 距离还是一种对数度量. 此后,1963 年,Grünbaum 在文献[2]中引入了一种弱 Banach-Mazur 距离 d_w:

$$d_w(K,L) = \inf\left\{|\alpha\beta| : \alpha,\beta \in \mathbf{R}^n, \frac{1}{\beta}L_x \subset \phi K_z \subset \alpha L_x\right\},$$

式中,最小下界是取遍所有 $z, x \in \mathbf{R}$ 和所有 $\phi \in GL_n$.

本研究将要引入一种位似意义下的 Banach-Mazur 距离,它在数值上与凸体在不作旋转变化情况下的 Banach-Mazur 距离相同,我们把它记作 d_{BM}^*,定义为

$$d_{\mathrm{BM}}^*(K,L) = \inf\left\{\alpha\beta \mid \alpha,\beta > 0, \frac{1}{\beta}L \subset K_x \subset \alpha L\right\},$$

式中,inf 取遍所有的 $x \in \mathbf{R}^n$. 事实上,可以从这两种不同的 Banach-Mazur 距离对 B_∞^2 与 B_1^2 之间距离不同的描述看出它们的差异. d_{BM}^* 与位置无关,设 K, L, M 是对称凸体,则有:

(1) $d_{\mathrm{BM}}^*(K,L) = 1$ 当且仅当 K, L 是位似的;

(2) $d_{\mathrm{BM}}^*(K,L) = d_{\mathrm{BM}}^*(L,K)$;

(3) $d_{\mathrm{BM}}^*(K,L) = d_{\mathrm{BM}}^*(K,M) \cdot d_{\mathrm{BM}}^*(M,L)$.

1　主要结果及其证明

定理 1　在 $\mathbf{R}^n$ 中,p, q 为不同的正实数,且满足 $p < q \leqslant \infty$,有

$$d_{\mathrm{BM}}^*(B_p^n, B_q^n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

从几何角度看,定理 1 给出了 l_p^n 与 l_q^n 空间中单位球的不考虑旋转变换的 Banach-Mazur 距离,若把 $\mathbf{R}^n$ 中 p-范数单位球看作是 p-范数等值面,从定理 1 中我们就能得到 q-范数单位球面上 p-范数的最大、最小值. 定理 1 的证明正是从这个角度出发的.

定理 1 的证明　首先,证明 $B_q^n \subset n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B_p^n$. 证明由下面的问题展开:在球面 $\|x\|_q = a$ 上,$\|x\|_p$ 的最大值是多少?

由球面 $\|x\|_q = a$ 的对称性,在考虑上述问题时,可以只考虑在 $\|x\|_q = a(x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n)$ 上 $\|x\|_p$ 的最大值. 从而,上述问题可归结为下列条件极值问题的求解:

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p, \\ \text{s.t.} \quad & G(x) = x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q - a^q = 0,\ (a > 0), \\ & x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

我们运用 Lagrange 乘子法来求解式(1),作 Lagrange函数 $L(x) = f(x) - \lambda G(x)$,列出可能极值条件方程组为

$$\begin{cases} L_{x_i} = p x_i^{p-1} - \lambda q x_i^{q-1} = 0, \\ x_i \geqslant 0, \qquad (i = 1,2,\cdots,n), \\ G(x) = x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q - a^q = 0, \end{cases} \tag{2}$$

若 $x_i \neq 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$,从方程组(2)中可解得可能极值点 $x_0 = \left(\frac{a}{\sqrt[q]{n}}, \frac{a}{\sqrt[q]{n}}, \cdots, \frac{a}{\sqrt[q]{n}}\right)$,$L$ 在 x_0 处的 Hesse 矩阵为 $\boldsymbol{A}_k(x_0) = p(p-q)x_0^{p-2}\boldsymbol{I}_k$,其中 $x_0 = \frac{a}{\sqrt[q]{n}}$,$\boldsymbol{I}_k$ 为 k 阶单位阵,于是 $(-1)^k \det \boldsymbol{A}_k(x_0) = (p(p-q) \cdot x_0^{p-2})^k > 0 (k = 1,2,\cdots,n)$. 因此,$f$ 在 x_0 处达到极大值

$$f(x_0) = a^q n^{1-\frac{p}{q}}. \tag{3}$$

若 x 中只有 $m(1 \leqslant m \leqslant n)$ 个分量不为零,其余 $n - m$ 个分量均为零,不失一般性,可设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m, \underbrace{0,\cdots,0}_{n-m\text{个}})$,其中 $x_i \neq 0 (i = 1,2,\cdots,m)$. 从方程组(2)中可以解得极值点 $x_0^* = \left(\frac{a}{\sqrt[q]{m}}, \frac{a}{\sqrt[q]{m}}, \cdots, \frac{a}{\sqrt[q]{m}}, \underbrace{0,\cdots,0}_{n-m\text{个}}\right)$,$f$ 在 x_0^* 处取值 $f(x_0^*) = a^p m^{1-\frac{p}{q}}$,注意到 $1 \leqslant m < n$,与式(3)作比较,可得问题(1)的解为 $x_0 = \left(\frac{a}{\sqrt[q]{n}}, \frac{a}{\sqrt[q]{n}}, \cdots, \frac{a}{\sqrt[q]{n}}\right)$,$f$ 的最大值为 $h_n(a) = a^p n^{1-\frac{p}{q}}$.

从而,由 B_q^n 的对称性,我们就可以得到其上 $\|x\|_p$ 的最大值为 $h_n^*(1) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$,这就蕴含了 $B_q^n \subset n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B_p^n$. 而 $B_p^n \subset B_q^n$,以及 B_p^n 的极大性,$n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} B_p^n$ 的极小性是容易证明的.

2　应　用

从文献[4-6]中了解到学者们对各个单位球不同测度的研究及其结果之后,我们考虑 l_p^n 空间中的单位球 B_p^n 的高斯测度,记作 $\gamma_{B_p^n}$,由下式确定:

$$\gamma_{B_p^n} = \int_{B_p^n} \mathrm{d}\gamma_n(x),$$

式中,$\mathrm{d}\gamma_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{-\|x\|^2}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}^n}$.

首先,我们给出一些简单的特殊情况. 通过引入适当的球面坐标变换,并注意到文献[4]中 B_2^n 的 Lebesgue 测度结果之后,我们有

$$\gamma(aB_2^n) = \frac{2H(n-1,a)}{(\sqrt{2})^n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad a > 0,$$

式中, $H(n,a) = \int_0^a t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t$. 同样地,经过简单的计算,我们马上又有了

$$\gamma(aB_\infty^n) = \mathrm{erf}^n\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

式中, $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

利用定理1及以上的结果,就有了以下对 l_p^n 空间中的单位球 B_p^n 高斯测度的估计.

定理2 在 l_p^n 中,

(i) 当 $p \geqslant 2$ 时,

$$\frac{e^{-\frac{n^{1-\frac{2}{p}}}{2}}}{\sqrt{2\pi}^n}\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} \leqslant \gamma(B_p^n) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2}\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)};$$

(ii) 当 $0 < p < 2$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} \leqslant \gamma(B_p^n) \leqslant \frac{e^{-\frac{n^{1-\frac{2}{p}}}{2}}}{\sqrt{2\pi}^n}\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)};$$

式中, $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

证明 当 $p \geqslant 2$ 时,由定理1可知,在 B_p^n 中,有 $0 \leqslant \|x\|^2 \leqslant n^{1-\frac{2}{p}}$,于是,我们可以容易地得到

$$\frac{e^{-\frac{n^{1-\frac{2}{p}}}{2}}}{\sqrt{2\pi}^n}\mathrm{vol}(B_p^n) \leqslant \gamma(B_p^n) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\mathrm{vol}(B_p^n).$$

又 $\mathrm{vol}(B_p^n) = \frac{\left(2\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$,将其值代入就有了定理中的结果.

类似地,根据定理1我们也能得到以下的定理:

定理3 在 l_p^n 中,

$$\mathrm{erf}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[p]{n}}\right) \leqslant \gamma(B_p^n) \leqslant \mathrm{erf}^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

式中, $\mathrm{erf}^n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$.

由于 Lebesgue 测度是无限测度,高斯测度是概率测度,于是读者自然会有这样的直觉:Lebesgue 测度中的∞等价于高斯测度中的1. 在文献[4]中,我们可以了解到:当 n 趋近于无穷大时, $\mathrm{vol}(B_p^n)$ 即 B_p^n 的 Lebesgue 测度亦趋近于无穷大. 这不免使人有这样的猜想:当 n 趋近于无穷大时, B_p^n 的高斯测度是不是也相应地趋近于1呢? 事实并非如此.

性质1 在 $l_p^n(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 中, $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma(B_p^n) = 0$.

我们运用前面结果得到的性质有力地说明这种乍看之下合理的猜想是与事实相悖的.

参考文献:

[1] GARDNER R J. Geometric tomography [M]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2006:9-10;188.

[2] GRÜNBAUM B. Measures of symmetry for convex sets [C]// Proc Symp Pure Math. 1963:233-270.

[3] BALL K. An elementary introduction to modern convex geometry [J]. Flavors of Geometry, 1997, 31:1-13.

[4] HUANG Z Y, HE B W. Volumes of unit balls in l_p^n and its asymptotic properties [J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2008, 12(2):107-109.

[5] BADGER L. Generating the measure of n-ball [J]. Amer Math Monthly, 2000, 107:256-258.

[6] HIJAB O. The volume of the unit ball in C^n [J]. Amer Math Monthly, 2000, 107:259.

(编辑:陈海清)